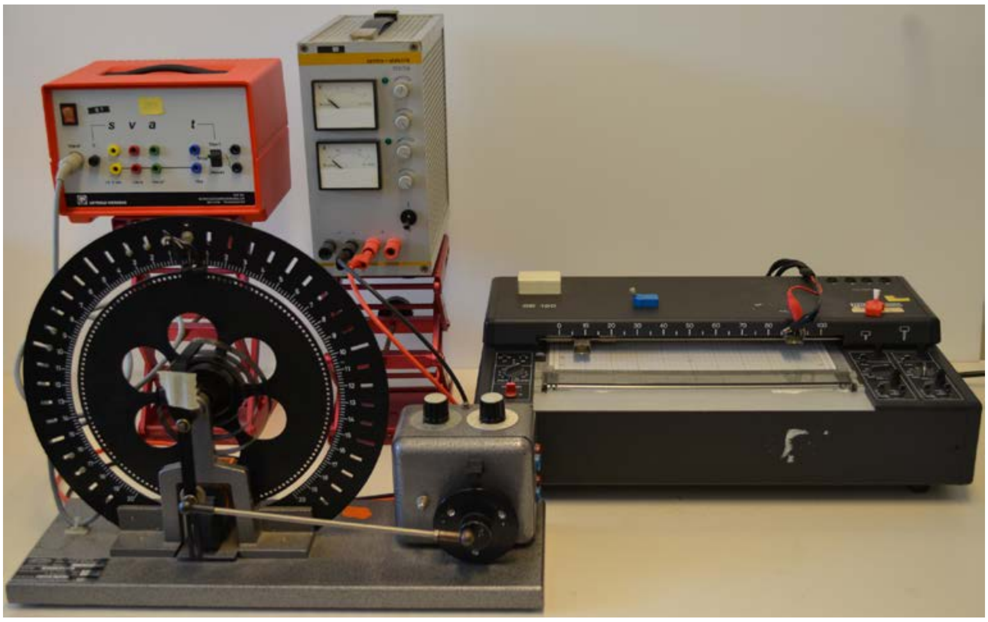
2 Mechanische Größen, Schwingungen



Gedämpfte Schwingungen mit dem Pohlschen Drehpendel

2.1 Grundlagen

2.1.1 Elastischer und unelastischer Stoß

Elastischer Stoß

Beim elastischen Stoß bleibt die kinetische Energie erhalten; Energie wird nicht in z.B. Wärme umgewandelt und es treten keine chemischen Reaktionen auf:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \qquad (1)$$

Ebenso gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (2)$$

wobei $\vec{v}_1$ die Geschwindigkeit des Körpers mit der Masse m_1 vor, und $\vec{v}_1'$ die des gleichen Körpers nach dem Stoß ist. $\vec{v}_2'$ ist die Geschwindigkeit des Körpers mit der Masse m_2 nach dem Stoß. Es wird dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass der Körper mit der Masse m_2 vor dem Stoß in Ruhe ist: $\vec{v}_2 = 0$.

Wenn wir uns auf den *eindimensionalen* Stoß beschränken, lassen sich aus den Gln. (1) und (2) die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ berechnen:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \qquad\qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

Unelastischer Stoß

Beim ideal unelastischen Stoß bewegen sich beide Körper nach dem Stoß mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter. Nach dem Impulserhaltungssatz gilt dann für den Sonderfall, dass der Körper mit der Masse m_2 vor dem Stoß in Ruhe war:

$$m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$$

Die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoß ist demnach:

$$\vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Die beim unelastischen Stoß in Wärme umgewandelte kinetische Energie lässt sich durch Vergleich der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß ermitteln. Für den hier angenommenen Sonderfall beträgt die in Wärme umgewandelte kinetische Energie ΔE also

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1^2$$

2.1.2 Das Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment J ist eine physikalische Größe, die die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung einer Rotationsbewegung angibt; es hängt von der Form und Massenverteilung des Körpers und von der Drehachse ab.

Das Trägheitsmoment von Massenpunkten (Masse m_1, Abstand von der Drehachse r_1) lautet:

$$J = \sum_i r_i^2 m_i$$

Ist zum Beispiel die x-Achse die Drehachse, gilt speziell

$$J_{um\ x\text{-}Achse} = \sum_i \left(y_i^2 + z_i^2\right)m_i$$

Das Trägheitsmoment von Körpern mit einer nicht konstanten Massenverteilung (Massendichte $\rho(\vec{r})$) erhält man mittels Übergang von der Summe zum Integral; es gilt

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_{Volumen} r^2 \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

