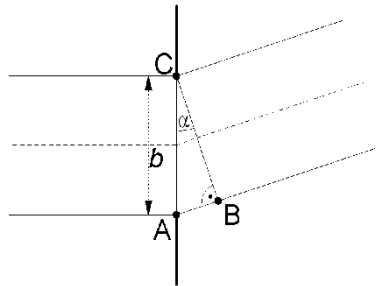


Versuch 9: Beugung und Interferenz

9.1 Grundlagen

9.1.1 Beugung am Spalt

Wird ein Spalt mit der Spaltbreite b mit parallellem Licht beleuchtet, so kommt es auf einem Schirm, der sich im Abstand $l \gg b$ hinter dem Spalt befindet, zu Interferenzerscheinungen: Die Huygensschen Elementarwellen der Spaltöffnung interferieren, auf dem Schirm entsteht ein System heller und dunkler Zonen, da Lichtwellen gleicher Phase sich gegenseitig verstärken und Lichtwellen in gegenläufiger Phase sich gegenseitig auslöschen.



Näherungsweise kann man wie folgt argumentieren: Haben die von den Punkten A und C ausgehenden Randwellen einen Wegunterschied, der einem ganzzahligen Vielfachen einer ganzen Wellenlänge entspricht (d.h. die Länge der Strecke AB entspricht einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge), so kommt es unter dem Winkel α zu einer Auslöschung aller Wellenzüge. Denn dann beträgt zum Beispiel der Gangunterschied zwischen einem 'Lichtbündel' am Rand bei C und einem in der Mitte gerade eine halbe Wellenlänge; diese beiden Bündel löschen sich also aus. Für jedes weitere Lichtbündel findet sich eines mit einem Gangunterschied einer halben Wellenlänge; die Bedingung für die Intensitätsminima lautet demnach

$$\sin \alpha = \frac{k\lambda}{b}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Beträgt der Wegunterschied AB ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge,

$$\sin \alpha = \frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{b}$$

so entsteht auf dem Schirm in Richtung α ein Intensitätsmaximum. Mit Hilfe dieser beiden Bedingungen lässt sich demnach die Wellenlänge oder aber die Spaltbreite b bestimmen, wenn die jeweils andere Größe bekannt ist.

Wird der Spalt durch eine kreisförmige Öffnung mit dem Radius R (bzw. Durchmesser D) ersetzt, so entsteht eine radialsymmetrische Intensitätsverteilung, und es gilt für die Intensitätsminima der Beugungsfigur

$$\sin \alpha = \frac{m\lambda}{R} = \frac{2m\lambda}{D}$$

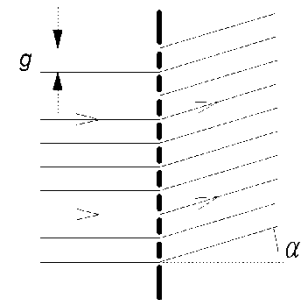
mit $m = 0,1,2, 1,2, 1,6, 2,1,2, \dots$ (Diese Faktoren entstehen aufgrund der komplizierten Geometrie bei der Überlagerung der von einer Kreisfläche ausgehenden Elementarwellen; Stichwort: Bessel-Funktionen).

Nach einem Lehrsatz aus der Wellenoptik (dem Babinet'schen Theorem) ist das Beugungsbild eines Spaltes gleich dem eines gleich breiten Gegenstandes. Wird der Spalt also durch ein gleich großes Hindernis ersetzt (Draht, Faden o.ä.), so gelten die oben genannten Beziehungen für die Minima und die Maxima ebenso.

9.1.2 Beugung am Gitter

Gegenüber dem Spalt hat ein optisches Gitter eine Vielzahl sehr schmaler, parallel zueinander angeordneter Spalte. Die Zahl der Spalte beträgt bei den im Praktikum verwendeten Gittern bis zu 600 pro Millimeter Gitterbreite. Der Abstand zweier Spalte voneinander ist dann $1/600$ mm oder

$$\frac{1}{600000} \text{ m} = 1,67 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,67 \text{ } \mu\text{m}$$



Dieser Spaltabstand heißt Gitterkonstante g .

