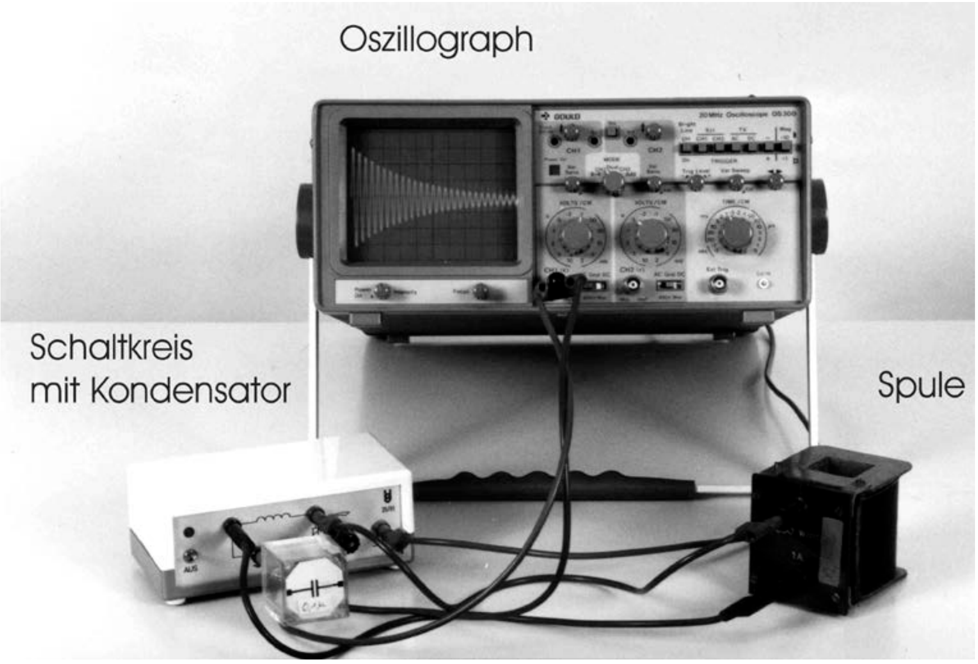
6 Magnetfeld, Induktion, Wechselstromgrößen



Gedämpfter Schwingkreis

6.1 Grundlagen

6.1.1 Induktion

Vom Strom zum Magnetfeld: Jede bewegte elektrische Ladung erzeugt ein magnetisches Feld mit der Feldstärke H (Einheit: A/m). Das bedeutet, dass um einen stromdurchflossenen Leiter immer ein Magnetfeld existiert. Deswegen lassen sich relativ starke Magnetfelder durch Spulen erzeugen, da sich in einer stromdurchflossenen Spule die magnetischen Felder der einzelnen Windungen zu einem Gesamt-Magnetfeld addieren. Ist der durch die Spule fließende Strom konstant, verändert sich das Magnetfeld nicht, d.h., auch die magnetische Feldstärke H bleibt zeitlich konstant.

Vom Magnetfeld zum Strom: 1831 entdeckte Michael Faraday, dass sich ändernde Magnetfelder elektrische Spannung und somit in z.B. einem Leiter Strom erzeugen. Man nennt diesen Vorgang *Induktion*. Genauer gesagt kommt es nur auf die relative Änderung an; eine Induktionsspannung lässt sich sowohl durch Bewegen eines elektrischen Leiters in einem konstanten Magnetfeld als auch in einem festen Leiter durch Änderung des magnetischen Flusses erzeugen.

