

## A Anhang

### A.1 Anmerkungen zur Mathematik

#### A.1.1 Zur Differentiation und Integration

##### A.1.1.1 Gewöhnliche Differentiation

Von *gewöhnlicher Differentiation* (=gewöhnliche Ableitung) spricht man, wenn es nur eine unabhängige Variable gibt (häufig  $x$  genannt). Aus der Schule ist als Beispiel für eine Funktion  $f(x)$  sicherlich noch die Parabel bekannt:

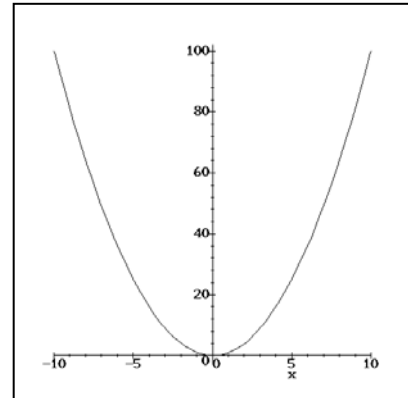
$$f(x) = a \cdot x^2 \quad \text{bzw.} \quad y = ax^2$$

Die erste Ableitung lautet

$$f' = 2a \cdot x \quad \text{bzw.} \quad y' = 2a \cdot x$$

oder gleichwertig

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = 2a \cdot x.$$



Einige weitere Ableitungen

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx} [a \cdot f(x) + b] = a \cdot \frac{df(x)}{dx} = a \cdot f'(x), \quad a \text{ und } b \text{ Konstanten}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{Produktregel})$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad (\text{Kettenregel: äußere mal innere Ableitung})$$

Beispiele

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x}} = \frac{d}{dx} (x^2 - 6x)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (x^2 - 6x)^{-3/2} \cdot (2x - 6) = -\frac{x - 3}{(x^2 - 6x)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dx} x \sin x = \sin x + x \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \sin(e^{-\cos x}) = \cos(e^{-\cos x}) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

### A.1.1.2 Partielle Differentiation

Hängt die Funktion von mehreren unabhängigen Variablen ab, z. B.  $f(x,y,z)$ , so ergeben sich die folgenden Ableitungsmöglichkeiten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Diese Ausdrücke werden *partielle Differentiale* (= partielle Ableitungen) genannt. Bei der partiellen Ableitung nach z.B.  $x$  spielen die anderen unabhängigen Variablen (also  $y$  und  $z$ ) die Rolle von Konstanten; entsprechendes gilt für die partiellen Ableitungen nach  $y$  und  $z$ .

#### Beispiele

Beispiel 1: Volumen eines Zylinders (mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$ )  $V(h,r) = \pi r^2 h$

Es folgt:  $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$  und  $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$

Beispiel 2: Frequenz eines elektrischen Schwingkreises  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ;  $C$  = Kapazität;  $L$  = Induktivität

Es folgt z.B. :  $\frac{\partial \omega}{\partial L} = \frac{\partial (LC)^{-1/2}}{\partial L} = -\frac{1}{2}(LC)^{-3/2} \cdot C = -\frac{C}{2LC\sqrt{LC}} = -\frac{\omega}{2L}$

Beispiel 3: Barometrische Höhenformel  $p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{p_0 V_0}\right)$

Diese Formel gibt den Luftdruck in einer Höhe  $h$  über dem Erdboden an. Dabei ist  $p_0$  der Druck am Boden und  $M$  die Masse der in einem Volumen  $V_0$  am Erdboden beim Druck  $p_0$  enthaltenen Luft;  $g$  ist die Erdbeschleunigung.