Für die folgende Argumentation wird angenommen, dass die Spaltbreite vernachlässigbar klein ist. Jeden einzelnen Spalt eines Gitters kann man näherungsweise als ein Huygenssches Zentrum einer Elementarwelle auffassen. Beleuchtet man ein Gitter mit monochromatischem Licht, so überlagern sich die von den einzelnen Gitterspalten ausgehenden Elementarwellen so, dass – unter den Winkeln α_k gegenüber der optischen Achse – eine Reihe scharfer, heller Maxima entsteht. Dies ist immer dann der Fall, wenn der Wegunterschied Δ der benachbarten Wellenzüge einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge entspricht:

$$\Delta = k\lambda = g \sin \alpha \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Folglich gilt für die Winkelabhängigkeit der Maxima

$$\sin \alpha_{\text{max}} = \frac{k\lambda}{g} \quad (1)$$

Ist der Wegunterschied Δ nur geringfügig von $k\lambda$ verschieden, z.B.

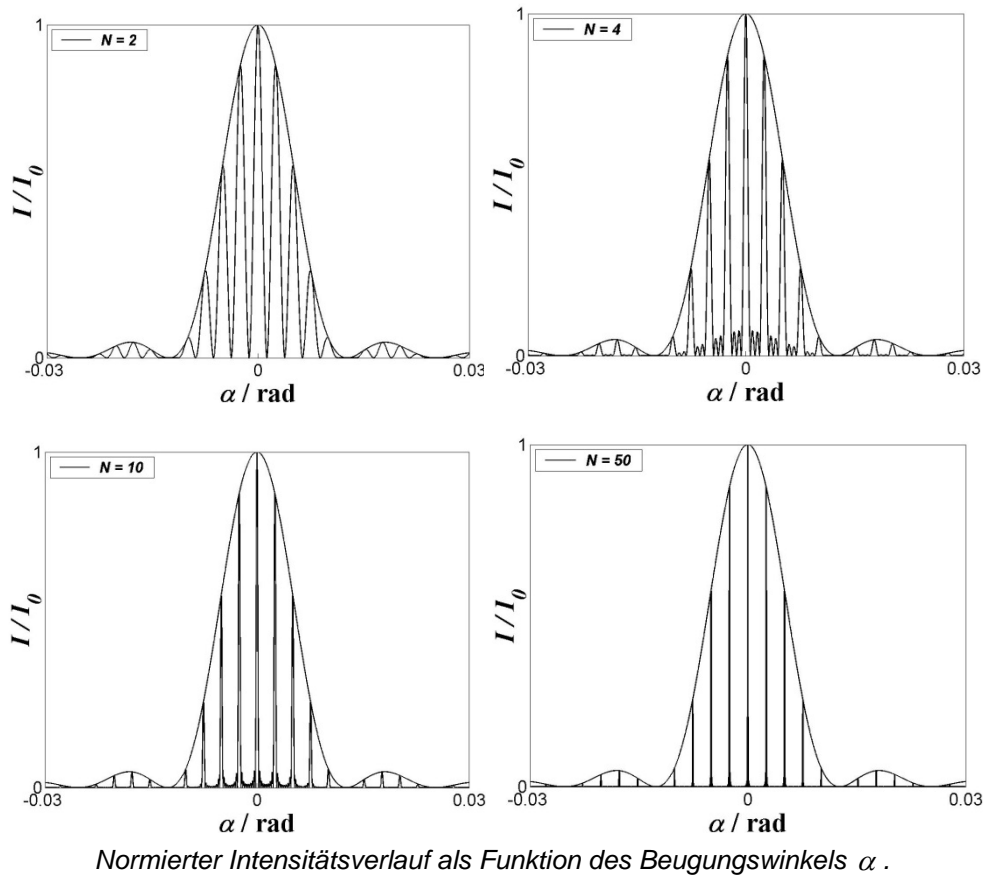
$$\Delta = g \sin \alpha_{\text{min}} = k\lambda + \frac{\lambda}{N} \quad (2)$$

(N = Anzahl der Gitterspalte, die zur Beugung beitragen), so interferieren die von je zwei um $N/2$ voneinander entfernten Spalten ausgehenden Wellenzüge zu einem Minimum. In ähnlicher Weise lassen sich für alle Abweichungen um $z\lambda/N$ ($z = 1, 2, 3, \dots, N-1$) von $k\lambda$ stets Paare von Wellenzügen finden, die untereinander einen Wegunterschied von einer halben Wellenlänge haben und sich daher auslöschen. Zwischen den scharfen Spektrallinien befinden sich demnach $N-1$ Minima und $N-2$ sogenannte Nebenmaxima, die allerdings mit steigendem N immer lichtschwächer werden.

