

## Erzwungene mechanische Schwingungen

### Stichworte:

HOOKEsches Gesetz, harmonische Schwingung, harmonischer Oszillator, Eigenfrequenz, gedämpfter harmonischer Oszillator, Resonanz, Amplitudenresonanz, Energieresonanz, Resonanzkurven.

### Messprogramm:

Messung der Amplitudenresonanzkurve und der Phasenkurve für starke und schwache Dämpfung.

### Literatur:

- /1/ DEMTRÖDER, W.: „Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme“, Springer-Verlag, Berlin u.a.  
 /2/ TIPLER, P. A.: „Physik“, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u.a.

## 1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist es, an einem einfachen mechanischen Modell die Eigenschaften eines so genannten „harmonischen Oszillators“ zu studieren. Solche harmonischen Oszillatoren werden uns in verschiedenen Teilgebieten der Physik wieder begegnen, so z.B. in der Elektrodynamik (siehe Versuch „*Elektromagnetischer Schwingkreis*“) und der Atomphysik. Auf das Verständnis dieses Versuches, insbesondere die Bedeutung der Amplitudenresonanz- und Phasenkurven sollte daher größter Wert gelegt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Wir betrachten eine Anordnung gem. Abb. 1, bei der eine Kugel der Masse  $m_K$  vertikal ( $x$ -Richtung) an einer Feder aufgehängt ist. Reibungseffekte seien zunächst vernachlässigt. In der Ruhelage der Kugel herrscht Gleichgewicht zwischen der nach unten gerichteten Gewichtskraft und der nach oben gerichteten rücktreibenden Federkraft; der Kugelmittelpunkt befinde sich dann in der Stellung  $x = 0$ . Eine Auslenkung der Kugel um  $x$  aus der Gleichgewichtslage führt zu einer zu  $x$  proportionalen rücktreibenden Federkraft  $F_R$ , die  $x$  entgegen gerichtet ist:

$$(1) \quad F_R \sim -x$$

Bezeichnen wir die Proportionalitätskonstante (*Elastizitäts- oder Federkonstante* oder *Richtgröße*) mit  $D$ , so wird aus Gl. (1) das bekannte HOOKEsche Gesetz<sup>1</sup>:

$$(2) \quad F_R = -D x$$

Nach dem Auslenken und Loslassen der Kugel führt die rücktreibende Kraft zu einer Beschleunigung  $a$  der Kugel. Nach dem *zweiten NEWTONschen Gesetz* :

$$(3) \quad F_R = m_K a$$

folgt daher in Kombination mit Gl. (2):

$$(4) \quad m_K a = m_K \frac{d^2 x}{dt^2} = m_K \ddot{x} = -D x \quad (t: \text{Zeit})$$

wobei die drei linken Terme lediglich verschiedene Schreibweisen des Zusammenhangs Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung darstellen.

---

<sup>1</sup> ROBERT HOOKE (1635 – 1703)

Gl. (4) ist die wichtige Differentialgleichung (DGL, auch *Bewegungsgleichung* genannt), mit der alle Systeme beschrieben werden können, die auf eine Auslenkung aus der Ruhe- oder Gleichgewichtslage mit einer rücktreibenden Kraft reagieren, die proportional zur Größe der Auslenkung ist. Solche Systeme werden uns in den verschiedenen Gebieten der Physik immer wieder begegnen.

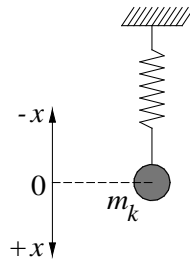


Abb. 1: Masse/Feder-System.

Uns interessiert, welche Bewegung die Kugel ausführt, wenn sie einmal aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen wird, wobei die Anfangsgeschwindigkeit  $v$  der Kugel zum Zeitpunkt des Loslassens null sein möge. Wir suchen also die Funktion  $x(t)$ , die eine Lösung der Differentialgleichung (4) unter der Bedingung  $v(t=0) = 0$  ist. Für die Funktion muss gelten, dass sie, bis auf Vorfaktoren, gleich ihrer zweiten zeitlichen Ableitung sein muss. Wir versuchen deshalb die Lösung mit einer Funktion  $x(t)$ , die eine so genannte *harmonische Schwingung* (*harmonische Oszillation*) beschreibt:

$$(5) \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Dabei ist  $x_0$  die *Amplitude*,  $(\omega t + \varphi)$  die *Phase*,  $\varphi$  die *Anfangsphase* und  $\omega$  die *Eigenkreisfrequenz* der Schwingung (vgl. Abb. 2). Durch Einsetzen von Gl. (5) in Gl. (4) und Ausführung der zweimaligen Differentiation nach der Zeit  $t$  erhalten wir:

$$(6) \quad -m_K \omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) = -D x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Daraus folgt der Wert für  $\omega$ , für den Gl. (5) eine Lösung von Gl. (4) ist:

$$(7) \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m_K}} := \omega_0$$

Die Kugel führt demnach nach dem Loslassen Schwingungen mit der *Eigenkreisfrequenz*  $\omega_0$  durch. Da wir Reibungsfreiheit vorausgesetzt hatten, bleibt die Amplitude  $x_0$  der Schwingung konstant. Sowohl  $x_0$  als auch die Anfangsphase  $\varphi$  sind freie Parameter, die so gewählt werden müssen, dass Gl. (5) dem zu beschreibenden Vorgang „angepasst“ ist, d.h. dass Gl. (5) die beobachtete Bewegung mit richtiger Amplitude und Anfangsphase wiedergibt.