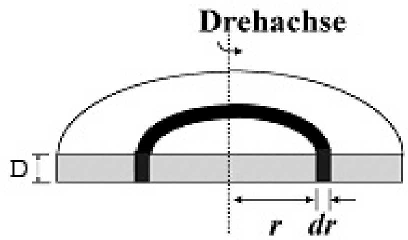
Dabei erstreckt sich die Integration über das gesamte Volumen des Körpers. Für den Spezialfall konstanter Dichte (homogene Körper) vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$J_{\text{homogen}} = \rho \int_{Volumen} r^2 dV$$

Beispiele:

Das Trägheitsmoment einer homogenen zylindrischen Scheibe, bei der die Drehachse senkrecht zur Scheibenfläche steht und durch den Mittelpunkt der Scheibe verläuft:

Der Radius der Scheibe sei R, die Dicke D, die Dichte des homogenen Materials ρ. Als Massenelement betrachten wir einen Hohlzylinder der Wandstärke dr. Der Abstand von der Drehachse ist r. Für die Masse dm folgt wegen $dV = 2\pi r D \mathrm{d}r$:



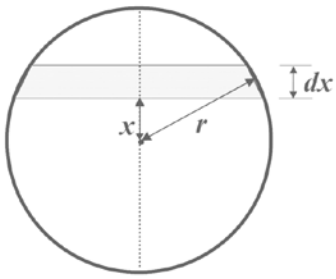
$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho 2\pi r D \mathrm{d}r$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$J = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r D\,dr = 2\pi\rho D \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} R^4 \rho D\,.$$

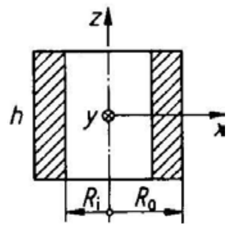
Mit der Masse der Scheibe $M = \pi R^2 \rho D$ folgt schließlich:

$$J = \frac{1}{2} M R^2$$



Das Trägheitsmoment einer Kugel der Masse M mit homogener Massenverteilung und dem Radius r lässt sich in ähnlicher Weise berechnen, wenn man als Massenelement eine Scheibe der Dicke dx betrachtet (die Drehachse laufe durch den Mittelpunkt.) Für den Radius einer solchen Scheibe gilt dann $a = \sqrt{r^2 - x^2}$. Man berechnet zunächst das Trägheitsmoment einer solchen Scheibe und integriert dann über x zwischen den Grenzen 0 und r.

Das Ergebnis lautet: $$J = \frac{2}{5} M r^2$$



Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders (Masse M, Höhe h, Innenradius R_i, Außenradius R_a) beträgt bei Rotation um die z- bzw. x- (oder y-) Achse (siehe Bild)

$$J_z = \frac{M}{2}\left(R_a^2 + R_i^2\right) \quad \text{bzw.} \quad J_{x,y} = \frac{M}{4}\left(R_a^2 + R_i^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$

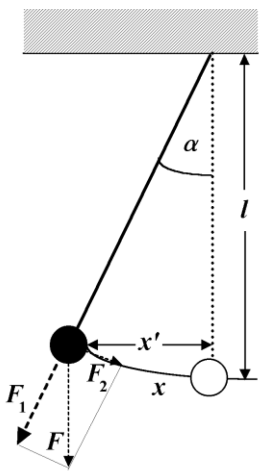
Steinerscher Satz:

Verläuft die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt, dann kann man das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Achse nach dem Steinerschen Satz berechnen:

$$J = J_s + M a^2$$

dabei ist a der Abstand der neuen Achse von der (parallelen) Achse durch den Schwerpunkt und J_s das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse. Formal setzt sich das Trägheitsmoment also aus zwei Beiträgen zusammen: Aus dem Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerpunktachse und demjenigen der gesamten im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse in Bezug auf die Drehachse.

2.1.3 Das mathematische Pendel



An einem als masselos angenommenen Faden hängt ein Körper mit der Masse m, die in einem einzigen Punkt konzentriert zu denken ist, dem Schwerpunkt. Die Pendellänge l ist dann die Entfernung zwischen Aufhängepunkt und dem Schwerpunkt des Pendelkörpers.