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass das Beugungsbild eines Gitters das Beugungsbild des Einzelspaltes multipliziert mit einem durch das Gitter bestimmten Interferenzterm ist:

$$I(\alpha) = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \right)^2}_{\text{Beugungsterm Einzelspalt}} \underbrace{\left(\frac{\sin\left(N \frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi g}{\lambda} \sin \alpha\right)} \right)^2}_{\text{Interferenzterm Gitter}}$$

Im Folgenden ist der Intensitätsverlauf für verschiedene N dargestellt ($g = 5b$).



Die Einhüllenden stellen jeweils den Verlauf des Beugungsbildes des Einzelspalts dar. Der Interferenzterm, der durch die Interferenz der Lichtwellen aus den N Spalten entsteht, führt zum Auftreten von Interferenzmaxima, zwischen denen jeweils $N-2$ Nebenmaxima entstehen.

Emittiert die Lichtquelle eine weitere "Lichtfarbe" mit der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$, so überlagert sich dem durch die Wellenlänge λ bestimmten Beugungsbild ein weiteres; jedoch ist hierbei gemäß Gl. (1) der Winkelabstand der Maxima größer:

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{k(\lambda + \Delta\lambda)}{g}$$

Bei spektralanalytischen Messungen mit dem Gitterspektrometer ist die Frage von Belang, wie klein der Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ werden kann, ohne dass die durch λ und $\Delta\lambda$ bestimmten Beugungsmaxima für den Beobachter ineinander "verschimmen". Maßgeblich hierfür ist das Auflösungsvermögen A des Gitters. Man versteht darunter die Größe $A = \lambda / \Delta\lambda$; sie gibt an, bei welchem Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ noch getrennte Maxima erkennbar sind (nicht zu verwechseln mit dem Auflösungsvermögen des Mikroskops).

Für eine deutliche Trennung muss das Maximum der zweiten Welle (mit Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$) mindestens über dem ersten Minimum neben dem entsprechenden Maximum der ersten Welle (λ) liegen (sogenanntes Rayleigh-Kriterium). Für das Maximum gilt nach Gleichung (1):

$$g \sin\alpha_{\max} = k(\lambda + \Delta\lambda)$$

und für das erste Minimum gilt nach Gleichung (2):

Versuch 9: Beugung und Interferenz

$$g \sin \alpha_{\min} = k\lambda + \lambda / N$$

Wegen $\alpha_{\max} \geq \alpha_{\min}$ muss gelten: $k(\lambda + \Delta\lambda) \geq k\lambda + \frac{\lambda}{N}$. Daraus folgt:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq kN.$$

Das Auflösungsvermögen steigt also mit der Ordnungszahl k der beobachteten Maxima sowie mit der Zahl N der Gitterspalte, die vom parallelen Licht durchsetzt werden.

9.1.3 Das Auflösungsvermögen des Mikroskops

Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops ist

$$V = \frac{ts}{f_{\text{Obj}} f_{\text{Ok}}},$$

also der Tubuslänge t direkt und den Brennweiten von Objektiv und Okular umgekehrt proportional. Hieraus folgt, dass man im Prinzip Mikroskope mit beliebig hoher Vergrößerung konstruieren kann, indem man die Tubuslänge hinreichend vergrößert und Optiken mit sehr kleinen Brennweiten verwendet.

Falsch ist allerdings der Schluss, dass man damit auch beliebig feine Strukturen eines Gegenstands erkennen kann. Liegt nämlich die Objektgröße im Bereich der Größenordnung der Lichtwellenlänge, so lassen sich auch bei beliebiger Vergrößerung und bei Verwendung von Objektiven mit sphärisch und chromatisch korrigierten Linsen keine Einzelheiten des Objekts mehr erkennen. Ursache hierfür sind Beugungserscheinungen: Ein Objektpunkt wird nie als Punkt, sondern immer als kleines Beugungsscheibchen abgebildet.