Es folgt zum Beispiel  $\frac{\partial p}{\partial M} = -\frac{gh}{p_0 V_0} p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{p_0 V_0}\right) = -\frac{gh}{p_0 V_0} p$

oder  $\frac{\partial p}{\partial p_0} = \exp\left(-\frac{Mgh}{p_0 V_0}\right) + p_0 \left(\frac{Mgh}{p_0^2 V_0}\right) \exp\left(-\frac{Mgh}{p_0 V_0}\right) = \frac{p}{p_0} + \frac{Mgh}{p_0 V_0} \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{Mgh}{p_0 V_0}\right) \frac{p}{p_0}$

### A.1.1.3 Integration

Einige Integrale:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

### A.1.2 Darstellung von Funktionen

Funktionen  $y = f(x)$  werden häufig in einem sogenannten  $x - y$  - Plot graphisch dargestellt, indem die  $y$  - Werte über den  $x$  - Werten (im Praktikum häufig die Versuchszeit) aufgetragen werden. Die  $x$  - Achse wird auch als Ordinate, die  $y$  - Achse als Abszisse bezeichnet.

Die allgemeine Geradengleichung lautet

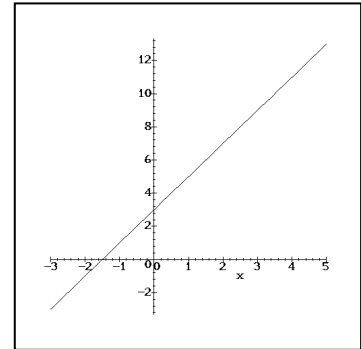
$$f(x) = a \cdot x + b$$

Dabei entsprechen  $a$  der Steigung und  $b$  dem  $y$  - Achsenabschnitt.

Während  $b$  sofort aus dem Plot abgelesen werden kann (Schnittpunkt des Graphen mit der  $y$  - Achse), muss  $a$  über ein sogenanntes Steigungsdreieck ermittelt werden. Wenn  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  die Koordinaten von zwei auf der Geraden liegenden Punkte sind, gilt:

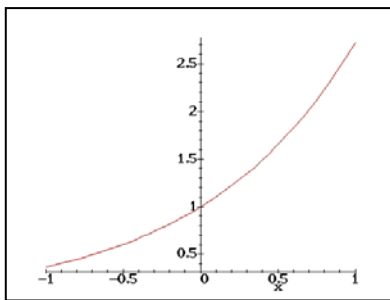
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Für das Beispiel in der Grafik gilt  $a=2$ ,  $b=3$ .

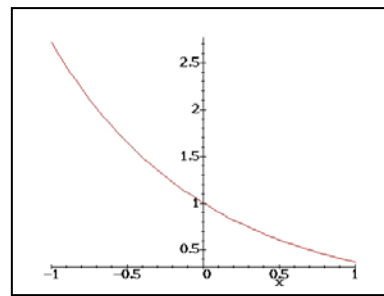


### A.1.3 Exponentialfunktion und logarithmische Darstellung

Eine enorm wichtige Funktion in der Physik ist die Exponentialfunktion



$$f(x) = \exp(x) = e^x$$



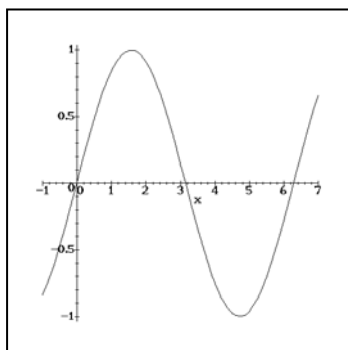
$$f(x) = \exp(-x) = e^{-x}$$

Der Verlauf dieser Funktion für positive und negative Exponenten ist oben dargestellt.

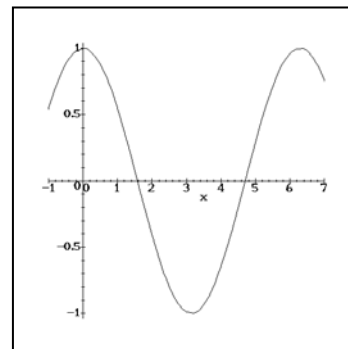
Zur Auswertung experimenteller Daten wird meist die logarithmische Darstellung benutzt. Dabei wird die  $y$  - Achse umskaliert, so dass sich für den Funktionsverlauf eine Gerade ergibt. Anhand der Steigung kann nun wiederum der Exponent ermittelt werden.