Auf die Masse wirkt die Gewichtskraft des Körpers:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Diese Kraft ist auf den Erdmittelpunkt gerichtet. Sie kann in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt werden: $\vec{F}_1$ hält den Faden straff, $\vec{F}_2$ ist Ursache der beschleunigten Bewegung des Pendelkörpers in Richtung auf den tiefsten Punkt der Bahn. Die Richtung von $\vec{F}_1$ ist durch die Fadenrichtung, die von $\vec{F}_2$ durch die Kreisbahntangente gegeben. Der Betrag von $\vec{F}_2$ hängt vom momentanen Auslenkwinkel ab

$$\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}\right| \sin\alpha(t) = mg\sin\alpha(t)$$

wobei $\alpha(t)$ der zeitabhängige Auslenkwinkel ist. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt $-mg\sin\alpha = mb(t)$, wobei $b(t)$ die Beschleunigung in x-Richtung ist (Minuszeichen wegen der Richtung der Kraft). Bekanntlich ist die Beschleunigung die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, diese wiederum die erste Ableitung des Ortes nach der Zeit. Damit folgt, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit ist:

$$b(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}; \quad v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}; \quad \Rightarrow b(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Aus Gründen der Schreibökonomie hat es sich eingebürgert, die zeitliche Ableitung durch einen Punkt zu kennzeichnen:[1]

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}(t); \quad \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{x}(t)$$

Wenn es keine Missverständnisse geben kann, spart man sich in der Regel auch die Angabe des Argumentes und schreibt z.B. statt $x(t)$ schlicht x. Damit lautet das Bewegungsgesetz für das Fadenpendel $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha$, und mit $x = l\alpha$ folgt schließlich:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$$

Beachten Sie, dass hier die Masse m des Pendels nicht auftritt: die Bewegung des mathematischen Pendels hängt nicht von der Masse ab.

'Technische' Bemerkung: Die Bewegungsgesetze haben uns auf eine Gleichung geführt, die die zweite Ableitung einer Größe (x oder α) mit der Größe selbst verknüpft. Solche Gleichungen, in denen eine Funktion zusammen mit ihren Ableitungen auftritt (es können die ersten, zweiten oder höhere Ableitungen sein, es können auch Produkte und Funktionen von Ableitungen usw. auftreten), nennt man *Differentialgleichungen*. Die modernen Naturwissenschaften sind ohne Differentialgleichungen nicht denkbar; ein Großteil ihrer Erkenntnisse und Gesetze sind mit diesem Werkzeug formuliert. Dies gilt in ganz besonderem Maß für die Physik (von den Newtonschen Axiomen bis hin zur Allgemeinen Relativitätstheorie und Quantenfeldtheorie), aber auch in vielen anderen Bereichen (Biologie z.B. Populationsdynamik, Chemie z.B. Reaktionskinetik usw.).

Wenn man eine Differentialgleichung aufgestellt hat, muss man eine Funktion finden, die sie befriedigt – man sagt, eine Lösung der Differentialgleichung finden. Das ist im Allgemeinen sehr schwierig, aber es gibt einige wenige einfache Fälle, zu denen der vorliegende gehört. Ganz besonders einfach wird die Situation, wenn man sich auf den Spezialfall kleiner Auslenkungen α beschränkt. In diesem Fall gilt $\sin\alpha \approx \alpha$ (bzw. $x' \approx x$ in der Zeichnung) und es folgt:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \frac{g}{l} \cdot x = 0 \tag{3}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich schreiben als:

$$x = x_s \sin(\omega t) + x_c \cos(\omega t) \tag{4}$$

Dabei sind x_s und x_c Konstanten, die durch die Angabe der Anfangsbedingungen (z.B. Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0) festgelegt werden. Ein Bewe-

[1] Ableitungen nach dem Ort kürzt man mit einem Strich ab: $\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \equiv h'(x)$.

gungsgesetz in der Form (3) bzw. Lösungen der Form (4) beschreiben übrigens ein Verhalten, das man *harmonische Schwingung* nennt. Diese harmonische Schwingung ist ein zentraler Baustein (nicht nur) der Physik in vielen Feldern – vom einfachen Pendel bis zur Quantenfeldtheorie.

In der letzten Gleichung haben wir die Konstante ω eingeführt, die wir noch bestimmen müssen. Dazu setzen wir (4) in (3) ein und erhalten:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ω hat die Bedeutung einer Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi / T$, mit *T* als Schwingungsdauer. Damit ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5}$$

Dass die Schwingungszeit ein Vielfaches von $\sqrt{l/g}$ sein muss, lässt sich übrigens direkt aus Gleichung (3) entnehmen. Dort tauchen nämlich nur die beiden physikalischen Parameter *l* und *g* auf. Wie man sich leicht überzeugt, hat tatsächlich nur die Kombination $\sqrt{l/g}$ die Dimension einer Zeit. Folglich *muss* gelten $T \sim \sqrt{l/g}$. Die Proportionalitätskonstante lässt sich mit diesem Vorgehen (eine besonders einfache Anwendung der sogenannten 'Dimensionsanalyse' – gemeint sind die physikalischen Dimensionen = Maßeinheiten) allerdings nicht ermitteln.

2.1.4 Physikalisches Pendel, Federpendel, Torsionspendel

Diese Betrachtungen lassen sich auf andere Pendel übertragen.