Zwei dicht benachbarte Punkte des Objekts mit dem Abstand d werden noch getrennt abgebildet, wenn die ihnen zugeordneten Beugungsscheibchen noch getrennt erscheinen. Dies ist der Fall, wenn

$$d > d_{\min} = \frac{0,610\lambda}{\sin \alpha}$$

ist. Hierbei ist α der halbe Öffnungswinkel des Objektivs, d.h. die Hälfte des Winkels, unter dem der nutzbare Durchmesser der Objektivlinse vom Objektpunkt aus gesehen wird. λ ist die Wellenlänge in dem Medium zwischen Objekt und Objektiv. Verwendet man eine Immersionsflüssigkeit¹ mit der Brechzahl n , so wird $\lambda = \lambda_{\text{vak}} / n$ und

$$d > d_{\min} = \frac{0,610\lambda_{\text{vak}}}{n \sin \alpha}$$

Das Produkt $n \sin \alpha$ in diesen Gleichungen heißt *numerische Apertur*; es handelt sich hierbei um eine gerätespezifische Konstante.

Unter Auflösung versteht man den Kehrwert des kleinstmöglichen noch abbildbaren Abstands zweier Objektpunkte:

$$A = 1/d_{\min} = \frac{n \sin \alpha}{0,610\lambda_{\text{vak}}} \quad (3)$$

¹ Flüssigkeit zwischen Objektiv und Präparat, z.B. Immersionsöl ($n=1,52$), Wasser ($n=1,33$) oder Glycerin ($n=1,47$).

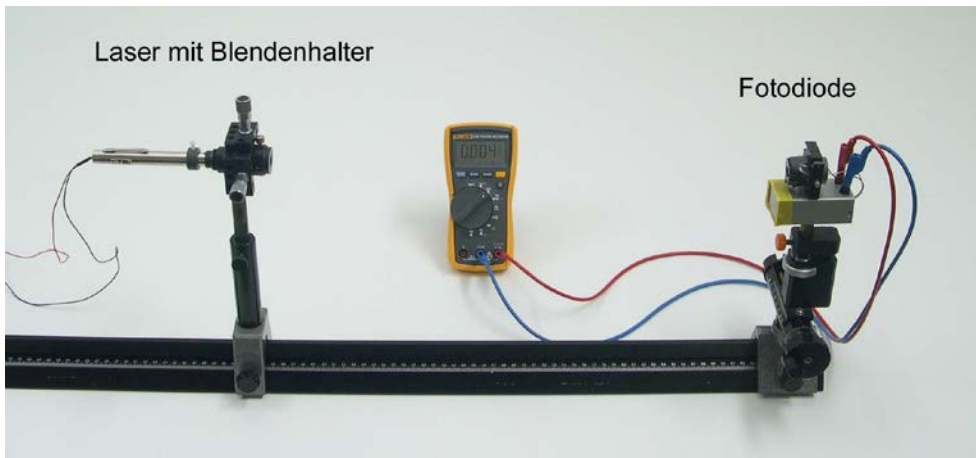
Die Gleichung zeigt, dass die Auflösung durch Verwendung von kurzwelligerem Licht (z.B. Blaufilter, UV-Mikroskopie) oder durch Vergrößerung der numerischen Apertur verbessert werden kann.

Zitat aus 'Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, Optik': "Es muss noch erwähnt werden, dass die obigen Erörterungen insofern mit einer gewissen Willkür behaftet sind, als definitionsgemäß festgesetzt wurde, dass zwei Lichtpunkte erst dann zu trennen seien, wenn das Zentrum des einen Beugungsscheibchens mit dem ersten dunklen Ring des anderen zusammenfällt. Es wird aber unter Umständen eine Trennung auch schon dann möglich, wenn der Abstand etwas kleiner ist; das hängt von physiologischen Faktoren ab. Daher können unsere Betrachtungen nur die richtige Größenordnung des Auflösungsvermögens ergeben, was auch die Erfahrung bestätigt. Man fügt daher in der Praxis auf der rechten Seite der Gleichung [hier im Skript Gl. (3)] noch einen 'physiologischen Faktor' zu, der größer als 1 ist und nur im ungünstigsten Fall den Wert 1 selbst annimmt."