### A.1.4 Winkelfunktionen

$$f(x) = \sin x$$



$$f(x) = \cos x$$



Die beiden wichtigsten trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Cosinus* in ihrem Verlauf: Der *Sinus* geht durch den Ursprung und ist eine ungerade Funktion, während der *Cosinus* bei 1 die  $y$  - Achse schneidet und eine gerade Funktion ist (symmetrisch zur  $x$  - Achse).

Man beachte, dass die  $x$  - Achse hier im Bogenmaß (rad) und nicht in grad (Winkel) angegeben ist.

### A.1.5 Mathematische Zeichen und Schreibweisen

<	Kleiner als
<<	Viel kleiner als
≈	Ungefähr
∝	... ist proportional zu ...
∞	Unendlich

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Sind der Summationsindex und seine Grenzen eindeutig, wird auch oft nur  $\sum x_i$  geschrieben.

- $10^{-x}$  = zehn hoch minus x, z.B.  $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$
- $\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$
- $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} = (1-x)^{-1/2}$

### A.1.6 Näherungen

Für schnelle Überschlagsrechnungen gibt es eine ganze Reihe geschickter Näherungen, zum Beispiel die folgenden:

- $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$  für  $|\alpha x| \ll 1$ ;  $\alpha$  eine beliebige reelle Zahl
- $\sin x \approx x$  für  $|x| \ll 1$ ; Argument  $x$  in rad
- $\cos x \approx 1-x^2/2$  für  $|x| \ll 1$ ; Argument  $x$  in rad
- $e^x \approx 1+x$  für  $|x| \ll 1$

Beispiele

- $(1+10^{-6})^{20} \approx 1+20 \cdot 10^{-6} = 1,00002$  (exakter Wert 1,0000200002...)
- $\frac{1}{\sqrt{1-0,04}} = (1-0,04)^{-1/2} \approx 1+0,02 = 1,02$  (exakter Wert: 1,020620726...)
- $\sin 0,02 \approx 0,02$  (exakter Wert 0,01999866.....)
- $\sin 5^\circ = \sin \frac{5 \cdot 2\pi}{360} \approx \frac{5 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{36} = 0,087266462$  (exakter Wert 0,087155742...)
- $\cos 0,2 \approx 1 - \frac{0,2^2}{2} = 1 - 0,02 = 0,98$  (exakter Wert 0,980066577...)
- $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$  für  $\left|\frac{v^2}{2c^2}\right| \ll 1$
- $e^{-4y^2} \approx 1 - 4y^2$  für  $4y^2 \ll 1$

## A.2 Physikalische Konstanten und Größen

### A.2.1 Konstanten

Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s
Normfallbeschleunigung	$g = 9,80665$ m/s <sup>2</sup>
Molare Gaskonstante	$R = 8,314510$ Ws/(mol · K)
Molares Normvolumen	$V_{m,n} = 22,41383$ m <sup>3</sup> /kmol
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23}$
Loschmidt-Konstante	$N_L = 2,686754 \cdot 10^{25}$ / m <sup>3</sup>
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1,380658 \cdot 10^{-23}$ J/K
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm)
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am = $1,25663706144 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am
Faraday-Konstante	$F = 9,648456 \cdot 10^4$ As/mol
Elektrische Elementarladung	$e^- = 1,60217733 \cdot 10^{-19}$ A · s
Planck-Konstante	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$ Js ; $\hbar = 1,0545887 \cdot 10^{-34}$ Js
Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Ruhemasse des Protons	$m_p = 1,6726231 \cdot 10^{-27}$ kg
Ruhemasse des Neutrons	$m_n = 1,6749286 \cdot 10^{-27}$ kg

