

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2017/18, Übungsblatt 2)

<http://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/statistik/>

Abgabe: Montag, 30. Oktober bis 12:00 Uhr

5) Noch einmal: Welches Phasenraumvolumen besetzt ein Zustand?

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich in dem eindimensionalen „Dreieckspotential“

$$V(x) = \begin{cases} ax & , \quad x \geq 0 \\ +\infty & , \quad x < 0 , \end{cases}$$

wobei die Konstante a positiv ist.

a) Wie lauten seine exakten Energieeigenwerte E_n ? Welche Näherung erhält man für große Quantenzahlen n ?

Hinweise: Die Fundamentallösungen $Ai(z)$ und $Bi(z)$ der Airyschen Differentialgleichung $\psi''(z) - z\psi(z) = 0$ verhalten sich für große positive z wie folgt:

$$\begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}\exp(-2z^{3/2}/3) \\ Bi(z) &\sim \pi^{-1/2}z^{-1/4}\exp(+2z^{3/2}/3) . \end{aligned}$$

Die Nullstellen z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) von Ai besitzen die Darstellung $z_n = -f(\frac{3\pi}{2}(n - 1/4))$ mit

$$f(z) \sim z^{2/3} \left(1 + \frac{5}{48}z^{-2} - \frac{5}{36}z^{-4} + \frac{77125}{82944}z^{-6} - \dots \right) ;$$

die ersten drei Nullstellen sind (siehe Abramowitz/Stegun; Table 10.13)

$$\begin{aligned} z_1 &= -2.33810\,741 \\ z_2 &= -4.08794\,944 \\ z_3 &= -5.52055\,983 . \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte in semiklassischer Näherung mit Hilfe der Bohr–Sommerfeld-Regel

$$\oint p \, dq = 2\pi\hbar(n - 1/4) .$$

c) Geben Sie für die drei niedrigsten Eigenwerte den relativen Fehler der „Bohr–Sommerfeld-Quantisierung“ an. **(3P)**

6) Ideales Gas im Schwerfeld als mikrokanonisches Ensemble

Gegeben sei eine sehr große Zahl N von nichtwechselwirkenden klassischen Teilchen der Masse m , die sich im Schwerfeld der Erde befinden und in einem (nach oben unendlich ausgedehnten) Zylinder mit der Querschnittsfläche A eingesperrt sein sollen. Die Hamiltonfunktion des Systems innerhalb des Zylinders lautet also

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + mgz_i \right) .$$

Berechnen Sie für gegebene Gesamtenergie E das Phasenraumvolumen sowie die mikrokanonische Entropie $\tilde{S} = \ln \Omega$ des Systems und zeigen Sie, dass diese Größe extensiv ist.

Hinweise: Zerlegen Sie die Gesamtenergie E in einen kinetischen Anteil ε sowie einen potentiellen Anteil $E - \varepsilon$ und berechnen Sie das Phasenraumvolumen zunächst für beliebiges ε . Bestimmen Sie dann dasjenige ε , für welches die Entropie maximal wird, und nehmen Sie an, dass dadurch bereits alle statistisch relevanten Zustände ausgeschöpft werden („Maximumsnäherung“). — Das Volumen des n -dimensionalen „Einheitssimplex“ $\{\sum_{i=1}^n x_i \leq 1 ; x_i \geq 0\}$ ist $1/n!$, wie durch Induktion (Prinzip von Cavalieri!) sofort zu erkennen ist. **(3P)**

7) Mikrozustände für ein Urnenmodell

N schwarze und N weiße Kugeln wurden zufällig auf zwei nebeneinanderstehende Glasurnen verteilt. Ein Makrozustand dieses Systems wird charakterisiert durch die Angabe der Zahl k_1 der schwarzen und der Zahl k_2 der weißen Kugeln in der linken Urne, ein Mikrozustand dagegen durch die Angabe, *welche* Kugeln sich in der linken Urne befinden.

a) Wieviele Mikrozustände $\Omega(k_1, k_2)$ gehören zu einem Makrozustand? Wie groß ist die Gesamtzahl Ω_{ges} aller Mikrozustände?

b) Wie groß ist die Entropie $\ln \Omega_{\text{ges}}$ des Systems? — Betrachten Sie die Konfiguration mit der größten Zahl Ω_{max} an Realisierungen und berechnen Sie $\ln \Omega_{\text{max}}$ mit Hilfe der üblichen Stirling-Näherung. Was fällt Ihnen auf?

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das System *genau* in dem Makrozustand mit der maximalen Zahl von Mikrozuständen anzutreffen, für große N verschwindet. **(2P)**

8) Von der Binomial- zur Gaußverteilung

a) Zeigen Sie für große N und $|\delta| \ll N/2$ die Gültigkeit der Näherung

$$\binom{N}{\frac{N}{2} + \delta} = 2^N \frac{1}{\sqrt{2\pi N/4}} \exp(-2\delta^2/N) .$$

b) Betrachten Sie noch einmal das Urnenmodell aus Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass es praktisch sicher ist, dass weder k_1 noch k_2 um mehr als einen beliebig kleinen Bruchteil r von ihrem Erwartungswert $N/2$ abweichen, sofern N hinreichend groß ist. **(2P)**