

Michelson-Interferometer

Stichworte:

Ebene Welle, Kugelwelle, Amplitude, Phase, Phasengeschwindigkeit, optischer Weg, Interferenz, piezoelektrischer Effekt, Elektrostriktion, Hysterese.

Messprogramm:

Änderung des Interferenzmuster im Michelson-Interferometer durch Brechzahländerung in einem transparenten Medium, interferometrische Messung der Ausdehnung eines Piezo-Translators und der Brechzahl von Glas.

Literatur:

- /1/ DEMTRÖDER, W.: „Experimentalphysik 2 – Elektrizitätslehre und Optik“, Springer-Verlag, Berlin u. a.
 /2/ HECHT, E.: „Optik“, Oldenbourg, München u. a.

1 Einleitung

In einem MICHELSON-Interferometer (Abb. 1) wird eine einfallende, in der Regel monochromatische Lichtwelle der Wellenlänge λ mithilfe eines teildurchlässigen Spiegels in zwei Teilwellen aufgespalten, die nach Durchlaufen unterschiedlicher optischer Wege längs der beiden Arme des Interferometers auf einem Beobachtungsschirm wieder zur Überlagerung (Interferenz) gebracht werden. Je nach Unterschied der optischen Wege entsteht ein mehr oder weniger kompliziertes Interferenzmuster; Abb. 2 zeigt ein Beispiel. Durch Auswertung eines solchen Interferenzmusters kann man auf die Phasenunterschiede und damit auf die Laufzeit- bzw. Laufwegunterschiede der beiden Wellen schließen.

In der optischen Messtechnik wird das MICHELSON-Interferometer eingesetzt, um z. B. die Planität optischer Oberflächen, die Längenausdehnung von Materialien oder Phasenänderungen von Licht beim Durchgang durch transparente Medien zu messen. Mit heutigen Techniken erreicht man dabei typische Messgenauigkeiten im Bereich von $\lambda/1000$.

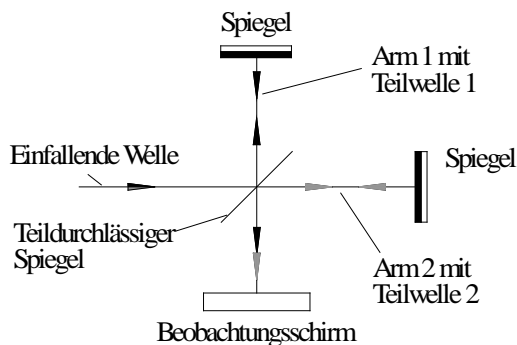


Abb. 1:
 Prinzipieller Aufbau eines MICHELSON-Interferometers.

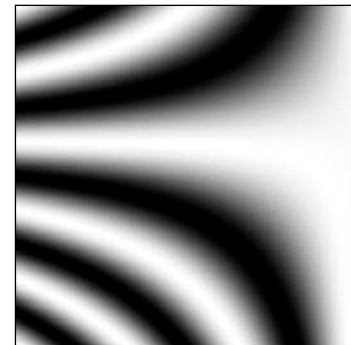


Abb. 2:
 Interferenzmuster durch Überlagerung von zwei Lichtwellen in einem MICHELSON-Interferometer. Das Muster entsteht durch Unterschiede in den optischen Wegen der beiden Teilwellen.

Aufgrund der hohen Messgenauigkeit fand und findet das MICHELSON-Interferometer auch Anwendungen in der Grundlagenforschung. So lieferten im Jahre 1887 ALBERT MICHELSON und EDWARD MORLEY mit einem MICHELSON-Interferometer den experimentellen Nachweis, dass die Erde sich *nicht* durch einen hypothetischen Äther bewegt, der nach damaliger Vorstellung gegenüber allen anderen Bezugssystemen ein ausgezeichnetes, ruhendes Bezugssystem darstellen sollte. Nur in diesem System sollte sich Licht in allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit c ausbreiten. Nach den Erkenntnissen der *speziellen Relativitätstheorie* von ALBERT EINSTEIN gibt es dagegen kein derart ausgezeichnetes Bezugssystem, also auch keinen Äther. Vielmehr gilt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertial-

systemen. Insofern war der negative Ausgang des MICHELSON-MORLEY-Experiments ein wichtiger experimenteller Beweis für die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie.

Heute, gut 100 Jahre nach der Durchführung des MICHELSON-MORLEY-Experiments, wird das MICHELSON-Interferometer in der Grundlagenforschung erneut verwendet, um zentrale Fragen der Physik zu klären. So wurde vor erst vor kurzem der direkte experimentelle Nachweis von Gravitationswellen erbracht, deren Existenz in der *allgemeinen Relativitätstheorie* EINSTEINS postuliert wird¹. Für diese Experimente wurde riesige Laser-Interferometer basierte Observationszentren eingerichtet². Es kamen MICHELSON-Interferometer zum Einsatz, dessen Arme jeweils eine Länge von etwa 4 km haben und in denen das Licht in evakuierten Röhren geführt wird. Durch den Einfluss einer Gravitationswelle vergrößert sich die Länge des einen Interferometerarmes, während sie sich im anderen Arm verkürzt. Die dadurch verursachten Änderungen der Laufwege beider Teilwellen sind allerdings so klein (Größenordnung $10^{-6} \lambda$), dass sie nur mit enormem experimentellem Aufwand detektiert und ausgewertet werden können.

2 Theorie

Wir betrachten nun das MICHELSON-Interferometer aus Abb. 1 gem. Abb. 3 etwas detaillierter. Das linear polarisierte Licht aus einem Laser (Wellenlänge λ) wird mithilfe eines Strahlaufweitungssystems AW aufgeweitet, dessen Funktionsprinzip bereits aus anderen Versuchen bekannt ist. Bei guter Justage verlässt im Idealfall eine *ebene Welle* E ³ das Strahlaufweitungssystem AW und trifft nach Begrenzung durch eine Blende B auf einen Strahlteilerwürfel ST, dessen teildurchlässige Spiegelschicht TS ein Teilungsverhältnis von 1:1 hat. Hier wird die Welle E in zwei Teilwellen aufgespalten:

- Ein Teil der Welle (E_1 mit 50 % der Intensität von E , schwarze Pfeile) wird an der Schicht TS reflektiert, trifft auf den Spiegel SP1, wird dort reflektiert und trifft erneut auf die Schicht TS. Dort wird ein Teil der Welle (mit 50 % der Intensität von E_1) durchgelassen und gelangt zum Beobachtungsschirm BS, während der andere Teil zurück zum Laser reflektiert wird.
- Der andere Teil der Welle (E_2 mit 50 % der Intensität von E , graue Pfeile) wird von der Schicht TS durchgelassen, trifft auf den Spiegel SP2, wird dort reflektiert und trifft erneut auf die Schicht TS. Dort wird ein Teil der Welle (mit 50 % der Intensität von E_2) reflektiert und gelangt zum Beobachtungsschirm BS, während der andere Teil zurück zum Laser läuft.