Gleichung (7) gilt nur für den Fall, dass die Masse der Feder,  $m_F$ , gegenüber der Masse  $m_K$  der Kugel vernachlässigbar ist. Ist dies nicht der Fall, so müssen wir berücksichtigen, dass nach dem Auslenken und Loslassen der Feder deren einzelne Massenelemente ebenfalls mitschwingen. Die Schwingungsamplitude dieser Massenelemente ist jedoch unterschiedlich: sie nimmt vom Wert null am Aufhängepunkt der Feder bis auf den Wert  $x_0$  am Ende der Feder zu. Eine genaue Rechnung<sup>2</sup> zeigt, dass das Mitschwingen der einzelnen Massenelemente mit unterschiedlicher Amplitude gleichbedeutend ist mit dem Mitschwingen eines Drittels der gesamten Federmasse mit der Amplitude  $x_0$ . Die korrekte Gleichung für die Eigenkreisfrequenz der Feder lautet daher:

<sup>2</sup> Siehe z.B. ALONSO, M., FINN, E. J.: „Fundamental University Physics, Vol. 1: Mechanics“, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Mass.) u.a.

$$(8) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_K + \frac{1}{3}m_F}} := \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{mit } m := m_K + \frac{1}{3}m_F$$

Im durchzuführenden Versuch ist die Kugel nicht direkt an der Feder befestigt, sondern mit Hilfe einer Stange  $S_2$ , an der sich außerdem eine Reflektorplatte  $R$  befindet (Abb. 8). In diesem Fall muss  $m_K$  in Gl. (8) durch die Gesamtmasse

$$(9) \quad m_G = m_K + m_S + m_R$$

ersetzt werden, wobei  $m_S$  und  $m_R$  die Massen von  $S_2$  und  $R$  sind.

Ein Beispiel soll die dargestellten Zusammenhänge verdeutlichen. Wir betrachten gem. Abb. 1 eine Kugel der Masse  $m_K = 0,11$  kg, die mit Stange und Reflektorplatte ( $m_S + m_R = 0,07$  kg) an einer Feder mit der Federkonstanten  $D = 28$  kg/s<sup>2</sup> und der Masse  $m_F = 0,02$  kg hängt. Die Kugel wird um eine Strecke  $x_0 = 0,05$  m nach unten aus der Ruhelage ausgelenkt. Anschließend lassen wir die Kugel los, woraufhin sie Schwingungen mit der Amplitude  $x_0$  und der Eigenfrequenz  $f_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 1,9$  Hz durchführt (Gl. (8)). Beginnen wir mit der Aufzeichnung der Bewegung  $x(t)$  der Kugel zu einem Zeitpunkt, bei der die Kugel gerade ihren Maximalausschlag nach oben erreicht hat, so „beginnt“ der Cosinus gem. Gl. (5) bei einer Anfangsphase von  $\varphi = \pi = 180^\circ$  (Vorzeichenfestlegung von  $x$  in Abb. 1 beachten!). Diese Situation ist in Abb. 2 dargestellt.

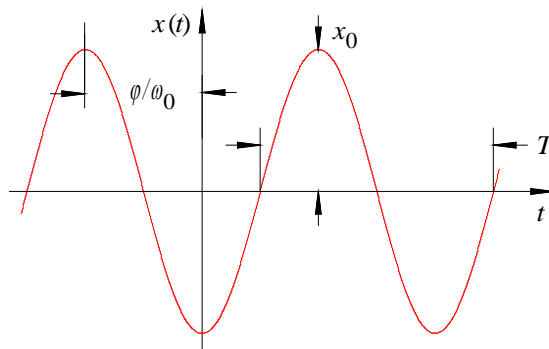


Abb. 2: Zur Definition von Amplitude  $x_0$ , Periodendauer  $T = 2\pi/\omega_0$  und Anfangsphase  $\varphi$  einer harmonischen Schwingung. Zur Darstellung der Phase  $\varphi$  auf der  $t$ -Achse muss sie durch  $\omega_0$  dividiert werden.

Ein System wie die betrachtete Anordnung (auch *Masse/Feder-System* genannt), das harmonische Schwingungen ausführt, heißt *harmonischer Oszillator*. Kennzeichen eines harmonischen Oszillators ist eine zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft, die auf eine typische Bewegungsgleichung der Form (4) mit einer Lösung der Form (5) führt. Ebenso kennzeichnend für den harmonischen Oszillator ist der *parabolische* Verlauf seiner *potentiellen Energie*  $E_p$  als Funktion des Ortes (Abb. 3):

$$(10) \quad E_p = \frac{1}{2} D x^2$$

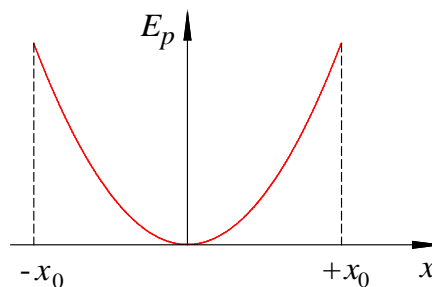


Abb. 3: Verlauf der potentiellen Energie  $E_p$  als Funktion der Auslenkung  $x$  beim harmonischen Oszillator.

## 2.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Wir betrachten nun den realistischeren Fall eines Masse/Feder-Systems unter dem Einfluss von Reibung. Wir werden von dem einfachen Fall ausgehen, dass in dem System zusätzlich zur rücktreibenden Kraft  $F_R = -Dx$  eine zur Geschwindigkeit  $v$  proportionale Reibungskraft  $F_b$  wirkt, für die wir schreiben können:

$$(11) \quad F_b = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

Dabei ist  $b$  eine *Reibungskonstante*, die die Stärke der Reibung angibt.

### Frage 1:

- Welche Einheit hat  $b$ ? Warum steht in Gl. (11) ein Minuszeichen?

In diesem Fall nimmt die Bewegungsgleichung (4) die Form an:

$$(12) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - b \frac{dx}{dt}$$

Üblicherweise wird diese Differentialgleichung in der Form:

$$(13) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = 0$$

geschrieben. Auch hier interessiert uns wieder, welche Bewegung die Kugel durchführt, wenn sie *einmal* aus der Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird, wobei die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt des Loslassens wieder Null sein möge. Wir suchen also wiederum die Funktion  $x(t)$ , die die Differentialgleichung (13) unter der Voraussetzung  $v(t=0) = 0$  löst. Da wir hier als Folge der Dämpfung eine mit der Zeit abnehmende Amplitude der Schwingung erwarten, versuchen wir einen Lösungsansatz, bei dem die Amplitude exponentiell mit der Zeit abfällt (vgl. Abb. 4):

$$(14) \quad x = x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (\alpha : \text{Dämpfungskonstante})$$

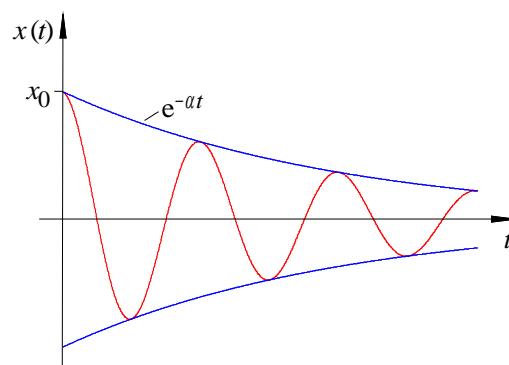


Abb. 4: Gedämpfte harmonische Schwingung.