Wenn man in einer stromdurchflossenen Spule in der Zeit Δt z. B. den Strom abschaltet oder seine Richtung umkehrt, so wird im Inneren der Spule die Feldstärke um ΔH geändert. Die Folge ist ein induktiver "elektrischer Spannungsstoß" $U\Delta t$, der an den Enden der Spule messbar ist:

$$U\Delta t = \mu_0 n_2 A \Delta H \tag{1}$$

A bezeichnet dabei den Spulenquerschnitt, n_2 die Windungszahl der Spule, und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ ist die magnetische Feldkonstante. Gleichung (1) gilt allerdings nur für den Fall, dass im Innenraum der Spule Vakuum herrscht (näherungsweise: dass er mit Luft gefüllt ist). Bei anderen Materialien wird μ_o um die stoffspezifische Permeabilität μ erweitert.

Die Änderung der magnetischen Feldstärke kann auch mittels "magnetischer Kopplung" zwischen zwei Spulen geschehen; in diesem Fall bewirkt die Änderung des Magnetfeldes der einen stromdurchflossenen felderzeugenden Primärspule eine Induktion in einer zweiten Sekundärspule. Für ΔH gilt dann:

$$\Delta H = \frac{n_1 \Delta I}{l}$$

n_1 und l beschreibt die Windungszahl und die Länge der sogenannten felderzeugenden Primärspule, ΔI ist die Änderung der Stromstärke in der Primärspule. Damit wird aus Gl. (1):

$$U \Delta t = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} \Delta I$$

oder, in differenzieller Form

$$U = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Bei dauernder *Änderung* der Primärstromstärke kann also eine Induktionsspannung dauernd aufrechterhalten werden.

Ein sinusförmiger Wechselstrom $I = I_0 \sin(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi f$ als Kreisfrequenz (*f* ist die Frequenz in Hz) erzeugt demnach eine Induktionsspannung

$$U(t) = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} I_0 \omega \cos(\omega t)$$

Der Höchstwert der Spannung ist dann

$$U_0 = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} \omega I_0 \tag{3}$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn man die momentanen Höchstwerte U_o und I_o durch die mit Analog- oder Digitalmessgeräten messbaren Werte U_{eff} und I_{eff} ersetzt. Dabei gilt $U_{eff} = |U_0| / \sqrt{2}$.

Gleichung (3) gilt jedoch nur für den Idealfall einer langgestreckten Spule (bei der die Länge sehr groß gegenüber dem Durchmesser ist). Für gedrungene Spulen (Durchmesser nicht vernachlässigbar klein gegen Spulenlänge l) muss die rechte Seite der Gleichung (3) mit dem Faktor $1/\sqrt{1+\frac{d^2}{l^2}}$ korrigiert werden.

Aufgabe:

Schätzen Sie diesen Faktor $1/\sqrt{1+\frac{d^2}{l^2}}$ für $l=d$, $l=10d$, $l=100d$ ab und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Näherungsformel $1-\frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}$.

Bemerkung:

Der Faktor $\sqrt{2}$ für Wechselspannung ergibt sich so: sei die Spannung gegeben als $U(t)=U_0\sin(\omega t)$. Die effektive Spannung U_{eff} ist definiert als $U_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)dt}$ mit $T=2\pi/\omega$. Ausrechnen führt auf $U_{eff}=\frac{|U_0|}{\sqrt{2}}$.

6.1.2 Induktiver Widerstand

Wird eine Spule mit einer Wechselspannungsquelle verbunden, so wird auch in ihr eine Induktionsspannung erzeugt. Diese ist zu jeder Zeit der angelegten Wechselspannung entgegengerichtet (Lenzsche Regel).

In diesem Fall ist $n_1=n_2=n$; Gl. (2) erhält damit die Form

$$U(t)=\mu_0\frac{n^2A}{l}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Die Induktivität L (Einheit Henry (H)) hängt von der "Bauart" einer Spule ab; sie ist definiert als

$$L=\mu_0\frac{n^2A}{l}$$

Mit ihr schreibt sich Gl. (4) als

$$U(t)=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\qquad \text{bzw.}\qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}U(t) \tag{5}$$

Die Induktivität verknüpft also die zeitliche Stromänderung in der Primärspule mit der Induktionsspannung.