Im Folgenden nennen wir E_1 und E_2 die Teilwellen, die am Beobachtungsschirm BS ankommen. Ihre Intensitäten I sind gleich; sie betragen jeweils 25 % der Intensität von E . Aufgrund des quadratischen Zusammenhangs von Intensität und Amplitude haben die Wellen also auch die gleichen Amplituden $E_{01} = E_{02} := E_0$.

Die beiden ebenen Wellen E_1 und E_2 stammen aus derselben Lichtquelle (Laser) und haben demnach dieselbe Kreisfrequenz ω :

$$(1) \quad \omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Wellen. Breiten sich die Wellen in einem Medium mit Brechzahl n aus, so gilt:

$$(2) \quad c = \frac{c_0}{n} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

wobei c_0 die Ausbreitungsgeschwindigkeit und λ_0 die Wellenlänge im Vakuum ist.

¹ B.P. Abbott et al. *Phys Rev Lett* **116** 061102 (2016).

² Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatories (LIGO) in Livingston (USA) und Hanford (USA)

³ Da wir am Ausgang des Lasers linear polarisiertes Licht voraussetzen und davon ausgehen, dass die optischen Bauteile des Interferometers den Polarisationszustand des Lichtes nicht ändern, reicht die skalare Schreibweise für die Wellen (E statt \mathbf{E}).

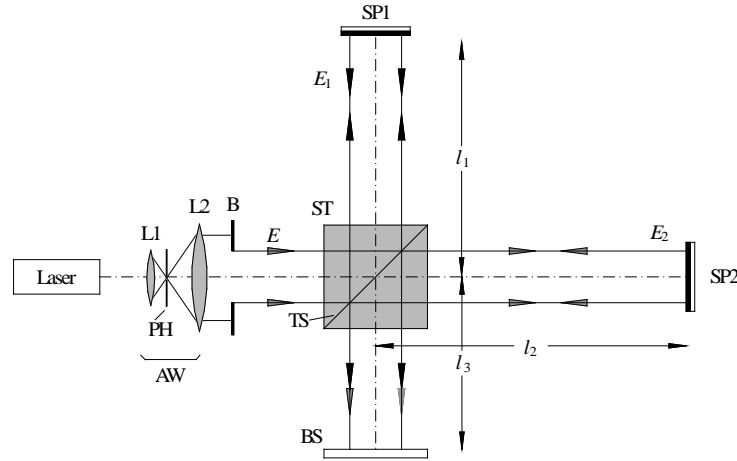


Abb. 3: Aufbau eines Michelson-Interferometers mit Laser als Lichtquelle. AW: Aufweitungssystem mit den Linsen L1 und L2 und dem Pinhole PH. B: Irisblende, SP1, SP2: Spiegel, TS: teildurchlässige Spiegelschicht des Strahlteilerwürfels ST (grau), BS: Beobachtungsebene mit Schirm oder Sensor einer CCD-Kamera.

Die Ausbreitungsrichtung einer Welle ist durch den *Wellenvektor* \mathbf{k} gegeben. Sein Betrag ist die *Wellenzahl* k :

$$(3) \quad k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Mit diesen Definitionen lassen sich die Wellen E_1 und E_2 als Funktion der Zeit t und des Ortsvektors \mathbf{r} in komplexer Schreibweise darstellen als:

$$(4) \quad \begin{aligned} E_1(t, \mathbf{r}) &:= E_1 = E_0 e^{i(\omega t - \varphi_1(\mathbf{r}))} \\ E_2(t, \mathbf{r}) &:= E_2 = E_0 e^{i(\omega t - \varphi_2(\mathbf{r}))} \end{aligned}$$

Dabei sind $\varphi_1(\mathbf{r})$ und $\varphi_2(\mathbf{r})$ die vom Ort abhängigen Phasen, für die bei ebenen Wellen gilt:

$$(5) \quad \varphi_1(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_1 \mathbf{r} = \begin{pmatrix} k_{1x} \\ k_{1y} \\ k_{1z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_2 \mathbf{r} = \begin{pmatrix} k_{2x} \\ k_{2y} \\ k_{2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Am Ort des Beobachtungsschirmes BS beobachten wir die *Interferenz* (additive Überlagerung) der Wellen E_1 und E_2 , deren Summe wir mit E_S bezeichnen:

$$(6) \quad E_S(t, \mathbf{r}) := E_S = E_1 + E_2 = E_0 \left(e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + e^{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} \right)$$

Beobachtbar mit dem Auge oder einem Detektor ist nicht die Amplitude, sondern nur die *Intensität* I einer Welle. Sie ist gegeben durch (vgl. Versuch FRAUNHOFER- und FRESNEL-Beugung...):

$$(7) \quad I(\mathbf{r}) := I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \varepsilon_r |E_S|^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \varepsilon_r E_S E_S^*$$

wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante, ε_r die relative Permittivität des Umgebungsmaterials und E_S^* die zu E_S konjugiert komplexe Größe ist. Mit der Proportionalitätskonstante

$$a = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

folgt damit aus Gl. (6) und (7):

$$(8) \quad I(\mathbf{r}) = a E_0^2 \left(2 + e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + e^{-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} \right)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir für die Phasendifferenzen:

$$(9) \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_2(\mathbf{r}) - \varphi_1(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}$$

Damit wird aus Gl. (8):

$$(10) \quad I(\mathbf{r}) = a E_0^2 \left(2 + e^{i\Delta\varphi(\mathbf{r})} + e^{-i\Delta\varphi(\mathbf{r})} \right)$$

und nach Anwendung der EULERSchen Formeln:

$$(11) \quad I(\mathbf{r}) = a E_0^2 \left(2 + 2 \cos(\Delta\varphi(\mathbf{r})) \right)$$

bzw.

$$(12) \quad I(\mathbf{r}) = 4 a E_0^2 \cos^2 \left(\frac{\Delta\varphi(\mathbf{r})}{2} \right)$$

Die Lichtintensität $I(\mathbf{r})$ am Ort des Beobachtungsschirmes variiert demnach mit dem \cos^2 der Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ der beiden interferierenden Teilwellen E_1 und E_2 . Es ergibt sich folglich ein *Interferenzmuster* mit hellen und dunklen *Interferenzstreifen*, deren Lage, Form und Abstand durch die Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ bestimmt wird.

Wir wollen nun diese Phasendifferenz und damit das Aussehen des Interferenzmusters für zwei Beispiele berechnen und für ein drittes Beispiel qualitativ beschreiben.