Physikalisches Pendel: Ein Körper mit der Masse *m*, der um eine horizontale, nicht durch seinen Schwerpunkt verlaufende Achse drehbar gelagert ist, heißt physikalisches (oder auch physisches) Pendel. Lenkt man das Pendel um einen Winkel aus, gibt es wegen der Schwerefeldstärke *g* ein rücktreibendes Moment. Lässt man das Pendel los, gerät es in eine Drehbewegung um die Achse. Die Schwingungsgleichung lautet in diesem Fall für genügend kleine Winkel φ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0$$

wobei *l* der Abstand von Drehachse zum Schwerpunkt und *J* das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse ist.

Unter dem mathematischen Pendel versteht man folgende idealisierte Vereinfachung des physikalischen Pendels: die gesamte Masse ist im Schwerpunkt vereinigt und die Masse ist mit dem Aufhängepunkt durch eine masselose, starre Aufhängung verbunden. In diesem Fall wird $J = ml^2$.

Federpendel: Nach dem Hookeschen Gesetz ist die auslenkende Kraft proportional zur Auslenkung *x*:

$$\vec{F} = -D\vec{x}$$

Die Größe *D* wird als Federkonstante bezeichnet; sie ist ein Maß für die "Stärke" der Feder.

Gleichzeitig ist die Kraft $\vec{F}$ Ursache der Beschleunigung des schwingenden Systems,

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \ ,$$

so dass man die Differenzialgleichung

$$-D\vec{x} = m\ddot{\vec{x}} \qquad (6)$$

erhält. Hieraus lässt sich eine zu Gl. (5) analoge Gleichung für die Schwingungsdauer herleiten. In dieser Gleichung ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Feder nicht nur durch die angehängte Zusatzmasse schwingt, sondern auch aufgrund der Masse der Feder selbst. Die Federmasse geht daher zu einem bestimmten Teil (Größenordnung etwa 30 %) mit in die Schwingungsgleichung ein.

Beim *Torsionspendel* (Drehpendel) tritt an die Stelle der Wegauslenkung x die Winkelauslenkung α, anstelle der Federkonstante wird die sog. "Richtkonstante" D^* eingesetzt und statt der schwingenden Masse wird das Trägheitsmoment J verwendet. Analog Gl. (6) erhält man für das Torsionspendel:

$$-D^*\alpha = J\ddot{\alpha} \qquad (7)$$

Gl. (7) ist eine zu Gl. (3) analoge Differenzialgleichung für das Torsionspendel, aus der sich eine G. (5) entsprechende Gleichung für die Schwingungsdauer herleiten lässt.

2.1.5 Gedämpfte Schwingungen

Die Gleichungen (3), (6) und (7) beschreiben für verschiedene Pendelsysteme eine freie, *ungedämpfte* Schwingung. In der Praxis sind ungedämpften Schwingungen nur näherungsweise realisierbar; freie Schwingungen sind wegen der unvermeidbaren Energieabgabe durch Lagerreibung, Luftwiderstand etc. stets gedämpft.

Für diesen Fall muss z.B. Gl. (3) (entsprechend Gln. (6) und (7)) um ein sogenanntes Dämpfungsglied erweitert werden: Aus Gl. (3) wird dann:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^{\,2}x = 0 \qquad (8)$$

Dies ist die Differenzialgleichung einer gedämpften Schwingung. Die *Dämpfungsgröße* β gibt das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden (auf der gleichen Seite) an. Der Faktor 2 vor β rührt daher, dass mit dieser Wahl die Lösungsformeln am einfachsten werden.

Die Lösung der Differenzialgleichung (8) lautet

$$x = x_{01}\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega t + x_{02}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega t$$

mit $\omega^2 = \omega_0^{\,2} - \beta^2$ und $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

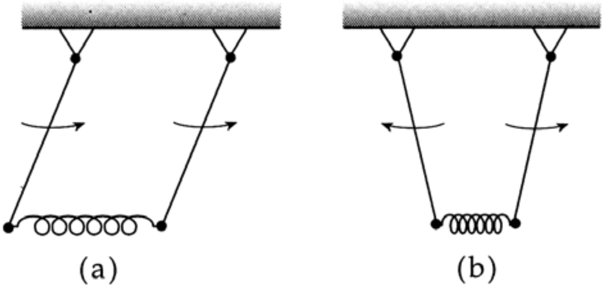
ω_o ist die Frequenz, die sich im ungedämpften Fall ergeben würde (die sog. Eigenfrequenz). Für *t = T , 2T, 3T, ..., nT* erhält man $x_n = x_{01}\mathrm{e}^{-\beta nT}$ und hieraus

$$\beta = \frac{1}{nT}\ln\frac{x_0}{x_n}$$

2.1.6 Gekoppelte Schwingungen

Bei zwei gekoppelten Pendeln beobachtet man unter geeigneten Umständen, dass die beiden Oszillatoren Energie austauschen – die Bewegungsenergie des einen Pendels nimmt zu, die des anderen nimmt ab, bis es (nahezu) ruht; dann kehrt sich der Vorgang wieder um. Dabei kommt es zum vollständigen Energieaustausch nur bei gleicher Schwingungsdauer der beiden Pendel. Aber es gibt auch Schwingungen der beiden gekoppelten Pendel, bei denen die Oszillatoren keine