Wir setzen Gl. (14) in Gl. (13) ein, führen die Differentiationen aus und finden, dass Gl. (14) dann eine Lösung von Gl. (13) darstellt, wenn für die Parameter  $\alpha$  und  $\omega$  gilt:

$$(15) \quad \alpha = \frac{b}{2m} \quad \text{und}$$

$$(16) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun interpretieren. Zunächst halten wir fest, dass die Amplitude der Schwingung umso schneller abfällt, je größer die *Dämpfungskonstante* (der *Abklingkoeffizient*)  $\alpha$  ist. Bei gleich bleibender Masse bedeutet das gem. Gl. (15), dass die Schwingung umso rascher an Amplitude verliert, je größer die Reibungskonstante  $b$  ist - das ist plausibel.

Aus Gl. (16) können wir ablesen, wie sich die Kreisfrequenz  $\omega$  dieser gedämpften harmonischen Schwingung mit der Reibungskonstanten  $b$  ändert. Wir betrachten folgende unterschiedliche Fälle:

$$(i) \quad b = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \omega_0$$

Im Falle verschwindender Reibung ( $b = 0$ ) liegt der in Kap. 2.1 diskutierte Fall des ungedämpften harmonischen Oszillators vor. Die Kugel führt eine *periodische Schwingung* mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  durch.

$$(ii) \quad (b/(2m))^2 = \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega = 0$$

Dies ist der Fall so genannter „kritischer Dämpfung“, bei dem die Kugel gerade keine periodische Schwingung mehr durchführt, er heißt deshalb *aperiodischer Grenzfall*. Die Kugel kehrt lediglich längs einer exponentiellen Bahn in ihre Ausgangslage zurück (s. Anmerkung).

$$(iii) \quad (b/(2m))^2 > \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega \text{ imaginär}$$

In diesem Fall so genannter „überkritischer Dämpfung“ gibt es ebenfalls keine periodische Schwingung, er heißt *aperiodischer Fall* oder *Kriechfall*. Die Kugel kehrt auch hier lediglich in ihre Ausgangslage zurück, allerdings mit zusätzlicher Dämpfung, d.h. langsamer (s. Anmerkung).

$$(iv) \quad 0 < b < 2m\omega_0 \quad \rightarrow \quad \omega < \omega_0$$

Dieser allgemeinste Fall, der so genannte *Schwingfall*, führt zu einer periodischen Schwingung mit einer Kreisfrequenz  $\omega$  nach Gl. (16), die etwas kleiner ist als die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften harmonischen Oszillators.

#### **Anmerkung:**

Unter den hier diskutierten Bedingungen ( $v(t=0) = 0$ ) gibt es keinen wesentlichen Unterschied zwischen dem *aperiodischen Grenzfall* und dem *aperiodischen Fall* oder *Kriechfall*: In beiden Fällen kehrt die Kugel längs einer exponentiellen Bahn in ihre Ausgangslage zurück; beim Kriechfall gibt es lediglich eine höhere Dämpfung. Anders ist die Situation im Fall  $v(t=0) \neq 0$ . Lassen wir nämlich die Kugel nicht einfach los, sondern geben wir ihr zusätzlich durch Anstoßen eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit, so ist es beim *aperiodischen Grenzfall* möglich, dass die Kugel einmal über ihre Ruhelage hinweg schwingt und erst danach längs einer exponentiellen Bahn in die Ruhelage zurückkehrt. Beim Kriechfall dagegen findet ein solches Überschwingen nicht statt. Die Kugel kehrt hier immer nur längs einer exponentiellen Bahn in ihre Ruhelage zurück. Eine detaillierte Rechnung (Lösung der DGL (13) unter den Bedingungen (ii) und (iii)) bestätigt diese Zusammenhänge.

### **2.3 Erzwungene harmonische Schwingungen**

In Kap. 2.1 und 2.2 haben wir jeweils betrachtet, wie sich die Kugel bewegt, wenn wir sie *einmal* aus der Ruhelage auslenken und dann loslassen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Bewegung die Kugel durchführt, wenn das System einer sich *periodisch* ändernden, externen Kraft  $F_e$  ausgesetzt ist (Abb. 5), für die gelten möge:

$$(17) \quad F_e = F_1 \sin(\omega_1 t)$$

$F_1$  ist die Amplitude der externen Kraft und  $\omega_1$  ihre Kreisfrequenz. Das Vorzeichen wählen wir so, dass nach unten gerichtete Kräfte positiv und nach oben gerichtete Kräfte negativ gezählt werden.