2.1 Interferenz von zwei ebenen Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung

Zur übersichtlicheren Darstellung betrachten wir gem. Abb. 4 eine „aufgeklappte“ Version des MICHELSON-Interferometers nach Abb. 3. Den Ursprung des Koordinatensystems, P, legen wir in den Mittelpunkt der teildurchlässigen Spiegelschicht TS des Strahlteilers. Der Ortsvektor \mathbf{r} zeigt vom Punkt P auf einen beliebigen Punkt Q in der Beobachtungsebene BS, für den die Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ der beiden Wellen berechnet werden soll. Beide Wellen E_1 und E_2 breiten sich in z -Richtung aus, ihre Wellenvektoren sind demnach:

$$(13) \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{1z} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ortsvektoren \mathbf{r} von P zum Punkt Q(x_q, y_q) sind gegeben durch:

$$(14) \quad \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 2l_1 + l_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 2l_2 + l_3 \end{pmatrix}$$

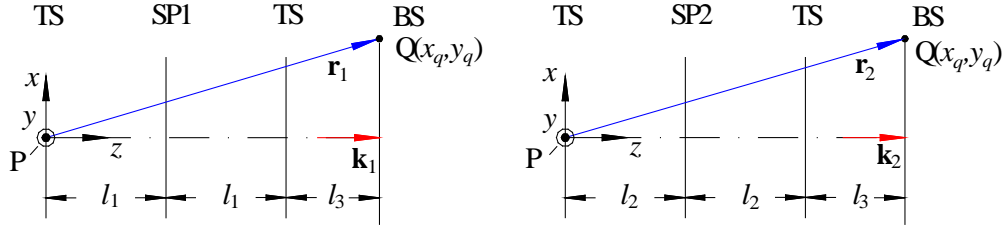


Abb. 4: Aufgeklappte Version des Michelson-Interferometers nach Abb. 3. Links für Welle E_1 , rechts für Welle E_2 . $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$: Wellenvektoren (rot), $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$: Ortsvektoren (blau).

Die Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ ist demnach gem. Gl. (9):

$$(15) \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \mathbf{k}_1 \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 2l_2 + l_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 2l_1 + l_3 \end{pmatrix} \right) = \frac{4\pi}{\lambda} (l_2 - l_1)$$

Die vom Polarisationszustand der Wellen abhängigen Phasensprünge bei Reflexion an TS, SP1 und SP2 lassen wir unberücksichtigt, da sie nur zu einer additiven Konstante führen.

Gem. Gl. (15) hängt die Phasendifferenz nicht von der Lage des Punkts Q ab. Sie ist auf dem gesamten Beobachtungsschirm konstant und wird nur durch die Wegdifferenz $l_2 - l_1$ bestimmt. Demnach ist auch die Intensität $I(\mathbf{r})$ gem. Gl. (12) auf dem gesamten Beobachtungsschirm konstant. Das Interferenzmuster ist in diesem Fall also eine Fläche mit konstanter Helligkeit. Wird die Wegdifferenz $l_2 - l_1$ variiert, z. B. durch Verschieben eines der Spiegel auf den Strahlteiler zu oder von ihm weg, ändert sich die Helligkeit auf dem gesamten Schirm in gleicher Weise. Wird einer der Spiegel über eine längere Strecke ($> \lambda/2$) verschoben, wird es auf dem gesamten Schirm abwechselnd hell und dunkel.

2.2 Interferenz von zwei zueinander geneigten ebenen Wellen

Wir betrachten nun den Fall, dass die Ausbreitungsrichtung einer der Wellen (hier: E_1) gegenüber der z -Achse um einen kleinen Winkel α verkippt ist. Praktisch lässt sich dies z. B. durch Verkippen des Spiegels SP1 um den Winkel $\alpha/2$ um die y -Achse erreichen. In diesem Fall sind die Wellenvektoren gegeben durch (s. Abb. 5):

$$(16) \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{1x} + \mathbf{k}_{1z} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ortsvektoren sind weiterhin durch Gl. (14) gegeben, wie aus Abb. 5 (rechts) deutlich wird. Zwar wird durch das Verkippen von SP1 der Abstand zwischen TS (links im Bild) und SP1 auf dem Hinweg der Welle von TS zu SP1 um die Strecke Δl kürzer, dafür vergrößert sich jedoch der Abstand zwischen SP1 und TS (rechts im Bild) auf dem Rückweg um den gleichen Betrag.

Die Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ ist demnach in Analogie zu Gl. (15):

$$(17) \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 2l_2 + l_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 2l_1 + l_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \underbrace{-\frac{2\pi}{\lambda} x_q \sin \alpha}_{\Delta\varphi_q} + \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} ((2l_2 + l_3) - \cos \alpha (2l_1 + l_3))}_{\varphi_0}$$

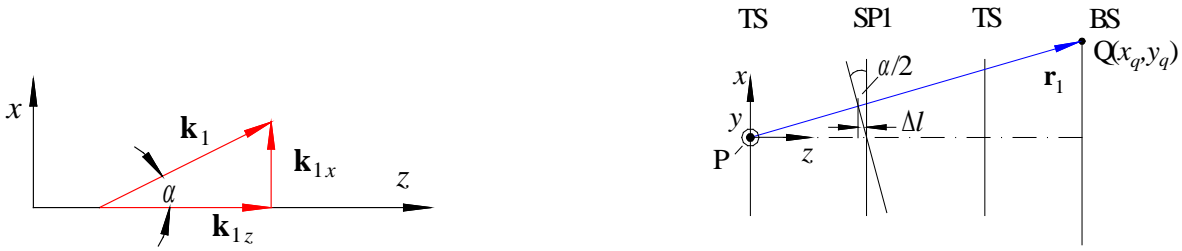


Abb. 5: Links: Wellenvektor \mathbf{k}_1 bei Verkippung der Ausbreitungsrichtung der Welle E_1 um den Winkel α gegenüber der z -Achse. Rechts: Ortsvektor \mathbf{r}_1 bei Verkippung des Spiegels SP1 um den Winkel $\alpha/2$ um die y -Achse.

Der rechte Term in Gl. (17) ist eine Konstante φ_0 , die nicht von der Lage des Punktes $Q(x_q, y_q)$ in der Beobachtungsebene abhängt. φ_0 wird nur durch die Abstände l_1, l_2 und l_3 sowie durch den Winkel α bestimmt. Der linke Term in Gl. (17), $\Delta\varphi_q$, beschreibt die Abhängigkeit der Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ von der Lage des Punktes $Q(x_q, y_q)$ in der Beobachtungsebene. Im hier betrachteten Fall hängt $\Delta\varphi_q$ nur von der x -Koordinate (x_q) des Punktes Q ab, nicht jedoch von dessen y -Koordinate. Das auf dem Beobachtungsschirm entstehende Interferenzmuster ist also in y -Richtung konstant und ändert sich nur in x -Richtung. Auf dem Schirm erscheinen deshalb gem. Abb. 6 Interferenzstreifen, die parallel zur y -Achse ausgerichtet sind und in denen sich die Intensität mit x_q gem. Gl. (12) und Gl. (17) ändert. Der Abstand der Streifen in x -Richtung ist durch den Winkel α gegeben und ihre absolute Lage in x -Richtung durch die Phase φ_0 .