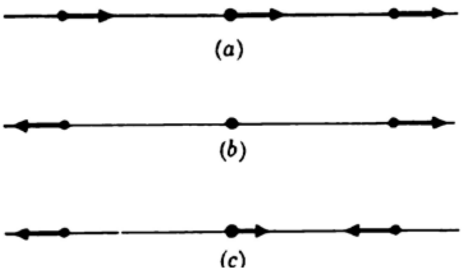
Energie austauschen und mit der gleichen Frequenz schwingen, sogenannte Fundamental- oder Normalschwingungen.



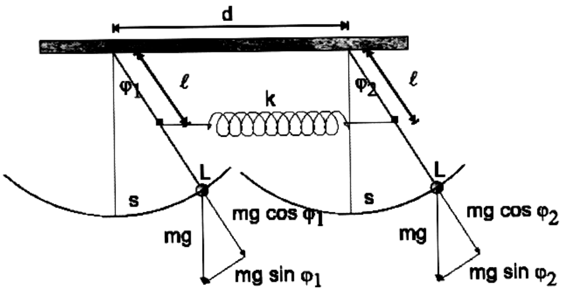
Im Praktikum genutztes gekoppeltes Pendel. Die koppelnde Feder wird durch ein an beiden Pendeln befestigtes Gewicht realisiert.

Im Fall zweier gekoppelter Fadenpendel gibt es zwei Normalschwingungen: (a) die gleichsinnige Schwingung, wobei die beiden Pendel synchron die gleiche Bewegung ausführen, und zwar mit der Frequenz ω, mit der auch die einzelnen, nicht gekoppelten Pendel schwingen, (b) die gegensinnige Schwingung, wobei die beiden Pendel synchron in entgegengesetzter Richtung schwingen, und zwar mit einer Frequenz $\Omega > \omega$.

Viele auf den ersten Blick fast undurchschaubare Schwingungsvorgänge in der Natur lassen sich mithilfe der Formulierung mit Normalschwingungen recht durchsichtig und kompakt formulieren. Dies trifft beispielsweise auf Molekülschwingungen zu. Das Bild unten zeigt die longitudinalen Normalschwingungen des linearen symmetrischen dreiatomigen Moleküls.[2] Man kann zeigen, dass sich alle Longitudinalschwingungen, seien sie auch noch so kompliziert, als Überlagerung dieser drei Normalschwingungen mit verschiedenen Amplituden darstellen lassen. Damit lässt sich jede Longitudinalschwingung dieser Moleküle durch einen Satz von drei Zahlen (den Amplituden) eindeutig darstellen.



Um den Aufwand möglichst gering zu halten, studieren wir das Thema Normalschwingung anhand der zwei gekoppelten mechanischen Pendel mit der Masse *m*. Die Pendel haben den Abstand *d* und die Länge *L*. Im Abstand l von der Aufhängungsebene sind sie mit einer Feder der Ruhelänge *d* und der Federkonstanten *k* gekoppelt.



Die uns interessierenden zeitabhängigen Größen sind die Winkel $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$; da es klar ist, dass sie von der Zeit abhängen, und um die Schreibweise durchsichtig zu halten, schreibt man üblicherweise nur φ_1 und φ_2. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen findet sich im Anhang; das Ergebnis lautet:

[2] Außerdem gibt es Normalschwingungen senkrecht zur Molekülachse; sie werden hier nicht gezeigt. Bildquelle: H. Goldstein, Klassische Mechanik, S. 373

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{L}\varphi_1 - \frac{kl^2}{mL^2}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi}_2 = -\frac{g}{L}\varphi_2 + \frac{kl^2}{mL^2}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

wobei *g* die Erdbeschleunigung ist. Wie man sieht (und wie es ja auch sein soll), wird die Kopplung zwischen den beiden Pendeln also umso fester, je weiter man die Feder nach unten verschiebt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\omega^2 = g/L\,, \qquad \gamma^2 = kl^2/mL^2\,; \qquad \Omega^2 = \omega^2 + 2\gamma^2$$