Die externe Kraft  $F_e$  wirkt zusätzlich auf die Feder. Die Bewegungsgleichung nimmt daher die Form an (s. Gl. (12) und (13)):

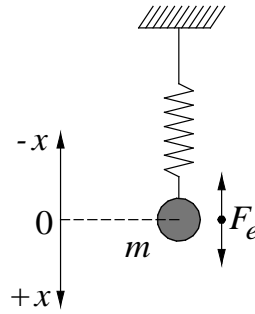


Abb. 5: Anregung eines Masse/Feder-Systems mit externer Kraft  $F_e$ .  $m$  ist die Masse gem. Gl. (8) und (9).

$$(18) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D x - b \frac{dx}{dt} + F_e$$

und damit

$$(19) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = \frac{1}{m} F_1 \sin(\omega_1 t)$$

Wir erwarten, dass die Bewegung der Kugel nach einer gewissen *Einschwingzeit*, d.h. nach Beendigung des *Einschwingvorgangs*, mit der gleichen Frequenz erfolgt wie die Änderung der externen Kraft. Für eine andere Frequenz gäbe es keine plausible Erklärung. Allerdings ist eine *Phasenverschiebung*  $\phi$  zwischen der anregenden Kraft und der Auslenkung der Kugel denkbar. Schließlich können wir davon ausgehen, dass nach Beendigung des Einschwingvorgangs die Schwingungsamplitude konstant bleibt, da dem System von außen immer wieder neue Energie zugeführt wird. Mit diesen Überlegungen versuchen wir folgenden Lösungsansatz für die Differentialgleichung (19):

$$(20) \quad x = x_0 \sin(\omega_1 t + \phi)$$

Dabei ist  $\phi$  die Phasenverschiebung zwischen der Auslenkung  $x(t)$  und der externen Kraft  $F_e$ . Für  $\phi < 0$  hinkt die Auslenkung der anregenden Kraft hinterher. Durch Einsetzen von Gl. (20) in Gl. (19) finden wir, dass Gl. (20) dann eine Lösung von Gl. (19) darstellt, wenn für die Amplitude  $x_0$  und die Phasenverschiebung  $\phi$  gilt (Herleitung s. Anhang Kap. 4):

$$(21) \quad x_0 = \frac{\frac{F_1}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

$$(22) \quad \phi = \arctan \left( \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\frac{\omega_1 b}{m}} \right) - \frac{\pi}{2}$$

Im Gegensatz zu den in Kap. 2.1 und 2.2 diskutierten Fällen sind die Amplitude  $x_0$  und die Phase  $\phi$  hier nicht mehr frei wählbare Parameter, sondern durch die Größen  $F_1$ ,  $\omega_1$ ,  $m$ ,  $b$  und  $\omega_0^2 = D/m$  eindeutig bestimmt.

Aus Gleichung (21) sehen wir, dass die Amplitude der Kugelschwingung, die so genannte *Resonanzamplitude*, von der Frequenz der anregenden Kraft abhängt. Tragen wir  $x_0$  über  $\omega_1$  auf, so erhalten wir die so genannte *Amplitudenresonanzkurve*. Abb. 6 (oben) zeigt einige typische Amplitudenresonanzkurven für

unterschiedliche Werte der Reibungskonstanten  $b$ . Im stationären Fall, d.h. für  $\omega_1 = 0$ , ergibt sich aus Gl. (21) die aus dem HOOKEschen Gesetz bekannte Amplitude

$$(23) \quad x_0(\omega_1 = 0) := x_{00} = \frac{F_1}{D}$$

Dies ist der Betrag, um den die Kugel ausgelenkt wird, wenn an ihr eine konstante Kraft  $F_1$  angreift. Setzt man  $F_1$  aus Gl. (23) in Gl. (21) ein, so erhält man für die Resonanzamplitude  $x_0$ :

$$(24) \quad x_0 = \frac{x_{00} D}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

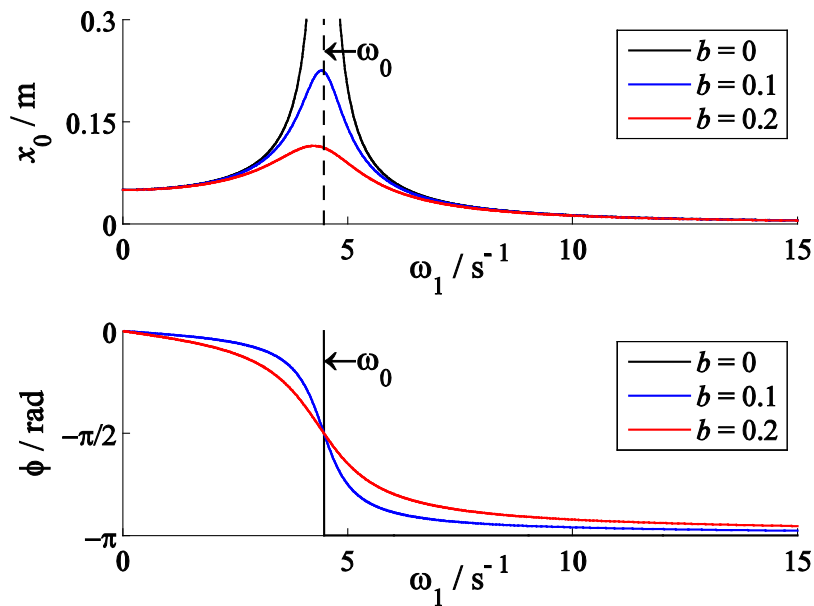


Abb. 6: Amplitudenresonanzkurven (oben) und Phasenkurven (unten) für einen gedämpften harmonischen Oszillator ( $F_1 = 0,1 \text{ N}$ ,  $m = 0,1 \text{ kg}$ ,  $D = 2 \text{ kg/s}^2$ ,  $b$  in  $\text{kg/s}$ ).

Die Lage des Maximums von  $x_0$  als Funktion von  $\omega_1$  finden wir aus der Bedingung  $dx_0/d\omega_1 = 0$ . Aus Gl. (24) folgt dann:

$$(25) \quad x_0 = x_{0,\max} \quad \text{für} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

Das Maximum der Amplitudenresonanzkurve liegt also außer im Fall  $b = 0$  *nicht* bei der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ , sondern bei etwas kleineren Kreisfrequenzen  $\omega_1 < \omega_0$ .

Im unteren Teil von Abb. 6 sind die so genannten *Phasenkurven* dargestellt, die den Verlauf der Phasenverschiebung  $\phi$  als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega_1$  angeben. Aus Gl. (22) folgt, dass  $\phi$  immer *negativ* ist, d.h. die Kugelauslenkung *hinkt* der anregenden Kraft außer im Fall  $\omega_1 = 0$  immer *hinterher*.