Bei Verwendung sinusförmiger Wechselspannungen der Form

$$U(t)=U_0\sin(\omega t) \tag{6}$$

erhält man $$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}U_0\sin(\omega t)$$

und daraus durch Integration:

$$I(t)=-\frac{1}{\omega L}U_0\cos(\omega t)$$

Der Faktor $U_0/(\omega L)$ stellt die Stromamplitude I_o dar; wegen $\pm\cos x=\sin(x\pm\pi/2)$ (für diese Gleichung gibt es eine sehr anschauliche Begründung – welche?) folgt:

$$I(t)=-I_0\cos(\omega t)=I_0\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

Ein Vergleich zwischen Gl. (6) und (7) zeigt, dass zwischen $U(t)$ und $I(t)$ eine Phasenverschiebung besteht, und zwar eilt bei einer idealen Induktivität (d. h. der Eigenwiderstand und die Eigenkapazität der Spule sei vernachlässigbar) die Spannungsamplitude der Stromamplitude um den Winkel $\varphi=90°=\pi/2$ voraus (wobei diese Phasenverschiebung nicht von der speziellen Annahme $U(t)=U_0\sin(\omega t)$ abhängt). Für beliebige (also auch nicht-ideale) Spulen schreibt man allgemein

$$I(t)=I_0\sin(\omega t-\varphi)$$

Der Widerstand ist für Gleichstromkreise als $R = U / I$ definiert. Diese Definition ergibt für Wechselstromkreise mit $U(t) / I(t)$ keinen Sinn, da R zeitabhängig wäre und alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen würde. Dagegen ist der Quotient $R_L = U_0 / I_0$ konstant; wegen $I_0 = U_0 \frac{1}{\omega L}$ ist

$$\frac{U_0}{I_0} = R_L = \omega L$$

R_L heißt *induktiver Widerstand* oder *Blindwiderstand der Induktivität*. Als 'Blindwiderstände' werden allgemein frequenzabhängige Widerstände bezeichnet, bei denen keine Wärmeverluste auftreten.

6.1.3 Kapazitiver Widerstand

Der Kondensator im Gleichstromkreis wurde bereits in einem früheren Versuch behandelt. Hier sollen nun die gewonnenen Erkenntnisse auf den Wechselstromkreis erweitert werden.

Zwischen Ladung Q, Kapazität C und Spannung U am Kondensator besteht die allgemeine Beziehung

$$Q = CU \tag{8}$$

Bei Verwendung sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ wird der Kondensator im Takt der Wechselspannungsfrequenz laufend umgeladen d. h. bei Polaritätswechsel der Spannung fließt der Ladestrom in umgekehrter Richtung. Man erhält für die Ladung

$$Q(t) = CU_0 \sin(\omega t)$$

Folglich ist
$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \omega C U_0 \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$$

Der Faktor $\omega C U_0$ stellt die Stromamplitude I_o dar. Mit $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi / 2)$ folgt schließlich

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \pi / 2)$$

Auch hier besteht zwischen $U(t)$ und $I(t)$ eine Phasenverschiebung, wobei jetzt der Strom $I(t)$ der Spannung $U(t)$ um den Winkel $\pi / 2 = 90°$ vorauseilt (der Eigenwiderstand und die Eigeninduktivität des Kondensators sei vernachlässigbar). Der Wechselstromwiderstand des Kondensators ist wegen $I_0 = \omega C U_0$ gleich

$$\frac{U_0}{I_0} = R_C = \frac{1}{\omega C}$$

Man bezeichnet R_C als *kapazitiven Widerstand* oder als *Blindwiderstand der Kapazität*; R_C wächst im umgekehrten Verhältnis zur Frequenz.