Frage 1:

- Wie groß ist für $\lambda = 632 \text{ nm}$ der Abstand der Interferenzstreifen bei $\alpha = 0,5^\circ$ und bei $\alpha = 5^\circ$? Wie groß muss α sein, damit der Abstand der Interferenzstreifen 1 mm beträgt? (Hinweis zur Lösung: maximale Helligkeit liegt gem. Gl. (12) dann vor, wenn $\Delta\varphi = m2\pi, m \in \mathbb{N}$. Dies ist an den Orten x_{qm} der Fall.)

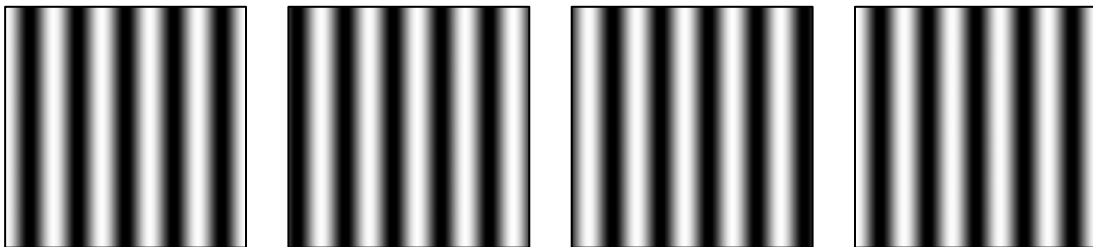


Abb. 6: Interferenzstreifen bei der Überlagerung von zwei zueinander geneigten ebenen Lichtwellen. y verläuft in vertikaler, x in horizontaler Richtung. Der Abstand der Streifen in x -Richtung ist durch den Neigungswinkel α gegeben (s. Abb. 5), ihre absolute Lage in x -Richtung durch die Phase φ_0 . Von links nach rechts: $\varphi_0 = (0, 90, 180, 270)^\circ$.

2.3 Interferenz von zwei Wellen mit beliebigen Phasenfronten

In einem Interferometer können auch Wellen zur Überlagerung gebracht werden, deren Wellenfronten keine Ebenen sind (wie bei ebenen Wellen), sondern eine beliebige Form haben. Bringen wir beispielsweise in einen Arm des Interferometers nach Abb. 3 ein optisch transparentes Objekt mit beliebiger Form ein, so wird die Wellenfront der ursprünglich ebenen Welle nach zweimaligem Durchgang durch dieses Objekt eine mehr oder weniger komplizierte Form haben. Solche Objekte können z. B. beliebig geformte Glaskörper sein, oder auch Gasvolumina, in denen die Temperatur T oder die Dichte ρ und damit die Brechzahl n mit dem Ort variiert (s. Abb. 7).

In solchen Fällen hat die Wellenfront von z. B. E_1 (oder E_2) eine mehr oder weniger komplizierte Form und folglich variiert die Phase $\varphi_1(\mathbf{r})$ (oder $\varphi_2(\mathbf{r})$) der Welle gleichermaßen kompliziert mit dem Ort \mathbf{r} . Das gleiche gilt demnach auch für die Phasendifferenz $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ (s. Gl. (9)), die das Aussehen des Interferenzmusters (Gl. (12)) bestimmt:

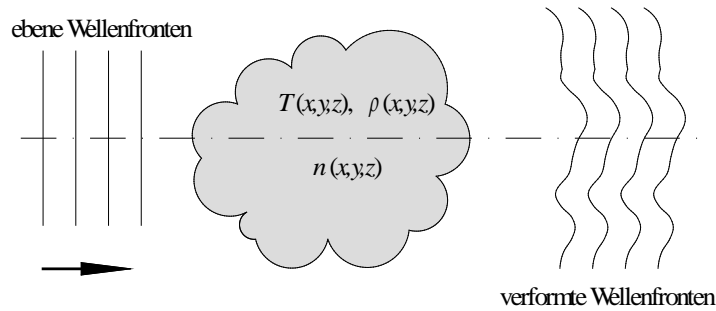


Abb. 7: Veränderung der Wellenfront einer ursprünglich ebenen Welle beim Durchgang durch ein Gasvolumen mit örtlich variierender Temperatur $T(x,y,z)$ oder Dichte $\rho(x,y,z)$, wodurch eine örtlich variierende Brechzahl $n(x,y,z)$ verursacht wird.

$$(18) \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}) = \Delta\varphi(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) - \varphi_1(x, y, z)$$

Abb. 2 zeigt ein Beispiel für den Fall der Überlagerung von zwei Wellen mit schwach gekrümmten Wellenfronten.

2.4 Interferometrische Messung der Brechzahl von Glas

Mithilfe eines Interferometers lässt sich die Brechzahl n_G von Glas bestimmen. Zur Erläuterung des Messprinzips betrachten wir gem. Abb. 8 den Durchgang einer ebenen Lichtwelle durch eine planparallele Glasplatte, die aus Glas mit der Brechzahl n_G hergestellt wurde. Die Platte sei in einem Arm eines MICHELSON-Interferometers montiert und kann senkrecht zur optischen Achse um die Achse D gedreht werden, die vertikal in der Frontfläche der Platte verläuft.

Beim Durchgang durch die Glasplatte erfährt die Lichtwelle eine vom Einfallswinkel α abhängige Phasenverzögerung, die wir nun berechnen wollen. Dazu vergleichen wir die Situation mit Glasplatte mit der ohne Glasplatte im Interferometerarm.

Ohne Glasplatte legt die Lichtwelle E in Luft (Index L) vom Punkt D bis zum Punkt C (Punkt auf der Bezugsebene S) den optischen Weg

$$(19) \quad s_L = n_L \overline{DC} \approx \overline{DC}$$

zurück, wobei n_L die Brechzahl von Luft ist, für die wir in guter Näherung $n_L \approx 1$ setzen können.

