Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 18. Dezember 2017

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2017/18, Übungsblatt 10)

http://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/statistik/

Abgabe: Montag, 8. Januar bis 12:00 Uhr

36) **Zustandssumme als Laplace-Tansformierte**

Für ein System mit der Grundzustandsenergie $E_0 = 0$ und einer Zustandsdichte $g(E)$ erhält die kanonische Zustandssumme die Form einer Laplace-Transformierten:

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \mathrm{d}E \; g(E) \, \mathrm{e}^{-\beta E} \; .$$

Also kann man umgekehrt die Zustandsdichte durch eine inverse Laplace-Transformation aus der Zustandssumme ermitteln:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\beta' - \mathrm{i}\infty}^{\beta' + \mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\beta \; Z(\beta) \, \mathrm{e}^{\beta E} \qquad (\beta' > 0) \; .$$

Benutzen Sie diese Beziehung, um aus der Zustandssumme des klassischen idealen Gases,

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_\mathrm{T}^3} \right)^N \; ,$$

die zugehörige Zustandsdichte zu berechnen. Kommt Ihnen Ihr Resultat bekannt vor?

Hinweis: Betrachten Sie den Integranden in der komplexen β-Ebene und unterscheiden Sie die Fälle $E > 0$ und $E < 0$. Sie können sich auf eine gerade Anzahl von Teilchen beschränken; dann hilft der Cauchysche Integralsatz:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \; .$$

Eine Lösung, die auch ungerade N berücksichtigt, gibt einen Extrapunkt! **(4P)**

37) **Das Prinzip der maximalen Entropie**

Gegeben sei eine diskrete Zufallsgröße, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_i die Werte x_i annimmt ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Sei weiter f eine beliebige Funktion. Der Erwartungswert

$$\langle f(x) \rangle = \sum_i p_i f(x_i) \tag{1}$$

sei bekannt, *nicht* aber die Wahrscheinlichkeiten p_i selbst.

a) Bekanntlich ist $S[\{p_i\}] = -k\sum_i p_i \ln p_i$ ein informationstheoretisches Maß für die mit der Verteilung $\{p_i\}$ verbundene Unsicherheit. Erklären Sie, warum durch Variation des Ausdrucks

$$\widetilde{S}[\{p_i\},\lambda,\gamma] = -k\sum_i \Big(p_i \ln p_i + \lambda p_i + \gamma p_i f(x_i)\Big)$$

diejenige Verteilung erhalten werden kann, die S unter Wahrung der „Nebenbedingung" (1) maximiert.

b) Führen Sie die Variation durch und zeigen Sie für die maximierende Verteilung die Beziehung

$$\langle f(x)\rangle = -\frac{\partial}{\partial\gamma}\ln Z(\gamma) \ ,$$

wobei

$$Z(\gamma) = \sum_i \exp\Big(-\gamma f(x_i)\Big) \ .$$

Wie lautet der zugehörige Maximalwert $S_{\max}$ von S ? **(2P)**

Bemerkung: Das hier erläuterte Verfahren entspricht der bestmöglichen *vorurteilsfreien* Schätzung einer gesuchten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die sehr weitgehenden Parallelen zur Statistischen Physik sind nicht zufällig: Vergleiche Aufgabe 32!

38) **Die „Fermion-Boson-Verwandlung" in einer Raumdimension**

a) Gegeben sind N ideale Bosonen, die durch das Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Oszillatorfrequenz ω „gefangen" werden. Erklären Sie, warum die Energie E eines Mikrozustandes in der Form

$$E = \frac{N}{2}\hbar\omega + N\hbar\omega n_1 + (N-1)\hbar\omega n_2 + \ldots + 2\hbar\omega n_{N-1} + \hbar\omega n_N$$

geschrieben werden kann, wobei jede der ganzen Zahlen n_j ($j = 1,\ldots,N$) einen Wert zwischen (einschließlich!) 0 und ∞ annimmt. Folgern Sie, dass die kanonische Zustandssumme des Systems durch

$$Z_N(\beta) = q^{N/2}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-q^j}$$

gegeben wird, wobei $q = \exp(-\beta\hbar\omega)$.

b) Betrachten Sie jetzt N (hypothetische) spinlose ideale Fermionen im gleichen eindimensionalen Oszillatorpotential. Erklären Sie, warum deren Energie E wieder in der in a) angegebenen Form geschrieben werden kann, wobei jetzt jedoch nur n_1 von 0 bis ∞ läuft, dagegen n_j für $j = 2,\ldots,N$ von 1 bis ∞. Wie lautet also nun die kanonische Zustandssumme?

c) Berechnen Sie sowohl für das bosonische als auch für das fermionische System die Innere Energie und die spezifische Wärmekapazität. Was fällt Ihnen auf?

d) Die in c) gefundene „Verwandschaft" zwischen dem bosonischen und dem fermionischen System hat eine verblüffende Ursache: Hier existiert eine ein-eindeutige Zuordnung von bosonischen zu fermionischen Mikrozuständen. Nämlich welche? **(4P)**