Verwendet man statt des Fadenpendels (Trägheitsmoment mL^2) ein physikalisches Pendel mit dem Trägheitsmoment *J*, schreiben sich die Abkürzungen als

$$\omega^2 = mgL/J\,, \qquad \gamma^2 = kl^2/J\,; \qquad \Omega^2 = \omega^2 + 2\gamma^2$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2\varphi_1 - \gamma^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2\varphi_2 + \gamma^2(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{9}$$

Gefragt ist nach den zeitabhängigen Funktionen φ_1 und φ_2, die diese Bewegungsgleichungen erfüllen. Der ausführliche Rechengang findet sich im Anhang. Wir notieren hier nur die Ergebnisse. Wichtig ist der Befund, dass man je nach Wahl der Anfangsbedingungen verschiedene Schwingungstypen erhält.

1. Normalschwingung, symmetrischer Fall:

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel ausgelenkt und zum Zeitpunkt *t*=0 losgelassen. Die Kopplung der beiden Pendel kommt dabei nicht zur Geltung, da die Feder ihre Spannung nicht ändert und die Pendel ohne Feder genauso schwingen würden. Die Lösung der Bewegungsgleichungen (9) lautet in diesem Fall:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\omega t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos\omega t \qquad \text{(symmetrischer Fall)}$$

2. Normalschwingung, antisymmetrischer Fall:

Die beiden Pendel werden um den gleichen Winkel, aber in entgegengesetzter Richtung ausgelenkt. Die Pendel schwingen dann weiterhin gegeneinander, und zwar nicht mit ω, sondern mit der 'gestörten' Frequenz Ω. Die Lösung der Bewegungsgleichungen (9) lautet in diesem Fall:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\Omega t \quad \text{und} \quad ;\varphi_2(t) = -\varphi_0 \cos\Omega t \qquad \text{(antisymmetrischer Fall)}$$

3. Schwebung:

Dieser Fall unterscheidet sich von den Normalschwingungen dadurch, dass beide Frequenzen ω und Ω auftauchen. Schwebung erhält man, wenn man eine Masse zu Beginn auslenkt, während die andere in der Gleichgewichtslage ist, also zum Beispiel für $\varphi_1(t=0)=0$, $\varphi_2(t=0)=\varphi_0$, $\dot{\varphi}_1(t=0)=0$ und $\dot{\varphi}_2(t=0)=0$. Die Lösung der Bewegungsgleichungen (9) lautet in diesem Fall:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2}\cos\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\cos\Omega t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}\cos\omega t - \frac{\varphi_0}{2}\cos\Omega t \qquad \text{(Schwebungsfall)}$$

Diese Ausdrücke lassen sich mit den trigonometrischen Beziehungen

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

umformen zu

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\frac{\Omega+\omega}{2}t\cos\frac{\Omega-\omega}{2}t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \varphi_0 \sin\frac{\Omega+\omega}{2}t\sin\frac{\Omega-\omega}{2}t$$

Es treten also nur die Summenfrequenz $\omega_{schnell} = (\Omega+\omega)/2$ ('schneller' Vorgang) und die Differenzfrequenz $\omega_{langsam} = (\Omega-\omega)/2$ ('langsamer' Vorgang) auf. Diesen beiden Frequenzen sind mit $T = 2\pi/\omega$ zwei Schwingungszeiten zugeordnet, die 'schnelle' $T_{schnell} = 2\pi/\omega_{schnell}$ und die 'langsame' $T_{langsam} = 2\pi/\omega_{langsam}$.

Insbesondere für $\Omega \approx \omega$ zeigt das System deutlich eine Schwebung. In diesem Fall gilt nämlich wegen $2\gamma^2 \ll \omega^2$ näherungsweise:

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + 2\gamma^2} \approx \omega\left(1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right) = \omega + \frac{\gamma^2}{\omega} \quad \text{(siehe Mathematik-Anhang)}$$

und damit lässt sich die Lösung annähernd darstellen als:

$$\varphi_1 \approx \varphi_0 \cos\left(\omega+\frac{\gamma^2}{2\omega}\right)t\cos\frac{\gamma^2}{2\omega}t \quad \text{und} \quad \varphi_2 \approx \varphi_0 \sin\left(\omega+\frac{\gamma^2}{2\omega}\right)t\sin\frac{\gamma^2}{2\omega}t$$

Dies sind Funktionen, die einerseits mit der (relativ großen) Frequenz

$$\omega_{schnell} = \omega + \frac{\gamma^2}{2\omega}$$

schwingen, aber außerdem noch mit der (relativ kleinen) Frequenz

$$\omega_{langsam} = \frac{\gamma^2}{2\omega}$$

moduliert werden.