Quelle: H. Stöcker: Taschenbuch der Physik, 1998

### A.2.2 Energieeinheiten

	J	eV	kWh	kcal
1 J	1	$6,2419 \cdot 10^{18}$	$2,7778 \cdot 10^{-14}$	$2,3884 \cdot 10^{-4}$
1 eV	$1,6 \cdot 10^{-19}$	1	$4,45 \cdot 10^{-26}$	$3,8276 \cdot 10^{-23}$
1 kWh	$3,6 \cdot 10^6$	$2,25 \cdot 10^{25}$	1	$8,6001 \cdot 10^2$
1 kcal	$4,1868 \cdot 10^3$	$2,6126 \cdot 10^{22}$	$1,163 \cdot 10^{-3}$	1

### A.2.3 Schallgeschwindigkeit

Schallgeschwindigkeit in trockener Luft

Temperatur in °C	-40	-20	0	10	20	30	40
Schallgeschwindigkeit in m/s	307	319	332	338	344	350	355

Schallgeschwindigkeit in Wasserstoff 1286 m/s, in Helium 971 m/s.

Bemerkung: Atmet man Helium ein, hat man wegen der höheren Schallgeschwindigkeit von Helium eine gewisse Zeit lang eine sogenannte 'Mickey-Mouse-Stimme'. Grund: Schallgeschwindigkeit  $c$ , Wellenlänge  $\lambda$  und Frequenz  $f$  hängen über die Gleichung  $c = \lambda f$  zusammen. Da die Wellenlängen durch den Stimmapparat vorgegeben werden, führt eine Erhöhung der Schallgeschwindigkeit zu einer Erhöhung der Frequenz (solange eben noch Helium im Stimmapparat vorhanden ist).

### A.2.4 Spektrallinien

H: F-Linie 486,13 nm; C-Linie 656,28 nm; Na: D-Linien: 589,0 nm, 589,59 nm

Hg – Spektrum		
Wellenlänge (nm)	Farbe	Intensität
623,44	Rot	Schwach
579,07	Gelb	Sehr stark
576,96	Gelb	Sehr stark
546,07	Grün	Stark
496,00	Blaugrün	Schwach
491,60	Blaugrün	Mittel
435,83	Blau	Stark
407,78	Violett	Mittel
404,65	Violett	Mittel

### A.2.5 Dichten

Sand	$\rho_{\text{Sand}} = 1,2 - 2,0 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Messing	$\rho_M = 8,1 - 8,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Aluminium	$\rho_{\text{Alu}} = 2,707 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Quecksilber	$\rho_{\text{Sand}} = 13,546 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Glycerin	$\rho_{\text{Glycerin}} = 1,261 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Blei	$\rho_{\text{Blei}} = 11,34 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Edelstahl V4A	$\rho_{\text{V4A}} \approx 8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$		

Werte für 20 °C.

Dichte  $\rho_{\text{Wasser}}$  von Wasser (in  $\text{g/cm}^3$ ) in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  (in °C)

T / °C	$\rho_{\text{Wasser}} / \text{g cm}^{-3}$	T / °C	$\rho_{\text{Wasser}} / \text{g cm}^{-3}$	T / °C	$\rho_{\text{Wasser}} / \text{g cm}^{-3}$
00	0,99984	18	0,99860	45	0,99022
02	0,99994	20	0,99821	50	0,98804
04	0,99997	22	0,99777	60	0,98320
06	0,99994	24	0,99730	70	0,97776
08	0,99985	26	0,99679	80	0,97179
10	0,99970	28	0,99624	90	0,96530
12	0,99950	30	0,99565	100	0,95835
14	0,99925	35	0,99404		
16	0,99894	40	0,99222		

(nach Landolt-Börnstein)

**A.2.6 Viskosität (dynamische) bei 20 °C**

Wasser	$\eta_{H_2O} = 0,001006 \text{ Pa} \cdot \text{s}$	Glyzerin	$\eta_{Gly} = 1,480 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
--------	--	----------	--

**A.2.7 Temperaturkoeffizienten**

Nickel	$\zeta_{Ni} = 6,5 \cdot 10^{-3} / \text{K}$	Gold	$\zeta_{Gold} = 4 \cdot 10^{-3} / \text{K}$
--------	---	------	---