Mit Glasplatte (Index G) ist der optische Weg vom Punkt D bis zum Punkt F auf der Bezugsebene S

$$(20) \quad s_G = n_G \overline{DB} + n_L \overline{BF} \approx n_G \overline{DB} + \overline{BF}$$

Die optische Wegdifferenz ist demnach

$$(21) \quad \Delta s = s_L - s_G = \overline{DC} - n_G \overline{DB} - \overline{BF}$$

Daraus folgt für die Phasendifferenz $\Delta\varphi'$ am Ort der Bezugsebene S zwischen den Fällen mit / ohne Glasplatte:

$$(22) \quad \Delta\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta s$$

Da das Licht im MICHELSON-Interferometer die genannten Strecken auf dem Hin- und Rückweg durchläuft, folgt schließlich für die gesamte Phasendifferenz:

$$(23) \quad \Delta\varphi = 2\Delta\varphi' = \frac{4\pi}{\lambda_0} \Delta s = \frac{4\pi}{\lambda_0} (\overline{DC} - n_G \overline{DB} - \overline{BF})$$

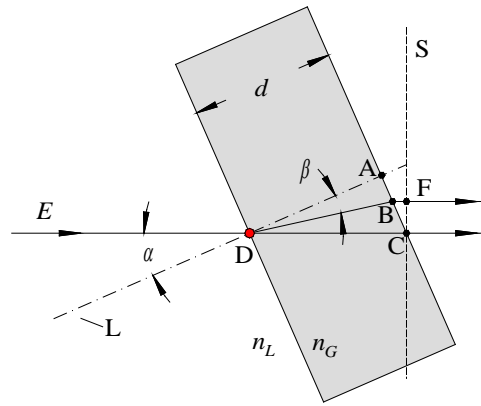


Abb. 8: Lichtdurchgang durch eine planparallele Glasplatte der Dicke d . E : einfallende ebene Lichtwelle, L : Lot auf die Grenzfläche Luft / Glas, D : Drehachse (rot), S : Bezugsebene.

Diese Größe gilt es nun als Funktion des Einfallswinkels α zu bestimmen. Aus der Skizze in Abb. 8 lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$$(24) \quad \overline{DC} = \frac{d}{\cos \alpha} \quad \overline{DB} = \frac{d}{\cos \beta} \quad \overline{BF} = \overline{BC} \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BC} + \overline{AB}}{d} \quad \tan \beta = \frac{\overline{AB}}{d} \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = d (\tan \alpha - \tan \beta)$$

Einsetzen von Gl. (24) in Gl. (23) ergibt:

$$(25) \quad \Delta \varphi = \frac{4\pi}{\lambda_0} d \left(\frac{1}{\cos \alpha} - n_G \frac{1}{\cos \beta} - \sin \alpha (\tan \alpha - \tan \beta) \right)$$

Den Winkel β kann man durch Anwendung des Brechungsgesetzes eliminieren. Es lautet mit $n_L \approx 1$:

$$(26) \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n_G}$$

Daraus folgt

$$(27) \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_G^2}} = \frac{1}{n_G} \sqrt{n_G^2 - \sin^2 \alpha}$$

Durch Einsetzen von Gl. (26) und (27) in Gl. (25) und Ersetzen der tan-Funktionen durch den Quotienten aus sin- und cos-Funktionen folgt schließlich:

$$(28) \quad \Delta \varphi = \frac{4\pi}{\lambda_0} d \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{n_G^2}{\sqrt{n_G^2 - \sin^2 \alpha}} - \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{n_G^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \right)$$

Bringt man alle Terme auf den Hauptnenner

$$\cos \alpha \sqrt{n_G^2 - \sin^2 \alpha}$$

so folgt schließlich nach wenigen Umrechnungen

$$(29) \quad \Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda_0} d \left(\cos\alpha - \sqrt{n_G^2 - \sin^2\alpha} \right)$$

Für den Einfallswinkel $\alpha = 0^\circ$ (senkrechter Einfall auf die Glasplatte) ist

$$(30) \quad \Delta\varphi(0) = \frac{4\pi}{\lambda_0} d (1 - n_G)$$

Zieht man diese Phasendifferenz von dem Wert für $\Delta\varphi$ aus Gl. (29) ab, so erhält man die gesuchte Phasenverzögerung $\Delta\varphi_G$, die die Lichtwelle bei Durchgang durch die Glasplatte bekannter Dicke d als Funktion des Einfallswinkels α erfährt:

$$(31) \quad \Delta\varphi_G(\alpha) = \frac{4\pi}{\lambda_0} d \left(\cos\alpha - \sqrt{n_G^2 - \sin^2\alpha} - 1 + n_G \right)$$

3 Versuchsdurchführung

Zubehör:

Helium-Neon-Laser (5 mW Lichtleistung) in Fein-Justierhalterung auf Dreieckschiene (Länge 1,5 m), Strahlaufweitungssystem (Mikroskopobjektiv $\times 20$, Pinhole mit Durchmesser 30 μm , Kollimationslinse $f = 200$ mm), Irisblende, Interferometer-Grundplatte, Strahlteilerwürfel $25 \times 25 \times 25$ mm³ in Halterung, Spiegel in verstellbarer Halterung, Piezo-Translator (Typ PHYSIK INSTRUMENTE P-171.00) mit magnetisch gehaltenem Spiegel (\varnothing 10 mm) in verstellbarer Halterung, Hochspannungsnetzgerät (0 - 1000) V mit Hochspannungskabel für Piezo-Translator, planparallele Glasplatte (Dicke⁴ $d = 4,92$ mm, Fehler vernachlässigbar) in verstellbarer Halterung auf Drehtisch (THORLABS PR01/M), CCD-Kamera DMK 21AF04 (640 \times 480 Pixel, Pixelgröße $5,6 \times 5,6$ μm^2) mit Firewire-Schnittstelle, Rohr für CCD-Kamera als Streulichtschutz, PC mit FireWire-Schnittstelle, Gasfeuerzeug, Neutralfilterrad (Graufilterrad), Reiter, Stativstangen, Beobachtungsschirm, Werkzeug, Labortischlampe, Taschenlampe, 2 Stücke schwarze Pappe (ca. 20 \times 20 cm²).

Achtung:

Beim Umgang mit Laserlicht muss darauf geachtet werden, dass weder der Laserstrahl direkt, noch reflektierte Strahlen von Linsenoberflächen, Metallflächen usw. in die Augen gelangen. Es besteht die Gefahr der Netzhautzerstörung durch lokal extrem hohe Intensitäten! Der Laserstrahl muss immer in einer Höhe unter ca. 1,2 m gehalten werden! Niemals direkt in einen unaufgeweiteten Laserstrahl blicken!