Wir wollen nun noch einige Spezialfälle diskutieren:

- (i) Im Falle  $\omega_1 \ll \omega_0$  ist bei „nicht zu großem“  $b$  die Amplitude  $x_0 \approx F_1/D$ , d.h. unabhängig von  $b$ . Die Amplitudenresonanzkurve verläuft dann im Bereich kleiner Anregungsfrequenzen annähernd horizontal und die Phasenverschiebung  $\phi$  geht gegen 0:  $\phi \approx 0^\circ$ . Die Kugelbewegung folgt also nahezu direkt der anregenden Kraft.

(ii) Im *Resonanzfall* ( $\omega_1$  gem. Gl. (25)) ist die Amplitude maximal und gegeben durch:

$$x_{0,\max} = \frac{F_1}{b\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

Je kleiner  $b$ , desto größer wird  $x_{0,\max}$ ; für  $b \rightarrow 0$  geht  $x_{0,\max} \rightarrow \infty$ . Die Kugelauslenkung hinkt in diesem Fall der anregenden Kraft um  $90^\circ$  hinterher ( $\phi = -\pi/2$ ).

(iii) Im Falle  $\omega_1 \gg \omega_0$  ist  $x_0 \approx F_1/(m\omega_1^2)$ , die Amplitude sinkt also mit  $1/\omega_1^2$ . Die Phasenverschiebung beträgt in diesem Fall  $\phi = -\pi$ , d.h. die Kugelauslenkung hinkt der anregenden Kraft um  $180^\circ$  hinterher.

Aus den Amplitudenresonanzkurven und den unter (i) - (iii) diskutierten Spezialfällen lässt sich das *Dämpfungsverhalten* eines *Masse-Feder-Systems* ablesen, beispielsweise eines schwingungs isolierten Tisches, wie er in optischen Präzisionsexperimenten häufig eingesetzt wird. Die Eigenfrequenzen solcher Tische liegen typischerweise im Bereich um 1 Hz. Hat eine externe Störung (z.B. Gebäudeschwingung) eine sehr niedrige Frequenzen ( $\omega_1 \rightarrow 0$ ), wird die Amplitude der Störung ungedämpft auf den Tisch übertragen, in der Umgebung der Eigenkreisfrequenz ( $\omega_1 \approx \omega_0$ ) wird sie (ungewollt) verstärkt, aber im Bereich höherer Frequenzen ( $\omega_1 \gg \omega_0$ ) wird sie stark gedämpft.

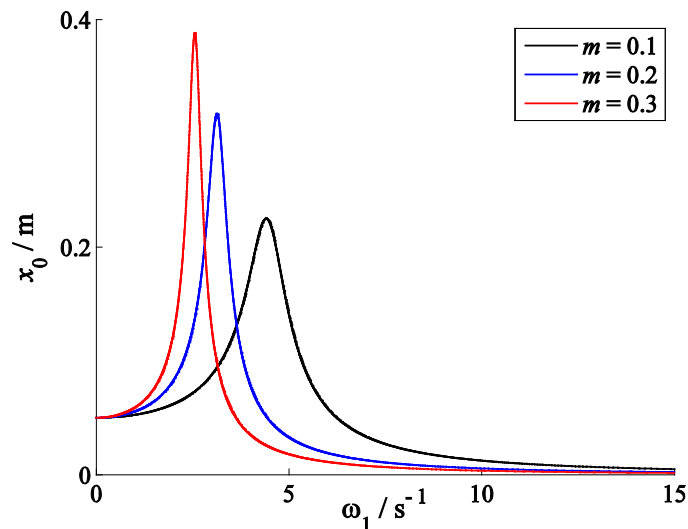


Abb. 7: Amplitudenresonanzkurven für verschiedene Massen  $m$  (in kg) bei gleichen übrigen Parametern ( $F_1 = 0,1$  N,  $D = 2$  kg/s<sup>2</sup>,  $b = 0,1$  kg/s).

Durch Änderung der Masse  $m$  lässt sich das Dämpfungsverhalten eines solchen Systems beeinflussen. Abb. 7 zeigt, dass durch eine Vergrößerung von  $m$  bei gleichen übrigen Parametern die Eigenkreisfrequenz erniedrigt und die Dämpfung für Frequenzen oberhalb der Eigenkreisfrequenz deutlich vergrößert werden kann. Schwingungs isolierte Tische haben deshalb oftmals große Massen im Bereich  $10^3$  kg.

Abschließend wollen wir überlegen, bei welcher Frequenz der maximale *Energieübertrag* vom anregenden System auf das schwingende System stattfindet. Da wir wissen, dass maximale kinetische Energie gleichbedeutend ist mit maximaler Geschwindigkeit, berechnen wir zunächst den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit  $v$  der Kugel unter Benutzung von Gl. (20):

$$(26) \quad v = \frac{dx}{dt} = \omega_1 x_0 \cos(\omega_1 t + \phi) := v_0 \cos(\omega_1 t + \phi)$$

Für die Geschwindigkeit  $v_0$  gilt demnach mit Gl. (24):



$$(27) \quad v_0 = \omega_1 x_0 = \frac{\omega_1 x_{00} D}{m \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}}$$

und damit:

$$(28) \quad v_0 = \frac{x_{00} D}{\sqrt{\left(m \omega_1 - \frac{D}{\omega_1}\right)^2 + b^2}}$$

$v_0$  wird maximal, wenn der Nenner aus Gl. (28) minimal wird, d.h. wenn gilt (für  $b \neq 0$ ):

$$(29) \quad m \omega_1 - \frac{D}{\omega_1} = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 = v_{0,\max}$$

Daraus folgt:

$$(30) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = v_{0,\max}$$

Die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie wird demnach dann maximal (anders als die Resonanzamplitude!), wenn das System mit seiner Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  angeregt wird. Man nennt diesen Fall daher auch den Fall der *Energieresonanz*, bei dem das anregende System die maximale Energie auf das schwingende System übertragen kann.