6.1.4 Parallel- und Reihenschaltung von Spulen und Kondensatoren

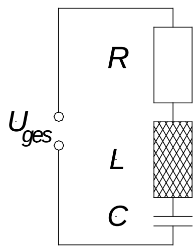
Werden ein ohmscher Widerstand, eine Spule und ein Kondensator hintereinander oder "in Reihe" geschaltet, so werden alle Schaltelemente vom gleichen Strom durchflossen. Nach der Maschenregel ist dann

$$U_{ges}(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t)$$

Erhöht man die Frequenz des Stroms I, so steigt die Spannung U_L, während sich U_C entsprechend verringert. Weil U_L dem Strom voraus- und U_C dem Strom nacheilt, muss es eine Frequenz geben, bei der sich beide Spannungen aufheben und damit auch ihre Widerstände R_L und R_C gleich groß sind. Strom und Spannung sind dann "in Phase"; der Stromkreis verhält sich so, als wäre nur der Ohmsche Widerstand vorhanden. Man nennt dies den Resonanzfall. Er tritt bei der charakteristischen Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .auf.

Die folgenden Gleichungen werden ohne Herleitung angegeben (ohne Verwendung komplexer Zahlen ist sie nämlich recht mühsam).

Für die *Reihenschaltung* ergibt sich: Der Gesamtwiderstand R_{Gesamt} (auch *Impedanz* oder *Scheinwiderstand* genannt) eines Kreises mit hintereinander geschalteten Widerständen ist



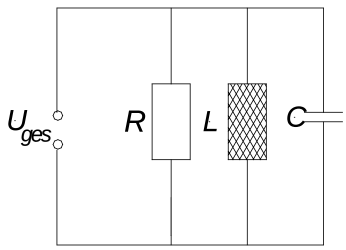
$$R_{Gesamt} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

und die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom ist gegeben durch

$$\tan\varphi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Bemerkung: Auch hier spricht man vom (allgemeinen) 'Blindwiderstand' $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, bei dem keine Wärmeverluste auftreten. R wird auch 'Wirkwiderstand' genannt.

Bei der *Parallelschaltung* von R, R_L und R_C liegt an allen Schaltelementen die gleiche Spannung. Nach der Knotenregel ergibt sich



$$I_{ges}(t) = I_R(t) + I_L(t) + I_C(t)$$

Vergrößert man die Frequenz der anliegenden Spannung, so erhöht sich der Strom I_C, während sich I_L entsprechend verringert. Da I_C der Spannung voraus- und I_L der Spannung nacheilt, muss es eine bestimmte Frequenz geben, bei der sich I_L und I_C gerade aufheben. Strom und Spannung sind dann in Phase; der Stromkreis verhält sich so, als sei nur der Ohmsche Widerstand R vorhanden. Auch dieser Resonanzfall tritt bei der charakteristischen Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ auf. Der Gesamtwiderstand R_{Gesamt} des Parallelkreises ist gegeben durch

$$R_{Gesamt} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \ ,$$

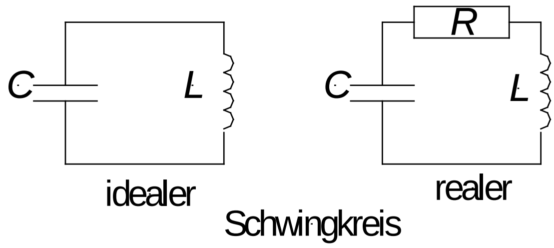
die Phasenverschiebung beträgt:

$$\tan\varphi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

6.1.5 Der Schwingkreis

Ein Stromkreis, der aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L besteht, heißt (idealer) Schwingkreis. Der Kondensator sei zur Zeit $t = 0$ auf die Ladung $Q = CU$ aufgeladen. Für $t > 0$ entlädt sich der Kondensator über die Spule, wobei diese aufgrund der Selbstinduktion dafür sorgt, dass der Kondensator (wegen der Lenzschen Regel) mit umgekehrter Polung wieder aufgeladen wird. Dieser Vorgang wiederholt sich ständig; ein solcher Kreis stellt also ein schwingungsfähiges System dar.