**A.2.8 Längenausdehnungskoeffizienten**

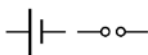



Bei 20° C; in Einheiten von  $10^{-6} / \text{K}^{-1}$

Eisen	11,8	Kupfer	16,5	Nickel	13,4
Stahl	11,7-11,8	Aluminium	23,1	Blei	28,9

**A.2.9 Spezifische Wärmekapazität  $c_w$  von Wasser bei Normaldruck**

Temperatur	$c_w$
°C	J/(kg K)
0	4218
20	4182
40	4178
60	4184
80	4196

**A.2.10 Elektrische Schaltzeichen**

Gleichstrom	=
Wechselstrom	≈
Spannungsquelle	
Widerstand	
Messgerät	
Kondensator	

### A.3 SI-Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung
Deka	da	$10^1$
Hekto	h	$10^2$
Kilo	k	$10^3$
Mega	M	$10^6$
Giga	G	$10^9$
Tera	T	$10^{12}$
Peta	P	$10^{15}$
Exa	E	$10^{18}$
Zetta	Z	$10^{21}$
Yotta	Y	$10^{24}$

Vorsatz	Kurzzeichen	Vorsatz
Dezi	d	$10^{-1}$
Zenti	c	$10^{-2}$
Milli	m	$10^{-3}$
Mikro	$\mu$	$10^{-6}$
Nano	n	$10^{-9}$
Pico	p	$10^{-12}$
Femto	f	$10^{-15}$
Atto	a	$10^{-18}$
Zepto	z	$10^{-21}$
Yocto	y	$10^{-24}$

Beispiel: 1 Picosekunde = 1 psec =  $10^{-12}$  sec.

Zur Veranschaulichung: Welche Strecke legt das Licht in 1 psec zurück? Antwort: in einer Sekunde kann Licht 7,5 Mal um die Erde herumlaufen, in 1 Picosekunde schafft es rund 0,3 Millimeter.

### A.4 Das griechische Alphabet

Alpha	A	$\alpha$	
Beta	B	$\beta$	
Gamma	$\Gamma$	$\gamma$	
Delta	$\Delta$	$\delta$	
Epsilon	E	$\epsilon$	
Zeta	Z	$\zeta$	
Eta	H	$\eta$	
Theta	$\Theta$	$\theta$	$\vartheta$
Iota	I	$\iota$	
Kappa	K	$\kappa$	
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	
My	M	$\mu$	

Ny	N	$\nu$	
Xi	$\Xi$	$\xi$	
Omikron	O	$\omicron$	
Pi	$\Pi$	$\pi$	
Rho	P	$\rho$	
Sigma	$\Sigma$	$\sigma$	$\varsigma$
Tau	T	$\tau$	
Ypsilon	Y	$\upsilon$	
Phi	$\Phi$	$\phi$	$\varphi$
Chi	X	$\chi$	
Psi	$\Psi$	$\psi$	
Omega	$\Omega$	$\omega$	



## A.5 Aufbau eines Protokolls

Der Sinn eines wissenschaftlichen Protokolls ist die Dokumentierung von Versuchen, um Forschungsergebnisse greifbar und nutzbar zu machen. Wie man ein Protokoll verfasst, ist dabei von der eigentlichen Fachrichtung weitgehend unabhängig. In diesem Sinn haben die Protokolle, die im Rahmen dieses Praktikums angefertigt werden, auch den Zweck, den üblichen Standard der wissenschaftlichen Dokumentation einzuüben.

Die Versuche sollten in einem Protokoll nachvollziehbar und reproduzierbar beschrieben werden. Dazu muss nicht jeder Handgriff geschildert werden; die Darstellung muss vielmehr eine sachkundige dritte Person in die Lage versetzen, die Versuchsergebnisse nachvollziehen bzw. den Versuch nachstellen zu können. Das Protokoll sollte dies im wesentlichen ohne zusätzliche Bücher, Praktikumskripte etc. pp. leisten. Quellenangaben haben den Sinn, die Herkunft von Theorien und Formeln nachvollziehen zu können, nicht aber, diese im Protokoll zu ersetzen.