### 3 Versuchsdurchführung

#### Zubehör:

Feder ( $D = (22,7 \pm 0,5) \text{ kg/s}^2$ ,  $m_F = (0,0575 \pm 10^{-4}) \text{ kg}$ ), Kugel an Aufhängestange mit Reflektorplatte ( $m_G$  auswiegen), Anregungssystem an Stativ mit Motor und Lichtschranke, elektronische Drehzahlregelung für Motor, Laserdistanzsensor (Typ BAUMER OADM 12U6460/S35, Messbereich (16 - 120) mm), Netzteile (PHYWE (0 - 15 / 0 - 30) V) für Motor, Lichtschranke und Laserdistanzsensor, 2 Gläser mit unterschiedlicher Glycerin/Wassermischung ( $b \approx 0,7 \text{ kg/s}$  für die zähere Mischung bei  $T = 20^\circ \text{ C}$ ), Tisch zur Aufnahme der Gläser, Digital-Oszilloskop TEKTRONIX TDS 1012 / 1012B / 2012C / TBS 1102B.

#### 3.1 Beschreibung der Versuchsanordnung

Die Versuche werden an einer Anordnung gem. Abb. 8 durchgeführt. Sie ermöglicht die berührungslose Messung von *Amplitudenresonanzkurven* und *Phasenkurven*. Wir wollen zunächst die Versuchsanordnung beschreiben, bevor in Kap. 3.2 die eigentlichen Messaufgaben dargestellt werden.

An einer Feder ist mit Hilfe einer Stange  $S_2$  eine Kugel  $K$  der Masse  $m_K$  aufgehängt, die zur Dämpfung ihrer Bewegung in einen Glasbehälter  $B$  eintaucht, der mit einer Glycerin/Wassermischung gefüllt ist. An der Stange ist eine Reflektorscheibe  $R$  befestigt. Auf diese Scheibe trifft ein Laserstrahl aus einem Laserdistanzsensor  $LDS$ , dessen Funktionsweise aus dem Versuch „Sensoren...“ bekannt ist. Der Sensor liefert ein Spannungssignal  $U_{LDS}(t)$ , das sich mit der Entfernung  $s$  zwischen  $LDS$  und  $R$  linear ändert.

Die Feder ist mit einer zweiten Stange  $S_1$ , die in einer Stangenführung  $F$  läuft, über ein Gelenk  $G_1$  mit einer Pleuelstange  $P$  verbunden, die wiederum über ein Gelenk  $G_2$  auf einer Drehscheibe  $D$  befestigt ist. Mit einem Antriebsmotor kann die Scheibe mit der Kreisfrequenz  $\omega_1$  gedreht werden. Dadurch wird der Aufhängepunkt der Feder in eine periodische Vertikalbewegung versetzt und somit auf die Feder eine periodische Kraft  $F_e(t)$  ausgeübt. Nach Beendigung des Einschwingvorgangs führt die Kugel zusammen mit  $S_2$  und  $R$  ebenfalls eine periodische Vertikalbewegung mit der Amplitude  $x_0$  aus. Der Laserdistanzsensor liefert dann ein periodisches Spannungssignal  $U_{LDS}(t)$  mit der Amplitude  $U_0 \sim x_0$  und einem Gleichanteil  $U_{DC}$ , der vom Abstand  $s$  zwischen  $LDS$  und  $R$  in der Ruhelage der Kugel abhängt. Die Periodendauer  $T$  von  $U_{LDS}$  ist gegeben durch:

$$(31) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Durch Variation von  $\omega_1$  lässt sich somit die Amplitudenresonanzkurve  $U_0(\omega_1)$  messen, aus der mit Hilfe des Kalibrierfaktors  $k$  des Laserdistanzsensors für Spannungsdifferenzen,

$$(32) \quad k = 0,0962 \text{ V/mm}$$

die gesuchte Amplitudenresonanzkurve  $x_0(\omega_1)$  gewonnen werden kann.  $k$  kann als fehlerfrei angenommen werden.

Die Messung der Phasenkurve, d.h. der Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen der Anregungskraft  $F_e(t)$  und der Auslenkung  $x(t)$  der Kugel als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega_1$  lässt sich folgendermaßen durchführen:

Mit Hilfe eines Markierungsstiftes M sowie der Lichtschranke LS, die von M unterbrochen wird, wird immer dann ein Spannungsimpuls  $U_{LS}(t)$  erzeugt, wenn der Aufhängepunkt der Feder seine oberste Position erreicht hat (Zeitpunkt  $t_1$  in Abb. 9).

Zu diesem Zeitpunkt hat die Anregungskraft  $F_e(t) = m d^2 x / dt^2$  ihr Minimum (Vorzeichen gem. Abb. 5 beachten). Zu einem späteren Zeitpunkt  $t_2$  möge die Kugel (nicht der Aufhängepunkt der Feder!) ihre oberste Position und damit die Auslenkung  $x(t)$  ihr Minimum ( $-x_0$ ) erreichen (auch hier Vorzeichen gem. Abb. 5 beachten). In dieser Position ist die Entfernung  $s$  zwischen LDS und R und damit auch  $U_{LDS}(t)$  minimal. Die Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen  $F_e(t)$  und  $x(t)$  ist dann (s. Abb. 9):

$$(33) \quad \phi = - \frac{t_2 - t_1}{T} 2\pi := - \frac{\Delta t}{T} 2\pi = - \Delta t \omega_1$$

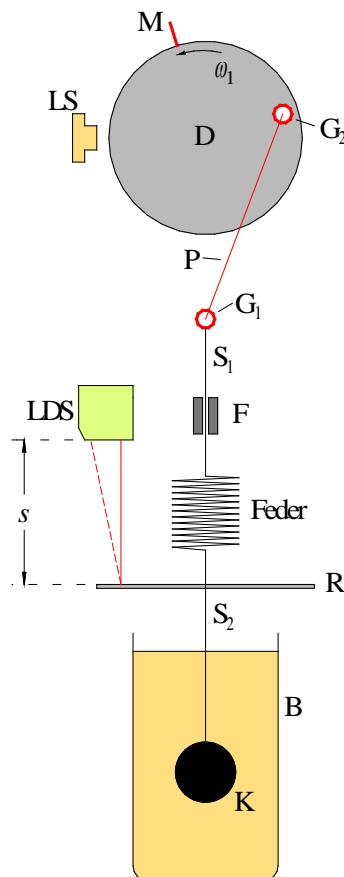


Abb. 8: Skizze des verwendeten Versuchsaufbaus.