9.2 Experimente

9.2.1 Beugung am Spalt, Bestimmung der Spaltbreite

Geräte: Laser, optische Bank 1,5 m, Reiter, Spaltblende in Justierfassung, Schirm, Verschiebeeinrichtung, Fotodiode in Fassung, Voltmeter

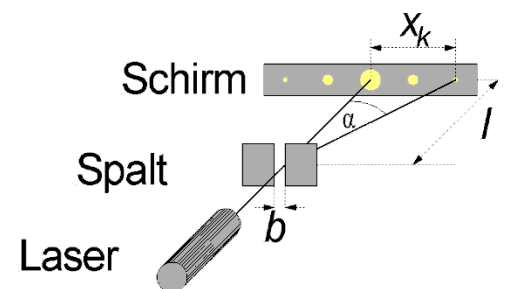


Versuchsaufbau zur Beugung am Spalt

Auf der optischen Bank werden ein Laser als Lichtquelle, ein Spalt und ein Schirm befestigt und genau auf die optische Achse justiert, so dass das Beugungsbild auf dem Schirm zu sehen ist.

Zur Aufnahme der Intensitätsverteilung wird der Schirm aus dem Aufbau entfernt; an seiner Stelle wird ein quer verschiebbarer Reiter mit einer Fotodiode auf der optischen Bank befestigt. Die Fotodiode wandelt die ortsabhängige Lichtintensität in ein proportionale elektrische Spannung um; diese kann mit einem Voltmeter gemessen werden.

Zunächst wird die Fotodiode mit den Feinverschiebeeinheiten vertikal (y -Richtung) und horizontal (x -Richtung) zur Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls (optische Achse) so verschoben, dass ein maximales Spannungssignal angezeigt wird. Dann befindet sich die Öffnung des Fotodetektors genau in der optischen



Versuch 9: Beugung und Interferenz

Achse. Anschließend wird die Fotodiode in geeigneten Schritten in x-Richtung verschoben und die der Lichtintensität proportionale Spannung in Abhängigkeit vom Abstand x zur Achse gemessen. Dabei sollen mindestens vier Nebenmaxima erfasst werden. Der gemessene Spannungsverlauf wird in einem Diagramm logarithmisch gegen den Abstand aufgetragen. Aus den Querabständen x_k der Intensitätsmaxima und dem Abstand l zwischen Spalt und Fotodiode kann der Sinus des Beugungswinkels k -ter Ordnung bestimmt werden. Mit Hilfe der gemessenen Größen der Intensitätsmaxima und der bekannten Lichtwellenlänge λ soll jeweils die Breite b des verwendeten Spaltes bestimmt werden. Aus den ermittelten Werten für b wird der Mittelwert und die Standardabweichung des Spaltes berechnet. Was ergibt ein Vergleich mit dem aufgedruckten Wert, was sind mögliche Fehlerursachen?

9.2.2 Dicke eines Hindernisses

Geräte: Wie im Versuch zur Beugung am Spalt, jedoch anstelle des Spaltes ein Draht
Statt auf den Spalt, trifft das Licht nun auf einen dünnen Draht, dessen Dicke gemessen werden soll. Die Messung wird mit Hilfe des Schirms (statt der Fotodiode) vorgenommen, indem die Maxima (mindestens 6) direkt auf dem Millimeterpapier markiert und ausgemessen werden. Aus den Querabständen x_k der Intensitätsmaxima und dem Abstand l zwischen Draht und Schirm kann wiederum der Sinus des Beugungswinkels k -ter Ordnung bestimmt werden. Mit Hilfe der gemessenen Größen und der bekannten Lichtwellenlänge λ soll die Dicke des verwendeten Drahtes bestimmt werden. Was ergibt ein Vergleich des Beugungsbildes des Drahtes mit dem Ergebnis aus 9.2.1 ?

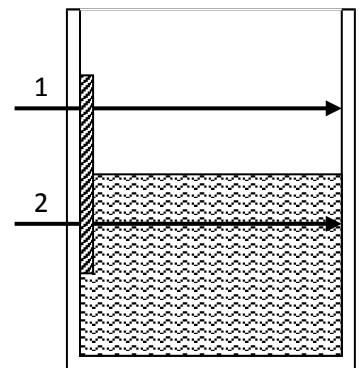
9.2.3 Brechzahl von Wasser und die Lichtgeschwindigkeit in Wasser

Geräte: Laser, Küvette mit Beugungsgitter, Messschieber

Mittels Beugung von monochromatischem Licht durch ein Gitter sollen die Brechzahl von Wasser (für die verwendete Lichtwellenlänge) und die Lichtgeschwindigkeit in Wasser bestimmt werden. Das Gitter befindet sich an der Stirnseite einer Küvette. Diese ist bis zur halben Höhe des Gitters mit Wasser gefüllt. Auf der Rückseite der Küvette sind die Beugungsfiguren erkennbar.