Hinweise:

- Das Teilungsverhältnis des verwendeten Strahlteilerwürfels hängt in geringem Maße von der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes ab. Der Laser wurde deshalb vorab von der Technischen Assistenz so ausgerichtet, dass er unter 45° linear polarisiertes Licht emittiert. In diesem Fall ist das Teilungsverhältnis etwa 1:1.
- Um zu vernünftigen quantitativen Ergebnissen zu kommen, muss am Eingang des Interferometers eine *ebene Lichtwelle* vorliegen. Eine solche Welle lässt sich mithilfe eines präzise justierten *Strahlaufweitungssystems* herstellen, dessen Funktionsprinzip aus den Versuchen zur Beugung bekannt ist. Seine Justierung erfolgte zusammen mit der Justierung des Lasers vor Versuchsbeginn durch die technische Assistenz. Um die zeitaufwändigen Einstellungen nicht zunichtezumachen, dürfen die Justierschrauben des Lasers und des Strahlaufweitungssystems während des Versuches nicht verstellt werden!
- Alle zum Aufbau des Interferometers verwendeten Bauteile müssen fest montiert sein, damit keine äußeren Störungen (Bodenerschütterungen, Luftbewegungen) auf das Interferometer übertragen werden, die dazu führen, dass die eingestellten Interferenzmuster fluktuieren (die Streifen „wackeln“).
- Aus dem gleichen Grund müssen größere nicht benötigte Komponenten vom Tisch entfernt werden.

3.1 Aufbau und Justage des Interferometers

Zunächst wird das MICHELSON-Interferometer gem. Abb. 3 aufgebaut. Hinter das vorjustierte Aufweitungssystem AW wird die Interferometer-Grundplatte auf die Dreieckschiene aufgesetzt und darauf der Strahlteilerwürfel ST, der Spiegel SP1 und der Spiegel SP2 (Spiegel auf Piezo-Translator)

⁴ Abweichende Dicken sind auf dem Halter notiert.

montiert. Der in einem Arm des Interferometers montierte Drehtisch bleibt zunächst leer. Die Begrenzungsflächen von ST erzeugen trotz Antireflexbeschichtung schwache Lichtreflexe, die auf der Blende B beobachtet werden können. ST wird so justiert, dass diese Reflexe nicht direkt in die Öffnung von B zurücklaufen, sondern etwas außerhalb liegen (Abb. 9). Durch diese bewusste Dejustage wird erreicht, dass die von den Reflexen verursachten parasitären Interferenzerscheinungen das später zu beobachtende Interferenzmuster möglichst wenig stören.

Beide Spiegel werden nacheinander so justiert, dass die von ihnen reflektierten Wellen auf dem Beobachtungsschirm BS an der gleichen Position erscheinen. Gleichzeitig sollen die von den Spiegeln verursachten Reflexe nicht direkt in die Öffnung von B zurücklaufen, sondern ebenfalls etwas außerhalb liegen (s. Abb. 9), um auch hier parasitäre Interferenzerscheinungen zu minimieren. Die Spiegeljustage gelingt am besten, indem die Wellen während der Justage abwechselnd mit einem Stück schwarzer Pappe vorsichtig abgedeckt werden.

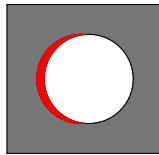


Abb. 9: Blende B (grau) mit darauf sichtbarem Lichtreflex (rot) von der Frontfläche des Strahlteilerwürfels oder einem der Spiegel. Die größte Breite des sichelförmigen Reflexes soll etwa (1 – 2) mm betragen.

Anschließend wird der Beobachtungsschirm BS entfernt und durch die CCD-Kamera ersetzt. Vor die Kamera wird ein Rohr montiert, mit dem Streulicht aus der Umgebung weitgehend abgeschirmt wird. Zur Darstellung des Bildes der Kamera auf dem PC-Monitor wird das aus früheren Versuchen bekannte Matlab-Skript `BildEinlesen.m` verwendet. Die Kameraparameter werden so eingestellt, dass die Intensität des Bildes weder über- noch untersteuert ist. Gegebenenfalls muss ein Neutralfilterrad zur Abschwächung der Intensität des Lasers eingesetzt werden.

Nach diesen Vorbereitungen werden die Spiegel SP1 und SP2 feinjustiert. Ziel ist die Erzeugung eines Interferenzmusters mit etwa 4 - 5 parallelen, horizontal ausgerichteten Interferenzstreifen auf dem Sensor der CCD-Kamera. Nachdem diese Justierung erfolgt ist, wird ein exemplarisches Interferenzstreifenbild gespeichert und dem späteren Versuchsprotokoll beigefügt.

Die Speicherung von Kamerabildern erfolgt grundsätzlich nur im persönlichen Verzeichnis `O:\GPRnn\Name`, wobei „nn“ für die Nummer der Praktikumsgruppe und „Name“ für das persönliche Unterverzeichnis steht.

Hinweis:

Vor dem CCD-Sensor der Kamera befindet sich eine dünne Glasplatte, die den Sensor vor Beschädigungen und Verunreinigungen schützt. An der Vorder- und Rückseite dieser Glasplatte wird ein Teil des einfallenden Lichtes mehrfach reflektiert (siehe FRESNELSche Formeln im Versuch *Polarisation von Licht*). Diese reflektierten Anteile interferieren und sorgen für zusätzliche parasitäre Interferenzerscheinungen. Das beobachtbare Interferenzmuster enthält deshalb gegenüber einem idealen Muster (Abb. 6) eine Reihe von Störungen, die die durchzuführenden Messungen jedoch nicht beeinflussen.

3.2 Interferenzmuster bei Lichtdurchgang durch ein Gasvolumen mit räumlich variierender Brechzahl

Aus einem Gasfeuerzeug wird etwas Gas in einen der Interferometerarme eingelassen, ohne das Gas zu zünden. Das Feuerzeuggas hat eine andere Dichte und Temperatur als die umgebende Luft, wodurch in dem Interferometerarm eine fluktuierende Brechzahlverteilung $n(x,y,z)$ erzeugt wird. Dadurch wird die Wellenfront des durchlaufenden Lichtes verformt (s. Abb. 7), wodurch sich ein Interferenzmuster ähnlich wie in Abb. 2 einstellt. Ein exemplarisches Interferenzmuster wird gespeichert und später dem Versuchsprotokoll beigefügt. Da eine quantitative Auswertung eines solchen Interferenzmusters den Umfang eines Praktikumversuches sprengen würde, ist eine qualitative Analyse ausreichend.

3.3 Messung der Ausdehnung eines Piezo-Translators als Funktion der angelegten elektrischen Spannung (Elektrostriktion)

Die Spiegel des Interferometers werden nun so justiert, dass auf dem Sensor der CCD-Kamera etwa 5 parallele, vertikal ausgerichtete Interferenzstreifen zu sehen sind. Ein Spiegel des Interferometers (SP2) ist auf einem piezoelektrischen Translator (kurz: Piezo-Translator oder Piezo-Aktuator oder Piezo-Aktor) montiert. Dieser Translator enthält einen piezoelektrischen Kristall, der sich als Folge der Elektrostriktion beim Anlegen einer elektrischen Spannung in z -Richtung ausdehnt. Dadurch wird der Spiegel in Richtung des Strahlteilers ST verschoben, die Strecke l_2 (Abb. 3) wird also kürzer und es kommt nach Gl. (17) zu einer Änderung der Phase φ_0 . Wird die Strecke l_2 um $m\lambda/2$ verkürzt ($m \in \mathbb{Z}$), ändert sich der Laufweg der Welle E_2 um $m\lambda$, die Phase φ_0 also um $m2\pi$, denn E_2 durchläuft den Interferometerarm zweimal (in Hin- und Rückrichtung). In diesem Fall sieht das Interferenzmuster auf dem Sensor der CCD-Kamera wieder genauso aus, wie vor dem Spiegelversatz, es ist lediglich um m volle Perioden verschoben. Für alle anderen Änderungen der Strecke l_2 ist das entstehende Interferenzmuster gegenüber der Ausgangssituation parallel verschoben (s. Abb. 6).