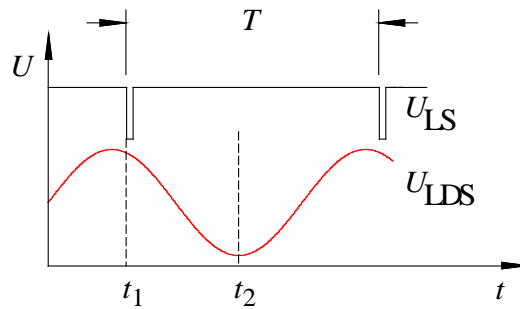


Abb. 9: Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannungen der Lichtschranke LS ( $U_{LS}$ ) und des Laserdistanzsensors LDS ( $U_{LDS}$ ). Zeitpunkt  $t_1$ : Aufhängepunkt der Feder in oberster Position, Anregungskraft  $F_e(t)$  minimal. Zeitpunkt  $t_2$ : Kugel in oberster Position,  $x(t)$  und  $U_{LDS}$  minimal.

Durch Variation von  $\omega_1$  lässt sich somit die Phasenkurve  $\phi(\omega_1)$  messen.

In der Praxis werden für jede eingestellte Kreisfrequenz  $\omega_1$  mit Hilfe eines Oszilloskops gleichzeitig die Amplitude  $U_0(\omega_1)$  und die Zeitdifferenz  $\Delta t(\omega_1)$  gemessen.

Abschließend noch eine Anmerkung zum zeitlichen Verlauf der Anregungskraft  $F_e(t)$ . Offensichtlich entspricht dieser bis auf eine konstante Phasenverschiebung dem zeitlichen Verlauf der vertikalen Bewegung des Gelenkes  $G_1$ , d.h. des Aufhängepunktes der Feder. Diese Bewegung wollen wir durch die Größe  $y(t)$  beschreiben (Abb. 10).

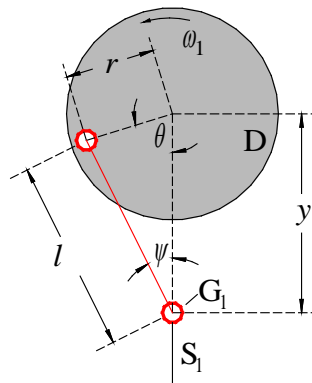


Abb. 10: Definition von Größen zur Berechnung der Bewegung des Gelenkes  $G_1$  (vgl. Abb. 8).

Ist die Pleuelstange der Länge  $l$  im Abstand  $r$  von der Drehachse auf der Scheibe montiert, so gilt:

$$(34) \quad y = r \cos \theta + l \cos \psi$$

und

$$(35) \quad r \sin \theta = l \sin \psi \quad \rightarrow \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \theta$$

Mit

$$(36) \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}$$

und

$$(37) \quad \theta = \omega_1 t$$

folgt schließlich:

$$(38) \quad y = r \cos(\omega_1 t) + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega_1 t)}$$

Der rein harmonischen Bewegung ( $r \cos(\omega_1 t)$ ) ist also noch eine Störung (Wurzelterm in Gl. (38)) überlagert, die leider auch zeitabhängig ist und damit die Bewegung anharmonisch macht. Die Anregungskraft  $F_e(t)$  verläuft also ebenfalls nicht rein harmonisch. Wählen wir jedoch  $l \gg r$ , so wird  $l^2 \gg r^2 \sin^2(\omega_1 t)$  und damit  $\sqrt{\dots} \approx l$ . Wir haben es dann statt mit einer zeitabhängigen Störung nur noch mit der additiven Konstanten  $l$  zu tun, die die „Harmonie“ jedoch nicht mehr stört.

### 3.2 Amplitudenresonanzkurve und Phasenkurve für starke und schwache Dämpfung

Mit der Anordnung gem. Abb. 8 soll für eine Kugel mit Haltestange  $S_1$  und Reflektorplatte  $R$  und eine Feder mit bekannten  $D$  und  $m_F$  (Daten siehe *Zubehör*) für zwei verschieden große Dämpfungen (Gläser mit unterschiedlichen Glycerin/Wassergemischen) jeweils die Amplitudenresonanzkurve  $x_0(\omega_1)$  und die Phasenkurve  $\phi(\omega_1)$  im Frequenzbereich  $f_1 = \omega_1/2\pi$  zwischen 0 Hz und ca. 5 Hz gemessen werden.

Die Pleuelstange  $P$  des Anregungssystems wird im zweiten Loch von innen auf der Scheibe angebracht. Die anharmonische Störung gem. Gl. (38) kann in diesem Fall vernachlässigt werden.

Die Ausgangssignale der Lichtschranke ( $U_{LS}$ ) und des Laserdistanzensors ( $U_{LDS}$ ) werden auf einem Digital-Oszilloskop dargestellt, das auf das Signal  $U_{LS}$  getriggert wird. Die Periodendauer  $T$  von  $U_{LS}$  und der Spitze-Spitze-Wert ( $U_{SS} = 2 U_0$ ) von  $U_{LDS}$  werden mit Hilfe der Funktion MESSUNG / MEASURE am Oszilloskop ermittelt. Aus diesen Größen können die Kreisfrequenz  $\omega_1$  und die Amplitude  $U_0$  bzw.  $x_0$  bestimmt werden.

Mit Hilfe der ZEIT-CURSOR wird die Zeitdifferenz  $\Delta t = t_2 - t_1$  gemessen (s. Abb. 9), aus der die Phasenverschiebung  $\phi$  gem. Gl. (33) berechnet werden kann.