Das Protokoll sollte wie folgt aufgebaut sein:

1. Deckblatt bzw. "Kopfleiste"

Namen von VerfasserInnen und TutorIn, Datum; Name des Versuchs

2. Einleitung

Hier soll der große Rahmen kurz dargestellt werden: Worum geht es? Zusammenfassende Erläuterung der Problematik, Zielsetzung der Versuche. Dieser Teil des Protokolls sollte nicht länger als  $\frac{1}{4}$  Seite sein. Auf eine ausführliche Darstellung der zugrundeliegenden Theorie kann und soll im Rahmen des Praktikums verzichtet werden.

3. Aufbau (für jeden Versuchsabschnitt)

Hier wird in der Regel mittels einer Skizze der Aufbau des Versuchs mit einer kurzen Beschreibung dargestellt. Falls im Skript Skizzen der Aufbauten vorhanden sind, dürfen diese unter Benennung der Quelle eingebunden werden. Abbildungen müssen immer eine nummerierte Unterschrift haben, die kurz beschreibt, was zu sehen ist.

4. Durchführung (für jeden Versuchsabschnitt)

Hier soll möglichst kurz und präzise dargestellt werden, was getan werden muss, um die Ergebnisse zu erhalten. Wie gesagt: nicht jeden Handgriff notieren, aber die Durchführung so beschreiben, dass eine dritte Person den Versuch nachstellen könnte. Wichtig ist es, auf die Besonderheiten der Messmethode einzugehen.

5. Ergebnisse (für jeden Versuchsabschnitt)

Hier werden die Ergebnisse in graphischer oder tabellarischer Form dargestellt. Notwendig ist auch die Darstellung und Erläuterung der zur Berechnung der Ergebnisse verwendeten Formeln sowie anderer wichtiger Zusammenhänge. Für jeden Zahlenwert muss der Fehler (die Messunsicherheit) angegeben werden, der entweder berechnet oder sinnvoll abgeschätzt wird. *Wichtig:* Die Ergebnisse werden hier nur dargestellt und nicht interpretiert. Dies geschieht erst in der Diskussion. *Wichtig:* Die Tabellen und Abbildungen nicht zu klein gestalten (lieber zu groß als zu klein). Sie müssen *immer*, wie bereits oben erwähnt, eine nummerierte Unterschrift haben, die kurz beschreibt, was in der Tabelle bzw. in der Abbildung zu sehen ist.

6. Diskussion (für jeden Versuchsabschnitt)

Hier werden die Ergebnisse interpretiert, indem sie z.B. mit Literaturdaten verglichen werden. Dabei ist eine realistische und kritische Bewertung der eigenen Messergebnisse deutlich wichtiger als ein möglichst genaues Treffen eines Zielwertes oder eine möglichst genaue Reproduktion von Literaturwerten. Es sollte versucht werden, die Abweichungen unter Einbeziehung des Fehlers zu erklären.

## 7. Eventuell abschließende Bemerkungen

Hier können eigene Erfahrungen mit dem "Versuchten" dargestellt werden sowie Anregungen und Kritik an den Versuchsaufbauten.

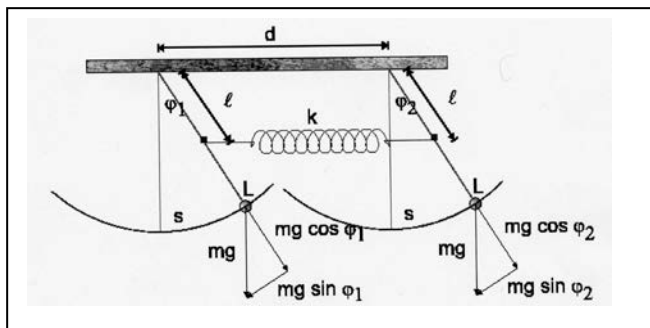
## 8. Länge des Protokolls

Das gesamte Protokoll sollte nicht wesentlich länger als 10 Seiten lang sein

## 9. Abgabe des Protokolls

Das Protokoll muss spätestens eine Woche nach der Versuchsdurchführung abgegeben werden. Dies kann entweder im Praktikumstermin oder während der Sprechstunde passieren oder auch zwischendurch nach Absprache oder ab ins Postfach.