Im realen Fall hat man immer mit dem Ohmschen Widerstand der Spule und dem der Kabelverbindungen zu rechnen, in der Zeichnung durch den Widerstand *R* symbolisiert. Ein Teil der Energie des Kondensators wird über diese Ohmschen Widerstände in Wärme verwandelt und steht damit der Schwingung nicht mehr zur Verfügung: Die Schwingung wird durch den ohmschen Widerstand gedämpft. Darüber hinaus wird dem Schwingkreis immer durch die unvermeidbare Abstrahlung elektromagnetischer Wellen Energie entzogen.



Nach der Maschenregel ist

$$U_C + U_R + U_L = 0$$

Mit den Gl. (5) und (8) sowie den Beziehungen $U_R = RI$ und $Q = \int I\,\mathrm{d}t$ wird daraus:

$$\frac{1}{C} \cdot \int I\,\mathrm{d}t + RI + L\dot{I} = 0$$

$$\frac{1}{C} I + R\dot{I} + L\ddot{I} = 0$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Diese Gleichung entspricht formal der mathematischen Beschreibung einer gedämpften mechanischen Schwingung (vgl. Versuch 2)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Dabei ist β der Dämpfungsfaktor und ω_0 die Eigenfrequenz des schwingenden Systems. Analog gilt für den elektrischen Schwingkreis

$$\beta = \frac{R}{2L}; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}; \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

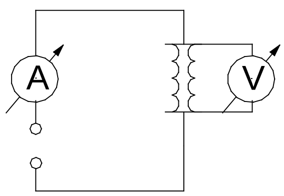
Für *R*=0 gilt die sogenannte Thomsonsche Schwingungsgleichung

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

6.2 Aufgaben

6.2.1 Magnetische Feldkonstante - Induktion

Geräte: Netztrafo, Spule, Amperemeter, Voltmeter



Experiment:

Die magnetische Feldkonstante μ_0 soll mittels Induktion bestimmt werden.

Durchführung:

Der Strom in der Feldspule wird in geeigneten Schritten erhöht (ca. 10 Messwerte) wobei jeweils die induzierte Spannung an der Induktionsspule gemessen wird.

Auswertung:

Stellen Sie die induzierte Spannung als Funktion des Feldspulenstroms graphisch dar und bestimmen Sie die magnetische Feldkonstante aus der Steigung des Graphen. Überlegen Sie, ob Sie den Korrekturfaktor für gedrungene Spulen berücksichtigen müssen.

Experimentelle Parameter: Feldspule der Länge l, Induktionsspule mit Querschnittsfläche A, Windungszahlen n_1 und n_2 von Feld- bzw. Induktionsspule.

6.2.2 Wechselstromwiderstand einer Spule

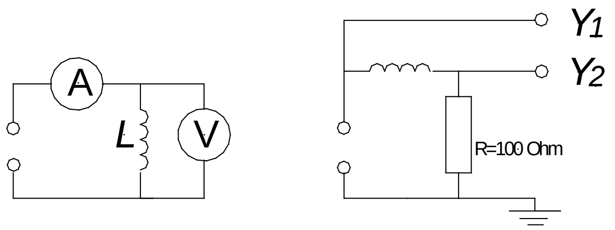
Geräte: Funktionsgenerator, Spule mit 1600 Windungen, stabförmiger Eisenkern, U-Kern, Spannvorrichtung, Ampere- u. Voltmeter, Oszilloskop

Experiment:

Der Wechselstromwiderstand einer Spule soll bestimmt werden.

Durchführung:

1. Bei verschiedenen Frequenzen sollen die Stromstärken I und die Spannungen U des Schaltkreises gemessen werden. Führen Sie die Versuche mit einer Spule a) ohne Eisenkern, b) mit stabförmigem Eisenkern und c) mit geschlossenem Kern (Spannvorrichtung) durch. Variieren Sie dazu die Frequenzen in geeigneten Schritten von ca. 20 bis 1000 Hz (sinusförmige Spannungen benutzen).
2. Stellen Sie den Spannungs- und Stromverlauf an der Spule mit geschlossenem Kern auf dem Zweikanal-Oszilloskop übereinander dar. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf und ermitteln Sie die Phasenverschiebung für eine bestimmte Frequenz (Vorschlag 1kHz).