Ziel des folgenden Versuches ist es, die Ausdehnung d des Piezo-Translators und damit die Verschiebung des Spiegels SP2 als Funktion der angelegten elektrischen Spannung U zu messen. Dabei wird sich ein Hystereseverhalten der Ausdehnung herausstellen, das auf Polarisierungseffekte im Piezokristall zurückzuführen ist. Eine bestimmte Ausdehnung d_0 des Piezo-Translators wird deshalb bei zwei unterschiedlichen Spannungen U_1 und U_2 erreicht, je nachdem, ob die angelegte Spannung U vorher höher oder niedriger war.⁵

Die Spannung U wird einem Hochspannungsgerät entnommen. U ist negativ und kann im Bereich 0 V bis -1000 V variiert werden. Das Potentiometer zum Einstellen der Spannung wird auf „0“ gestellt, erst danach wird das Gerät eingeschaltet. Anschließend wird im Bild der Image Cursor aktiviert und so positioniert, dass die Lage der Interferenzstreifen relativ zum Cursor gut abgelesen werden kann (Abb. 10).

Die Hochspannung wird nun langsam monoton erniedrigt, wodurch das Interferenzmuster gegenüber dem Image Cursor parallel verschoben wird. Die Spannung U , bei der das Interferenzstreifensystem gerade um einen Streifenabstand (entsprechend einer Phasenänderung von $\Delta\varphi_0 = 1 \times 2\pi$) verschoben wurde, wird notiert. Die zugehörige Spiegelverschiebung ist $d = 1 \times \lambda/2$. Anschließend wird die Spannung weiter *monoton* erniedrigt und der nächste Spannungswert gesucht und notiert, bei dem das Interferenzmuster um einen weiteren Streifenabstand ($\Delta\varphi_0 = 2 \times 2\pi$, $d = 2 \times \lambda/2$) verschoben wurde. Dies wird bei monotoner Spannungserniedrigung so oft wiederholt, bis die minimale Ausgangsspannung von ca. -1000 V erreicht ist.

Danach wird die gleiche Messung in umgekehrter Richtung durchgeführt, d. h. durch monotones Erhöhen der Spannung U werden die Spannungswerte gesucht und notiert, bei denen das Interferenzmuster wiederum um m Streifenabstände (entsprechend $\Delta\varphi_0 = m2\pi$) gegenüber der Ausgangssituation verschoben ist, diesmal jedoch in anderer Richtung.

Anschließend wird d über U aufgetragen und die erhaltene Kurve wird interpretiert.

Frage 2:

- Wie groß ist etwa die maximale Ausdehnung d_{max} , die für den Piezo-Translator erreicht werden kann?
- Welche Spannungsdifferenz ΔU führt in der Umgebung von $U \approx -500$ V bei Spannungserniedrigung zu einer Ausdehnung des Piezo-Translators um λ ?

⁵ Für die durchzuführenden Versuche ist es deshalb erforderlich, innerhalb einer Messreihe die Spannung zunächst nur *monoton zu erniedrigen* und später nur *monoton zu erhöhen*.

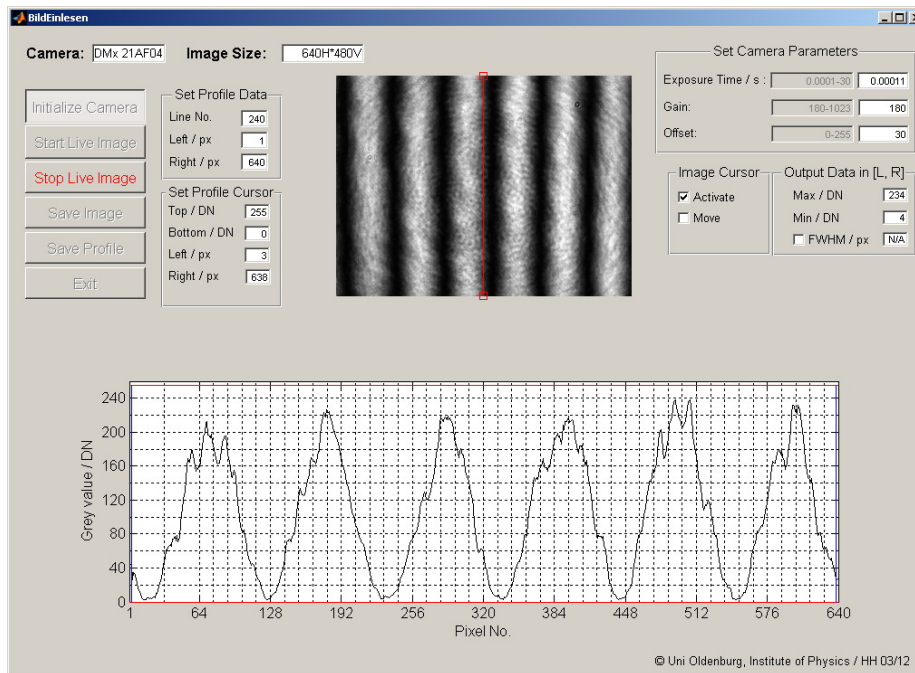


Abb. 10: Interferenzstreifenmuster mit aktiviertem Image Cursor.

3.4 Messung der Brechzahl eines Glases

Gemäß der Erläuterungen in Kap. 2.4 wird eine planparallele Glasplatte der Dicke d in einer verstellbaren Halterung auf einem Drehtisch (Abb. 11) in den Arm des Interferometers eingebracht, in dem sich der Spiegel SP2 befindet.