## A.6 Lösungen der Bewegungsgleichungen gekoppelter Pendel



Zwei Fadenpendel mit dem Abstand  $d$  und der Länge  $L$  sind mit einer Feder der Ruhelänge  $d$  und der Federkonstanten  $k$  gekoppelt. Wenn das linke Pendel um  $\varphi_1$  und das rechte Pendel um  $\varphi_2$  ausgelenkt wird (bei beiden wird der Winkel nach rechts positiv gezählt), dann verändert sich die Länge der Feder für kleine Auslenkungen um  $\Delta d = l(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \approx l(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Mit der (relativen) Länge des Hebelarms  $l/L$  ist also die Kraft, die auf das linke Pendel ausgeübt wird,  $F_{F1} = -k\Delta d \cdot l/L \approx -kl(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot l/L$ .

Entsprechend ist die Kraft auf das rechte Pendel  $F_{F2} = -k(-\Delta d) \cdot l/L \approx kl(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot l/L$ . Die an den Massen angreifenden Gravitationskräfte sind  $F_{G1} = -mg \sin \varphi_1 \approx -mg\varphi_1$  und  $F_{G2} = -mg \sin \varphi_2 \approx -mg\varphi_2$ .

Wir erhalten somit die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$mL\ddot{\varphi}_1 = -mg\varphi_1 - kl(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot l/L \quad ; \quad mL\ddot{\varphi}_2 = -mg\varphi_2 + kl(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot l/L$$

$$\text{bzw.} \quad \ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{L}\varphi_1 - \frac{kl^2}{mL^2}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ; \quad \ddot{\varphi}_2 = -\frac{g}{L}\varphi_2 + \frac{kl^2}{mL^2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\omega^2 = g/L, \quad \gamma^2 = kl^2/(mL^2); \quad \Omega^2 = \omega^2 + 2\gamma^2$$

Verwendet man statt des Fadenpendels (Trägheitsmoment  $mL^2$ ) ein physikalisches Pendel mit dem Trägheitsmoment  $J$ , schreiben sich die Abkürzungen als

$$\omega^2 = mgL/J, \quad \gamma^2 = kl^2/J; \quad \Omega^2 = \omega^2 + 2\gamma^2$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2\varphi_1 - \gamma^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ; \quad \ddot{\varphi}_2 = -\omega^2\varphi_2 + \gamma^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{A.6.1})$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (A.6.1) lautet:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= a_+ \cos \omega t + b_+ \sin \omega t + a_- \cos \Omega t + b_- \sin \Omega t \\ \varphi_2(t) &= a_+ \cos \omega t + b_+ \sin \omega t - a_- \cos \Omega t - b_- \sin \Omega t\end{aligned}\quad (\text{A.6.2})$$

Zur Festlegung der vier freien Konstanten ( $a_+$ ,  $a_-$ ,  $b_+$ ,  $b_-$ ) benötigt man vier Anfangsbedingungen, zum Beispiel  $\varphi_1(t=0)$ ,  $\dot{\varphi}_1(t=0)$ ,  $\varphi_2(t=0)$ ,  $\dot{\varphi}_2(t=0)$ ). Dabei sind die Geschwindigkeiten gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(t) &= -\omega a_+ \sin \omega t + \omega b_+ \cos \omega t - \Omega a_- \sin \Omega t + \Omega b_- \cos \Omega t \\ \dot{\varphi}_2(t) &= -\omega a_+ \sin \omega t + \omega b_+ \cos \omega t + \Omega a_- \sin \Omega t - \Omega b_- \cos \Omega t\end{aligned}\quad (\text{A.6.3})$$

Je nach Wahl der Anfangsbedingungen erhält man verschiedene Schwingungstypen.