2.2 Aufgaben

2.2.1 Elastischer und unelastischer Stoß

Geräte: Luftkissenbahn mit Zubehör, Lichtschrankenaufbau, 2 Schlitten, 2 Aufsteckblenden, Zusatzgewichte, Feder, Plastilin, elektronischer Zeitmesser

Auf den beiden Schlitten befinden sich je eine Aufsteckblende von $s = 0{,}1$ m Länge. Durchläuft ein Schlitten mit seiner Aufsteckblende eine Lichtschranke, so wird die hierfür erforderliche Zeit vom elektronischen Registriergerät angezeigt, und es ist

$$v = \frac{0{,}1}{t}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Das Registriergerät enthält drei Displays:

1. zur Berechnung der Geschwindigkeit des stoßenden Schlittens <u>vor</u> dem Stoß
2. zur Berechnung der Geschwindigkeit des gestoßenen Schlittens <u>nach</u> dem elastischen Stoß bzw. beider Wagen nach dem unelastischen Stoß
3. zur Berechnung des stoßenden Schlittens <u>nach</u> dem Stoß; bewegt sich dieser Schlitten entgegen der ursprünglichen Richtung, leuchtet vor dem entsprechenden Zahlenwert eine Diode auf (d.h. v_1' zählt negativ).

Vor dem Start wird der zweite Schlitten in Höhe der Markierung auf der Bahn positioniert. Dem stoßenden Wagen wird die erforderliche kinetische Energie manuell zugeführt.

Aufgaben:

Bei einem elastischen Stoß, bei dem ein Schlitten gegen einen ruhenden Schlitten

a) gleicher Masse (ruhender Schlitten ohne Zusatzgewicht)

b) größerer Masse (ruhender Schlitten mit Zusatzgewicht)

stößt, soll überprüft werden, inwieweit die gemessenen Geschwindigkeiten nach dem Stoß mit den Geschwindigkeiten übereinstimmen, die sich nach Energie- und Impulserhaltungssatz aus den Massen der Schlitten und der Anfangsgeschwindigkeit des stoßenden Schlittens berechnen. Zur Erzielung eines elastischen Stoßes wird an einem der Schlitten die beiliegende Feder befestigt.

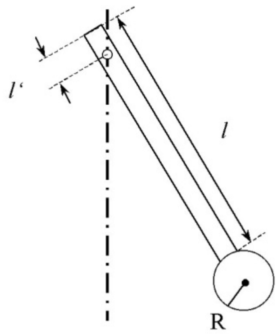
Die Versuche werden anschließend für unelastische Stöße wiederholt. Dazu wird etwas Plastilin an der Stirnseite der Schlitten befestigt. Die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß werden gemessen; die beim Stoßvorgang in Wärme umgewandelten Energiebeträge sind zu berechnen.

2.2.2 Bestimmung von Trägheitsmomenten

Geräte: Drehpendel, Kreisscheibe, Stativ mit Schieber, Kugel, Stoppuhr

Aufgaben:

a) Man berechne zunächst das Trägheitsmoment J_s der Kreisscheibe bei zentrischer Befestigung. Damit lässt sich dann die Richtkonstante D^* nach einer aus Gl. (7) abzuleitenden Beziehung zwischen der Schwingungszeit T, J_s und D^* bestimmen. Die Scheibe wird anschließend in einer Richtung in 5 verschiedenen Abständen a vom Zentrum befestigt. Nach dem Steinerschen Satz wird für jeden Abstand a das Trägheitsmoment berechnet und D^* experimentell bestimmt. Aus den gemessenen Werten D^* wird der Mittelwert berechnet.



b) Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel soll mit Hilfe der Drehschwingungen experimentell bestimmt und mit dem errechneten Wert verglichen werden. Zur Berechnung des Trägheitsmoments sind Masse und Radius der Kugel zu messen.

c) Rechenaufgabe: Eine flache Metallscheibe ist an einem hohlzylinderförmigen Stab befestigt, der um einen Punkt außerhalb des Schwerpunkts schwingt. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Anordnung. Scheibe: Masse M, Dicke d, Radius R; Hohlstab: Masse m, Länge l, Innenradius r_i, Außenradius r_a, Abstand Stabende – Drehpunkt l'. Verwenden Sie die Angaben im Grundlagenteil über Trägheitsmomente eines Hohlzylinders sowie den Steinerschen Satz.

