Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 8. Januar 2018

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2017/18, Übungsblatt 11)

`http://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/statistik/`

Abgabe: Montag, 15. Januar bis 12:00 Uhr

39) Das freie Bose-Gas in zwei Raumdimensionen

Gegeben ist ein ideales Bose-Gas, dessen N Teilchen sich nur in zwei Raumdimensionen auf einer Fläche A frei bewegen können.

a) Zeigen Sie, dass die energieabhängige Einteilchen-Zustandsdichte für dieses System die Form

$$g(\varepsilon) = \frac{A}{h^2} 2\pi m$$

besitzt, wobei m die Masse der Bosonen bezeichnet.

b) Zeigen Sie, dass diejenige Temperatur, bei der die Hälfte aller Teilchen den Grundzustand besetzt, im thermodynamischen Limes (d.h. für $N \to \infty$ und $A \to \infty$, wobei die Dichte N/A konstant bleiben soll) gegen $T = 0$ geht.

<u>Hinweis:</u> Nutzen Sie aus, dass die Bose-Funktion $g_1(z) = -\ln(1 - z)$ elementar ist. **(3P)**

40) Bose–Einstein-Kondensation von Teilchen mit innerem Freiheitsgrad

Gegeben ist ein ideales „freies“ Gas, das aus Bosonen der Masse m mit einem inneren Freiheitsgrad besteht. Dieser Freiheitsgrad soll nur zwei Werte annehmen können. Die Einteilchen-Energien lauten daher $\varepsilon_{p,j} = p^2/(2m) + E_j$ mit $j = 0, 1$; es darf $E_0 = 0$ gesetzt werden. Weiterhin sei T_C^0 die (bereits bekannte) Temperatur, bei der *ohne* den inneren Freiheitsgrad die Bose–Einstein-Kondensation einsetzen würde, und es sei $E_1/(k_\mathrm{B} T_C^0) \gg 1$. Zeigen Sie, dass die tatsächliche Kondensationstemperatur T_C des Gases im Vergleich zu T_C^0 abgesenkt wird:

$$T_C \approx T_C^0 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\mathrm{e}^{-E_1/k_\mathrm{B} T_C^0}}{2.612} \right] .$$

Wie groß ist dieser Effekt für $E_1/(k_B T_C^0) = 3$? **(3P)**

41) Bose–Einstein-Kondensation in einer harmonischen Falle

In den gegenwärtigen Experimenten zur Bose–Einstein-Kondensation verdünnter atomarer Gase werden die Atome durch magneto-optische Fallen festgehalten. Das diesen Fallen entsprechende Potential wird in sehr guter Näherung durch das eines harmonischen Oszillators beschrieben.

a) Erklären Sie, warum die energieabhängige Zustandsdichte für Teilchen in einem isotropen dreidimensionalen Oszillatorpotential mit der Oszillatorfrequenz ω durch

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{(\hbar\omega)^3}$$

approximiert werden kann. Dabei bezeichnet ε die Anregungsenergie der Teilchen, d.h. den Betrag, um den ihre Energie die Grundzustandsenergie $\varepsilon_0 = 3\hbar\omega/2$ übersteigt.

b) Zeigen Sie unter Verwendung der in a) gefundenen Zustandsdichte, dass die Grundgleichungen eines idealen Bose-Gases in einer isotropen Oszillatorfalle in der Kontinuumsnäherung die Form

$$\ln \mathcal{Z} = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right)^3 g_4(z)$$

bzw.

$$N - N_0 = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right)^3 g_3(z)$$

erhalten, wobei $g_n(z)$ die Bose-Funktion zum Index n bezeichnet und $z = \exp\big(\beta(\mu - \varepsilon_0)\big)$ die auf die Grundzustandsenergie $\varepsilon_0 = 3\hbar\omega/2$ bezogene Fugazität angibt.

c) Wie lautet die Kondensationstemperatur T_C des harmonisch gefangenen Bose-Gases im Rahmen dieser Näherung? Welchen Wert hat T_C für $N = 5 \cdot 10^5$ Atome in einer Falle mit der Oszillatorfrequenz $\omega = 2\pi \cdot 416\ \mathrm{s}^{-1}$? Wie lautet die Temperaturabhängigkeit der Grundzustandsbesetzung N_0 für $T \leq T_C$?

<u>Hinweis:</u> $\zeta(3) = 1.2020569031595942853997381\ldots$. **(4P)**