1. Normalschwingung, symmetrischer Fall: Beide Pendel werden um den gleichen Winkel ausgelenkt und zum Zeitpunkt  $t=0$  losgelassen. Die Kopplung der beiden Pendel kommt dabei nicht zur Geltung, da die Feder ihre Spannung nicht ändert und die Pendel ohne Feder genauso schwingen würden. Die Anfangsbedingungen lauten also  $\varphi_1(t=0) = \varphi_0$ ,  $\varphi_2(t=0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$  und  $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ . Durch Einsetzen in die Gleichung (A.6.2) und (A.6.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi_1(t=0) &= \varphi_0 = a_+ + a_- ; \varphi_2(t=0) = \varphi_0 = a_+ - a_- \\ \dot{\varphi}_1(t=0) &= 0 = \omega b_+ + \Omega b_- ; \dot{\varphi}_2(t=0) = 0 = \omega b_+ - \Omega b_-\end{aligned}$$

und daraus folgt  $\varphi_0 = a_+$ ;  $0 = a_- = b_+ = b_-$ . Die Lösung der Bewegungsgleichung (A.6.1) lautet in diesem Fall also

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos \omega t ; \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega t \quad (\text{symmetrischer Fall})$$

2. Normalschwingung, antisymmetrischer Fall: Die beiden Pendel werden um den gleichen Winkel, aber in entgegengesetzter Richtung ausgelenkt. Die Pendel schwingen dann weiterhin gegeneinander, und zwar mit der 'gestörten' Frequenz  $\Omega$ . Die Anfangsbedingungen lauten also  $\varphi_1(t=0) = \varphi_0$ ,  $\varphi_2(t=0) = -\varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$  und  $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ . Durch Einsetzen in die Gleichung (A.6.2) und (A.6.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi_1(t=0) &= \varphi_0 = a_+ + a_- ; \varphi_2(t=0) = -\varphi_0 = a_+ - a_- \\ \dot{\varphi}_1(t=0) &= 0 = \omega b_+ + \Omega b_- ; \dot{\varphi}_2(t=0) = 0 = \omega b_+ - \Omega b_-\end{aligned}$$

und daraus folgt  $\varphi_0 = a_-$ ;  $0 = a_+ = b_+ = b_-$ . Die Lösung der Bewegungsgleichung (A.6.1) lautet in diesem Fall also

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos \Omega t ; \varphi_2(t) = -\varphi_0 \cos \Omega t \quad (\text{antisymmetrischer Fall})$$

3. Schwebung: Dieser Fall unterscheidet sich von den Normalschwingungen dadurch, dass beide Frequenzen  $\omega$  und  $\Omega$  auftauchen. Schwebung erhält man, wenn man eine Masse zu Beginn auslenkt, während die andere in der Gleichgewichtslage ist, also zum Beispiel für  $\varphi_1(t=0) = 0$ ,

$\varphi_2(t=0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$  und  $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ . Durch Einsetzen in die Gleichungen (A.6.2) und (A.6.3) ergibt sich:

$$\varphi_1(t=0) = \varphi_0 = a_+ + a_- ; \varphi_2(t=0) = 0 = a_+ - a_-$$

$$\dot{\varphi}_1(t=0) = 0 = \omega b_+ + \Omega b_- ; \dot{\varphi}_2(t=0) = 0 = \omega b_+ - \Omega b_-$$

und daraus folgt  $\varphi_0 = a_+ = a_- ; 0 = b_+ = b_-$ . Die Lösung der Bewegungsgleichung (A.6.1) lautet in diesem Fall also

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega t + \frac{\varphi_0}{2} \cos \Omega t ; \varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega t - \frac{\varphi_0}{2} \cos \Omega t \quad (\text{Schwebungsfall})$$