#### **Hinweis:**

Um einen möglichst gleichmäßigen Lauf der Kreisscheibe zu erreichen, muss die Drehscheibe *gegen den Uhrzeigersinn* laufen. Aus dem gleichen Grund muss zur Einstellung der Motordrehzahl im Frequenzbereich zwischen 0 Hz und ca. 1,5 Hz ein elektronischer Drehzahlregler (Betriebsspannung 12 V) benutzt werden, der zwischen Netzgerät und Motor geschaltet wird. Bei Frequenzen über 1,5 Hz kann der Motor direkt an das Netzgerät angeschlossen und die Drehzahl über die Betriebsspannung geregelt werden (Spannung langsam von 0 V auf max. 12 V erhöhen).

Für beide Glycerin/Wassergemische wird für *möglichst viele* (mindestens 20) verschiedene Werte von  $\omega_1$ , insbesondere in der Nähe der Resonanzfrequenz, jeweils *nach Beendigung des Einschwingvorgangs* die Periodendauer  $T$ , die Amplitude  $U_0$  ( $\omega_1$ ) und die Zeitdifferenz  $\Delta t$  gemessen.

Die Amplitude  $U_0$  für den Fall  $\omega_1 \rightarrow 0$  wird bestimmt, indem die Motorachse bei ausgeschaltetem Motor per Hand in die Positionen „Pleuelstange oben“ und „Pleuelstange unten“ gedreht und jeweils die zugehörige Spannung  $U_{LDS}$  gemessen wird.

Für beide Gemische wird  $x_0$  über  $\omega_1$  in *einem* Diagramm und  $\phi$  über  $\omega_1$  ebenfalls in *einem* Diagramm aufgetragen. Die Größtfehler von  $x_0$  und  $\phi$  werden in Form von Fehlerbalken mit eingezeichnet (Fehler aus den Schwankungen der Werte für  $U_{SS}$  und  $T$  am Oszilloskop abschätzen). Danach werden „frei Hand“ Ausgleichskurven durch die Messwerte gezeichnet und die Form der Kurven mit den theoretischen Erwartungen verglichen.

#### **Anmerkung:**

In der Nähe der Eigenkreisfrequenz kann die Messung bei kleiner Dämpfung schwierig werden, weil sich große Amplituden einstellen und die Feder (möglicherweise auch das Stativ) in unkontrollierte Bewegung gerät oder die Kugel gar auf dem Boden des Becherglases aufschlägt. In diesem Fall muss das System von Hand gedämpft und rasch zum nächsten Frequenzwert übergegangen werden.

#### 4 Anhang: Berechnung der Resonanzamplitude und der Phasenverschiebung

Wir wollen zeigen, dass die Resonanzamplitude  $x_0$  und die Phasenverschiebung  $\phi$  mit wenigen einfachen Rechenschritten berechnet werden kann, wenn wir zur komplexen Schreibweise übergehen. Gl.(19) lautet in komplexer Schreibweise:

$$(39) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x = \frac{1}{m} F_1 e^{i\omega_1 t}$$

Analog zu Gl. (20) wählen wir als komplexen Lösungsansatz:

$$(40) \quad x = x_0 e^{i(\omega_1 t + \phi)} = x_0 e^{i\omega_1 t} e^{i\phi}$$

Einsetzen von Gl. (40) in Gl. (39) ergibt nach Ausführen der Differentiation und Division durch  $e^{i\omega_1 t}$ :

$$(41) \quad -\omega_1^2 x_0 e^{i\phi} + i\omega_1 \frac{b}{m} x_0 e^{i\phi} + \frac{D}{m} x_0 e^{i\phi} = \frac{F_1}{m}$$

Mit der Definition der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  gem. Gl. (8) folgt daraus:

$$(42) \quad x_0 e^{i\phi} = \frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + i\omega_1 \frac{b}{m}} := z$$

Wie bereits im Versuch „Messung von Kapazitäten...“ dargestellt, ist Gl. (42) eine Darstellungsform einer komplexen Zahl  $z$ , deren Betrag  $|z| = x_0$  durch  $\sqrt{z \cdot z^*}$  gegeben ist, wobei  $z^*$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl ist. Damit folgt:

$$(43) \quad x_0 = \sqrt{z z^*} = \sqrt{\left( \frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + i\omega_1 \frac{b}{m}} \right) \left( \frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \frac{b}{m}} \right)}$$

woraus sich durch einfaches Ausmultiplizieren Gl. (21) ergibt.

Für die Berechnung des Phasenwinkels benutzen wir wiederum (vgl. Versuch „Messung von Kapazitäten...“) die zweite Darstellungsform komplexer Zahlen, nämlich  $z = \alpha + i\beta$ , wobei  $\alpha$  der Realteil und  $\beta$  der Imaginärteil von  $z$  ist. Aus diesen Größen lässt sich der Phasenwinkel  $\phi$  bekanntlich berechnen als

$$(44) \quad \phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \begin{cases} +\pi & \Leftrightarrow \alpha < 0 \wedge \beta \geq 0 \\ -\pi & \Leftrightarrow \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \end{cases}$$

Um Gl. (42) in die Form  $\alpha + i\beta$  zu bringen, erweitern wir den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner:

$$(45) \quad x_0 e^{i\phi} = \frac{\frac{F_1}{m} \left( \omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \frac{b}{m} \right)}{\left( \omega_0^2 - \omega_1^2 + i\omega_1 \frac{b}{m} \right) \left( \omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \frac{b}{m} \right)} = \frac{\frac{F_1}{m} \left( \omega_0^2 - \omega_1^2 \right) - i \frac{F_1}{m} \omega_1 \frac{b}{m}}{\left( \omega_0^2 - \omega_1^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_1 b}{m} \right)^2}$$

Hieraus können wir die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  ablesen:

$$(46) \quad \alpha = \frac{\frac{F_1}{m}(\omega_0^2 - \omega_1^2)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2} \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{\frac{F_1}{m}\omega_1 \frac{b}{m}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \left(\frac{\omega_1 b}{m}\right)^2}$$

woraus durch Einsetzen in Gl. (44) folgt:

$$(47) \quad \phi = \arctan \left( -\frac{\frac{\omega_1 b}{m}}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \right) \left\{ -\pi \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 > \omega_0 \right\}$$

Mit

$$(48) \quad \arctan(-y) = \arctan\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{\pi}{2}$$

folgt daraus schließlich Gl. (22).