Schaltung zu 1) Schaltung zu 2)

Y_1 und Y_2 bezeichnen jeweils einen Eingang des Oszilloskops, der übrig bleibende Anschluss wird auf Masse (Erde) gelegt.

Auswertung:

Tragen Sie das Quadrat des gemessenen Widerstandswertes der Spule gegen das Quadrat der Frequenz auf. Bestimmen Sie aus dem erhaltenen Diagramm die Induktivität L der Spule für die drei Fälle. Wie groß ist der Gleichstromwiderstand der Spule?

Vergleichen Sie die gemessene Phasenverschiebung bei 1kHz mit derjenigen, die sich aus Gleichstromwiderstand, Induktivität und der Frequenz rechnerisch ergibt.

6.2.3 Wechselstromwiderstand eines Kondensators

Experiment und Durchführung:

Die Schaltung entspricht derjenigen des letzten Versuchs; die Spule wird durch Kondensatoren verschiedener Kapazitäten ersetzt.

Die Messungen unter werden für Kondensatoren verschiedener unbekannter Kapazitäten für beide Schaltungen wiederholt. Spannung und Stromstärke werden wie oben auf dem Oszilloskop dargestellt. Beschreiben Sie den Kurvenverlauf und messen Sie die Phasenverschiebung φ.

Zum Ablesen der Phasenverschiebung ist es sinnvoll, Nulldurchgänge beider Kurven in den Ursprung des Koordinatensystems des Schirmes zu legen und die Zeitachse entsprechend zu "dehnen". Achten Sie auf die Triggerung des Oszilloskops. Führen Sie notfalls diesen Versuch bei einer höheren Frequenz durch.

Auswertung:

Tragen Sie den kapazitiven Widerstand R_C der verschiedenen Kondensatoren gegen den Kehrwert der Frequenz auf. Ermitteln Sie die Kapazität des Kondensators.

Vergleichen Sie wieder die gemessenen Phasenverschiebung φ mit der theoretisch ermittelten.

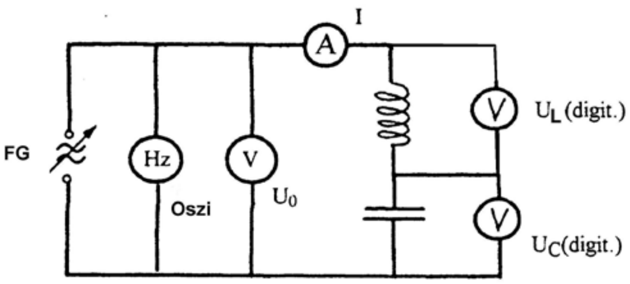
6.2.4 Reihenschaltung induktiver und kapazitiver Widerstände

Geräte: Funktionsgenerator, Spule, Kondensator, analoges Voltmeter, Amperemeter, Digitalvoltmeter, Frequenzmessgerät bzw. Oszilloskop

Experiment:

Mit Strom- und Spannungsmessungen soll über die Variation der Frequenz der Resonanzfall der Reihenschaltung ermittelt werden.

Durchführung:



Messen Sie für verschiedene Frequenzen im Bereich bis ca. 1kHz die Stromstärke sowie die Spannungen U_C und U_L. Achten Sie darauf, die Frequenz in geeigneten Schritten zu variieren (Tipp: mehr Messwerte in der Nähe der Extremwerte – warum?). Sehr wichtig für das Gelingen ist, dass die am Funktionsgenerator anliegende Spannung U_o konstant ist; sie muss bei Bedarf nachgeregelt werden (Tipp: Kontrolle mit Oszilloskop). Fahren Sie deshalb zu Beginn den Frequenzbereich ab und beobachten das Verhalten von U_o.