Die Winkel zwischen dem Beugungsmaximum k -ter Ordnung und dem Maximum nullter Ordnung sind mit Hilfe eines Messschiebers leicht bestimmbar. Wegen der Lichtbrechung an der Küvettenwand müsste der Abstand der Maxima eigentlich an der Innenwand der Küvette gemessen werden; die Messung an der Außenwand bedingt wegen der Brechung einen kleinen, jedoch vernachlässigbaren Fehler.

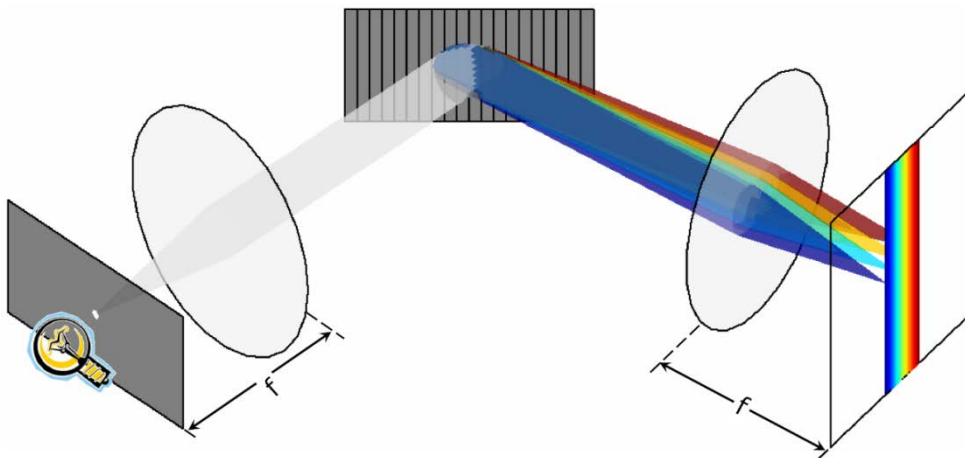
Das Licht des Lasers durchsetzt das Gitter zunächst *oberhalb* des Wasserspiegels; die Winkel zwischen dem nullten und dem 1. bzw. 2., 3., ... Maximum werden so genau wie möglich gemessen. Anschließend hebt man die Küvette soweit an, dass das Gitter *unterhalb* des Wasserspiegels vom Licht durchsetzt wird.



Die Winkel werden analog gemessen. Leiten Sie aus der Gl. (1), dem Gesetz $c = \lambda \nu$ und dem Snelliusschen Brechungsgesetz eine Beziehung zur Berechnung von n_{Wasser} und c_{Wasser} her. Die Lichtgeschwindigkeit in Luft beträgt $2,9979 \cdot 10^8$ m/s. Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit in Wasser? Wie groß ist die Brechzahl von Wasser bei der verwendeten Lichtwellenlänge?

9.2.4 Gitterspektrometer: Wellenlängenmessung und spektrale Auflösung

Geräte: Spektrallampen, Stativ mit Fassung, Netzgerät für Spektrallampe, Spektro-Goniometer, Gitter, Abdeckblenden



Schematischer Aufbau eines Gitterspektrometers, mit Lichtquelle und Blende, Linse zur Parallelisierung des Lichtbündels, Reflexionsgitter, und Linse zur spektral zerlegten Abbildung der Blende in der Bildebene. Statt einer Blende wird meist ein Spalt benutzt.