Die Glasplatte muss zunächst so ausgerichtet werden, dass $\alpha = 0^\circ$ ist⁶. Diese Justage muss sehr sorgfältig erfolgen, um später zu guten Ergebnissen zu kommen. Folgende Schritte sind dazu erforderlich:

- Glasplatte zunächst außerhalb des Interferometers belassen.
- Spiegel SP1 mit Pappe abdecken.
- Blende B auf kleinsten Durchmesser einstellen; Reflex vom Spiegel SP2 im Kamerabild beobachten. Kamera so justieren, dass der Reflex in der Bildmitte erscheint. Horizontale Mittenposition des Reflexes mit dem vertikalen Image Cursor markieren (Abb. 12 links).
- Glasplatte in verstellbarer Halterung in Drehtisch einsetzen. Fein-Verstellschraube am Drehtisch (Abb. 11) in die Skalenposition „0“ bringen⁷ (mit Fingerspitzengefühl!), Feststellschraube des Drehtisches lösen.
- Spiegel SP2 ebenfalls mit Pappe abdecken und den Reflex von der Glasplatte auf dem Kamerabild beobachten. Da der Reflex sehr lichtschwach ist, muss die Belichtungszeit der Kamera erhöht und am Graufilterrad der Filter kleinster optischer Dichte eingestellt werden.
- Grundplatte des Drehtisches so drehen und Halterung der Glasplatte so justieren, dass der Reflex von der Glasplatte mittig um den Image Cursor liegt (Abb. 12 rechts).
- Feststellschraube am Drehtisch fixieren.
- Pappentfernen, Belichtungszeit und Neutralfilterrad wieder passend einstellen.

Nach dieser Justage gilt für die Stellung der Glasplatte:

$$(32) \quad \alpha = \alpha_0 := 0^\circ$$

⁶ Bei der Justage des Interferometers wird der Spiegel SP2 leicht verkippt. Fällt demnach die von ST kommende Lichtwelle unter dem Winkel $\alpha = 0^\circ$ auf die Glasplatte, so trifft das aufgrund der Verkipfung für die von SP2 reflektierte Lichtwelle nicht zu. Dieser Effekt hat jedoch nur so geringe Auswirkungen, dass er hier vernachlässigt werden kann.

⁷ Dazu dreht man die Fein-Verstellschraube *im Uhrzeigersinn* etwas über die Skalenposition „0“ hinaus und dreht sie dann *gegen den Uhrzeigersinn* auf den Wert „0“ zurück. Dadurch eliminiert man den Einfluss des „Spiels“ der Gewindestindel.

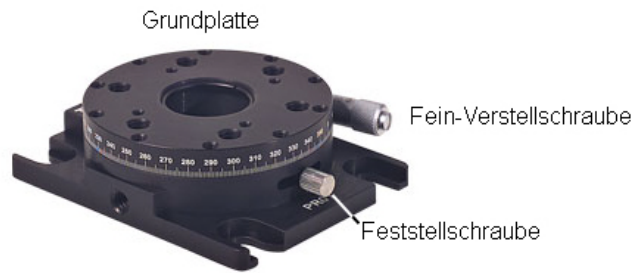


Abb. 11: Drehtisch THORLABS PR01/M

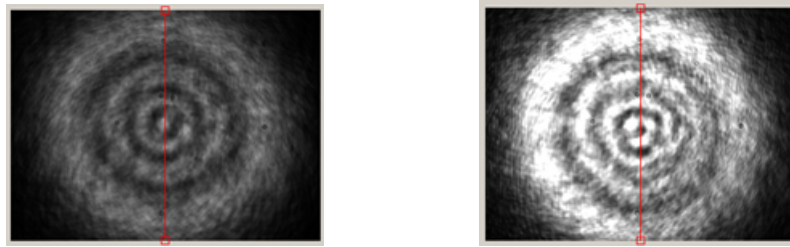


Abb. 12: *Links*: Zentriert ausgerichteter Reflex vom Spiegels SP2 bei maximal geschlossener Blende B und abgedecktem Spiegel SP1. Rote Linie: Image Cursor durch die horizontale Bildmitte.
Rechts: Reflex von der Glasplatte bei maximal geschlossener Blende B und abgedeckten Spiegeln SP1 und SP2. Die Glasplatte wird so justiert, dass der Reflex mittig zum Image Cursor liegt.

Wie beim Versuch 3.2 wird der Spiegel SP1 (nur der!) so justiert, dass etwa 5 vertikal ausgerichtete, parallele Interferenzstreifen auf dem Sensor der CCD-Kamera zu sehen sind.

Anschließend wird der Drehtisch mithilfe der *gegen den Uhrzeigersinn* gedrehten Fein-Verstellschraube vorsichtig soweit gedreht, bis sich das Interferenzmuster um einen Streifenabstand seitlich verschoben hat. Dies entspricht wiederum einer Phasenänderung von $\Delta\varphi_G = 1 \times 2\pi$. Der zugehörige Einfallswinkel α_1 errechnet sich aus dem Verstellweg s an der Fein-Verstellschraube und dem wirksamen Radius r des Drehtisches nach

$$(33) \quad \alpha_1 = \arctan\left(\frac{s}{r}\right)$$

Der Verstellweg s ergibt sich aus den abgelesenen Skalenteilen SKT an der Fein-Verstellschraube. Unter Berücksichtigung von deren Gewindesteigung⁸ und der Skalenteilung⁹ folgt:

$$(34) \quad s = 2,54 \text{ mm} \times SKT$$

Der wirksame Radius des Drehtisches ist (Fehler vernachlässigbar):

$$(35) \quad r = 36,32 \text{ mm}.$$

Durch Weiterdrehen des Tisches bis zur Phasendifferenz $\Delta\varphi_G = 2 \times 2\pi$ erhält man die Winkelposition α_2 , durch Weiterdrehen bis zur Phasendifferenz $\Delta\varphi_G = 3 \times 2\pi$ die Winkelposition α_3 usw. Die Messung wird bis zum Winkel α_5 durchgeführt. Da der Winkelzuwachs pro Phasenänderung um 2π mit zunehmendem Winkel α immer kleiner wird, werden anschließend weitere acht bis zehn Werte für α aufgenommen ($\alpha_6 - \alpha_{15}$), für die das Interferenzstreifensystem um jeweils zwei Streifenabstände verschoben wurde, die Phasendifferenz also um jeweils 4π zugenommen hat.

Schließlich wird $\Delta\varphi_G(\alpha_i) = -m \cdot 2\pi$ (siehe ¹⁰) über α_i ($m \in \mathbb{N}$) aufgetragen und durch einen nichtlinearen Funktionsfit mit der Zielfunktion aus Gl. (31) die Brechzahl n_G bestimmt.

⁸ Die Gewindesteigung beträgt 0,635 mm pro Umdrehung, Fehler vernachlässigbar. 1 Umdrehung entspricht 0,25 SKT .

⁹ 1 Umdrehung ist unterteilt in 25 Teilstriche. 1 Teilstrich entspricht 0,01 SKT .

¹⁰ Das Minuszeichen rührt daher, dass die Lichtgeschwindigkeit in Glas kleiner ist als in Luft. $\Delta\varphi_G$ ist demnach eine Phasenverzögerung (s. Gl. (31)).