Auswertung:

Tragen Sie die Stromstärke als Funktion der Frequenz auf (ca. 20 Werte). Tragen Sie ebenso die Quotienten U_C/U_0 und U_L/U_0 (in <u>einem</u> Diagramm) gegen die Frequenz auf.

Diskutieren Sie den Kurvenverlauf. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Resonanzfrequenz und die Werte für U_C und U_L im Resonanzfall. Wie groß ist der Widerstand der *LC*-Kombination im Resonanzfall? Die Daten von Spule und Kondensator stehen auf den Bauteilen.

Als "Resonanzbreite" bezeichnet man die Differenz derjenigen Frequenzen, bei denen die Amplitude der Resonanzkurve jeweils auf den $1/\sqrt{2}$ -ten Teil abgesunken ist. Wie groß ist die Resonanzbreite?

6.2.5 Schwingkreis

Geräte: Kondensator (in Steckgehäuse), Spule 1200 Windungen (ohne Kern), Oszilloskop, Schaltkasten

Experiment:

Bestimmung der Dämpfungskonstanten mittels eines regelbaren Widerstandes

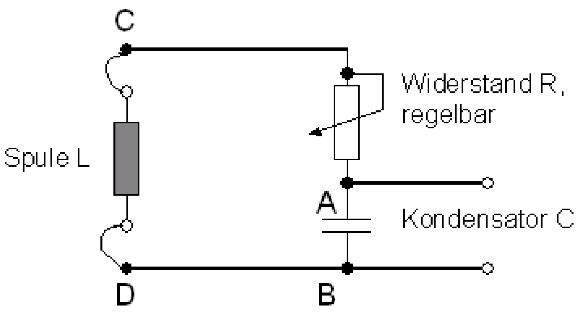


Abbildung: Schaltkreis zur Bestimmung der Dämpfungskonstanten

Durchführung:

Um das Experiment durchführen zu können, muss die vorliegende Schaltung zunächst komplettiert werden. Dazu schalten Sie eine Spule mit möglichst kurzen Kabeln (warum?) in den Schaltkreis (Anschlüsse D und C). Zwischen A und B wird ein Kondensator eingesetzt. Achten Sie bei Elektrolyt - Kondensatoren auf die richtige Polung. Verbinden Sie den Eingang des Oszilloskops mit A und die Masse mit B. Wählen Sie am Oszilloskop die Einstellungen Time: 0,2 oder 0.5 ms/cm, Input: 0,1 V/cm.

Zur regelmäßigen Aufladung des Schwingkreiskondensators wird eine Sägezahnspannung aus dem Oszilloskop verwendet. Die Ausgangsbuchse dafür liegt auf der Rückseite des Gerätes (Zeichen /\); sie wird ebenfalls über A dem Schwingkreis zugeführt.

Regeln Sie den Widerstand R so ein, dass das Signal auf dem Schirm maximal wird. Welchen Wert hat nun der Widerstand? Versuchen Sie, das Schwingungsbild symmetrisch zur Mittellinie des Schirms zu legen.

Auswertung:

Lesen Sie aus dem symmetrisch positionierten Oszillogramm die Amplituden ab und tragen Sie diese logarithmisch gegen die Zeit auf.

Bestimmen Sie die Schwingzeit T des Kreises möglichst genau über mehrere Schwingungen und berechnen Sie aus dem Diagramm und der Periodendauer T die Dämpfungskonstante des Systems (vgl. Kapitel 2, Gedämpfte Schwingungen). Wie groß ist die Induktivität der Spule? Der Gleichstromwiderstand des Kreises beträgt $12{,}9\Omega$. Wenden Sie die Thomsonsche Schwingungsformel zur Berechnung der Kapazität an.