2.2.3 Das mathematische Pendel

Geräte: Aufhängevorrichtung, Pendel verschiedener Längen, Maßband, Stoppuhr

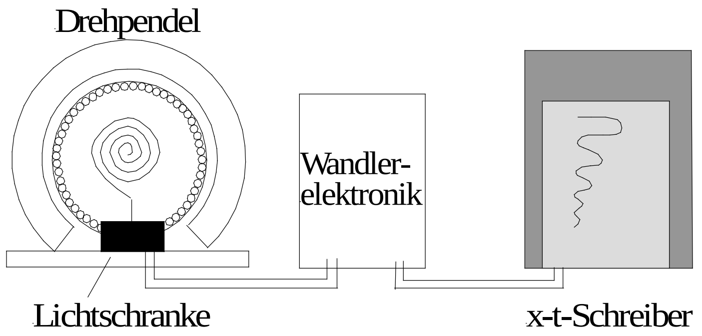
Aufgabe:

Für zwei verschiedene Pendellängen l, möglichst genau gemessen vom Aufhängepunkt bis zum Schwerpunkt der Kugel, soll die Schwingungszeit T so exakt wie möglich gemessen werden. Dazu wird die Zeit für ca. 30 Schwingungen gestoppt und T aus dieser Gesamtzeit berechnet. Die Auslenkung des Pendels soll ca. 5° nicht übersteigen. In einem Diagramm wird das Quadrat der Schwingungszeit gegen die Pendellänge l aufgetragen. Welche Größe ergibt sich aus der Steigung? Wie lang müsste ein Pendel sein, das genau mit $T = 1$ Sekunde schwingt?

2.2.4 Gedämpfte Schwingungen

Geräte: Pohlsches Drehpendel, Wandler, xt-Schreiber, Netzgerät

Das Drehpendel besteht aus einer Messingscheibe mit 21 cm Durchmesser, die reibungsarm gelagert ist und längs des Umfangs in Winkelabständen von 2,5° kleine Bohrungen trägt. Eine Schneckenfeder sorgt für die Rückstellkraft.



Am Rahmen des Gerätes befindet sich eine Doppellichtschranke. Durchläuft die Reihe der Bohrungen diese Lichtschranken, so werden die entstehenden Impulse elektronisch im nachgeschalteten Wandler in ein analoges Spannungssignal umgewandelt, das im Schreiber aufgezeichnet wird. Die Doppellichtschranke ermöglicht es, auch die Richtung der Drehbewegung aufzuzeichnen.

Am Fuß des Gerätes befindet sich ein Elektromagnet. Wird dieser mit Strömen bis max. 1 Ampère gespeist, so wird die Schwingung zusätzlich zur Luftdämpfung magnetisch gebremst ("Wirbelstrombremse").

Aufgaben:

Man bestimme zunächst die Eigenfrequenz des schwingenden Systems (bei Luftdämpfung) mit Hilfe der Schreiberaufzeichnung.

Durch Variation der Stromstärke im Dämpfungsmagneten kann man die Schwingungsbewegung verschieden stark dämpfen. Aus den aufeinanderfolgenden Amplituden sollen für verschiedene Dämpfungsströme die Dämpfungskonstanten β bestimmt werden.

2.2.5 Gekoppelte Schwingungen

Geräte: Pendel, Feder, Maßband, Stoppuhr

Aufgaben:

1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Pendel. Verwenden Sie dazu folgende Daten:
   a) Scheibe: R=5 cm, M=1,033 kg
   b) Stange: r_i=0,45 cm, r_a=0,5 cm, m=0,112 kg.
2. Messen Sie die Schwingungsdauern $T_{1,2}$ der einzelnen Pendel ohne die Kopplung. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Pendel und vergleichen Sie mit dem berechneten Trägheitsmoment.
3. Messen Sie die Schwingungsdauer T_{symm} der symmetrischen Normalschwingung. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1.
4. Messen Sie die Schwingungsdauer T_{anti} der antisymmetrischen Normalschwingung.
5. Messen Sie die Schwingungsdauern $T_{langsam}$ (langsamer Vorgang) und $T_{schnell}$ (schneller Vorgang) der Schwebung. Als Schwebungsdauer definiert man übrigens abweichend die Zeit, die zwischen zwei Stillständen *eines* Pendels vergeht und nicht die Periodendauer der Amplitudenfunktion.
6. Vergleichen Sie die ermittelten (also gemessenen und berechneten) Werte für ω (Teilaufgaben 1, 2, 4) und für Ω (Teilaufgabe 4).
7. Bestimmen Sie aus den verschiedenen Schwingungszeiten die Federkonstante der Kopplung.
8. Der Kopplungsgrad ist definiert als $K = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2}$. Zeigen Sie, dass auch gilt $K = 2\frac{\omega_{langsam}\omega_{schnell}}{\omega_{langsam}^2 + \omega_{schnell}^2}$.

   Bestimmen Sie K anhand der beiden Definitionen; falls Unterschiede auftauchen, diskutieren Sie mögliche Gründe.