1. Die Wellenlängen der im sichtbaren Bereich liegenden Spektrallinien des Heliums (oder Quecksilbers) werden mit einem Spektro-Goniometer gemessen. Dazu wird die Spektrallampe direkt vor den Eintrittsspalt des Spektrometers gestellt, und es werden die Winkel, unter denen die einzelnen Spektrallinien durch das Gitter gebeugt werden, bestimmt. Hieraus lassen sich aufgrund der Beugungsgesetze am Gitter die Wellenlängen berechnen. Voraussetzung für eine saubere Messung ist unter anderem, dass das Gitter genau senkrecht zum einfallenden Licht ausgerichtet ist (Drehtisch am Gerät arretieren). Dieser Versuchsteil wird mit dem Gitter mit 600 Linien pro Millimeter durchgeführt.
2. In gleicher Weise werden die Wellenlängen im Emissionsspektrum des Natriums gemessen. Es handelt sich (im wesentlichen) um zwei Linien, deren Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ nur 0,6 nm (d.h. $0,6 \cdot 10^{-9}$ m) beträgt. Dieser Versuchsteil ist mit dem 100-er und dem 600-er Gitter durchzuführen.
3. Wie groß ist die zur deutlichen Trennung beider Spektrallinien erforderliche Auflösung des Spektrometers?
4. Mit welchen experimentellen Parametern kann diese Auflösung erreicht werden? Vergleichen Sie dies mit den Daten des Spektrometers.

Achten Sie bitte darauf, dass die Winkel auf dem Goniometer in Grad und nicht im Bogenmaß angegeben sind. Für die Auswertung brauchen Sie zudem den Durch-

Versuch 9: Beugung und Interferenz

messer des Lichtflecks auf dem Gitter, um die Zahl N der Gitterspalte bestimmen zu können.

9.2.5 CD oder DVD?

Geräte: Optische Bank, Laser und Lochblende auf Schiebereiter, CD - und DVD - Rohling auf Schiebereiter

CD- und DVD- Rohlinge besitzen vorgepresste Spuren, um den Schreiblaser zu führen. Die Spuren wirken bei Lichteinfall wie ein Gitter (daher das Farbenspiel auf der vermeintlich glatten Oberfläche zum Beispiel unter einer Lampe).

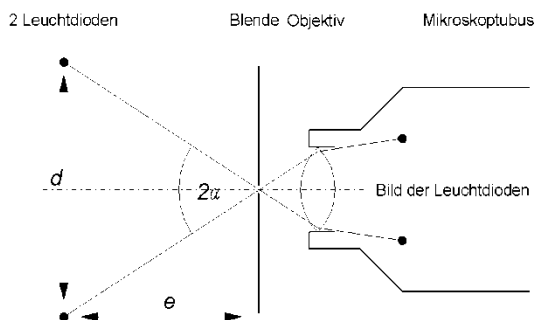
Der Abstand der Spuren einer CD ist $(1,6 \pm 0,1) \mu\text{m}$, einer DVD $(0,74 \pm 0,01) \mu\text{m}$.

Justieren Sie die Rohlinge so auf der optischen Bank, dass Sie ein möglichst genaues Ergebnis erhalten. Welches ist die CD, welches die DVD? Welche Spurbstände ergeben sich aus der Vermessung des Beugungsbildes?

9.2.6 Auflösungsvermögen des Mikroskops und Objektivapertur

Geräte: Optische Bank, Mikroskoptubus, 2 Leuchtdioden in Messverschiebereiter, Spannungsquelle 6 V, Kreisblende, Okular, 1 Objektiv in Objektivrevolver.

Die numerische Apertur eines Mikroskopobjektivs soll gemessen und mit dem aufprägten Wert verglichen werden.



Zur Messung werden die Geräte so justiert, dass die Öffnung der Kreisblende scharf in der Mitte des Gesichtsfeldes des Mikroskops zu sehen ist. Anschließend wird das Okular entfernt und das Bild der Leuchtdioden im Tubus beobachtet (Abstand Auge – Mikroskop $> 30 \text{ cm}$.). Die Dioden werden dann soweit nach außen geschoben, bis ihre Bilder auf dem Rand des Gesichtsfeldes liegen. Bei weiterer Verschiebung über diesen Punkt hinaus werden die Dioden nicht mehr abgebildet. Über geometrische Beziehungen kann nun die Apertur berechnet werden.

1. Wie groß ist das Auflösungsvermögen des Objektivs bei dem für die Messung verwendeten Rotlicht der Wellenlänge ca. 600 nm ?
2. Wie groß ist der kleinste Abstand zweier Objektpunkte, den das Objektiv bei Verwendung von blauem Licht mit der Wellenlänge 420 nm noch auflösen kann?