

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2017/18, Übungsblatt 1)

<http://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/statistik/>

Abgabe: Montag, 23. Oktober bis 12:00 Uhr

1) Das Volumen n -dimensionaler Kugeln

a) Das Volumen $V_n(R)$ einer n -dimensionalen Kugel vom Radius R besitzt die Form

$$V_n(R) = \int_{0 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2} d^n x = \alpha(n) R^n ;$$

in Kugelkoordinaten erhält man daher das Volumenelement $dV_n(R) = n\alpha(n)R^{n-1} dR = S(n)R^{n-1} dR$. Dabei bezeichnet $\alpha(n)$ das Volumen und $S(n) = n\alpha(n)$ die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel. Berechnen Sie $\alpha(n)$ mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} .$$

b) Für sehr große Dimension n darf man das Volumen einer Kugelschale mit Außenradius R und Innenradius $R - \delta R$ durch das Volumen einer Vollkugel vom Radius R ersetzen. Wie groß ist der relative Fehler dieser Approximation für $\delta R/R = 1/1000$ sowie $n = 10, 100, 1000, 10^4, 10^5$ und 10^6 ? **(2P)**

2) Die Stirlingsche Formel und ihre Güte

a) Die Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \quad (1)$$

erfüllt bekanntlich die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Folgern Sie daraus für ihre logarithmische Ableitung $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ die Beziehung

$$\ln z = \psi(z) + \frac{1}{2}\psi'(z) + \frac{1}{6}\psi''(z) + \frac{1}{24}\psi'''(z) + \frac{1}{120}\psi^{(4)}(z) + \dots$$

b) Gehen Sie aus von dem Ansatz

$$\psi(z) = \ln z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{a_4}{z^4} + \dots$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten a_i für $i = 1, \dots, 4$. Schließen Sie daraus

$$\ln \Gamma(z) = z(\ln z - 1) - \frac{1}{2} \ln z + C + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} \dots, \quad (2)$$

wobei der Wert der Konstanten C hier noch offen bleibt.

c) Nähern Sie das Integral (1) für reelles, großes z (— *warum* muss z groß sein? —) durch ein Gaußintegral und bestimmen Sie so die Konstante C .

d) Prüfen Sie die Güte der Approximation (2) zunächst für $z = 10$: Wie verbessert sich die Approximation, wenn man neben dem führenden Term sukzessive weitere Terme berücksichtigt? — In der Statistischen Physik verwendet man dagegen fast immer die einfache Näherung $\ln \Gamma(z) = z(\ln z - 1) + O(\ln z)$. Wie groß ist der relative Fehler dieser Näherung für $z = 6 \cdot 10^{23}$? (4P)

3) Zur Bohr–Sommerfeld–Quantisierung

a) Berechnen Sie für ein klassisches Teilchen in einem „Potentialkasten“ der Länge L bzw. im Potential eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω das Wirkungsintegral

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq$$

und drücken Sie in beiden Fällen die Energie E des Teilchens durch diese Wirkung aus. Betrachten Sie dann die Energieeigenwerte E_n für quantenmechanische Teilchen gleicher Masse in den gleichen Potentialen. Was fällt Ihnen auf?

b) Welche Flächengröße in der klassischen Phasenebene könnte man aufgrund der Überlegungen aus a) einem quantenmechanischen Zustand zuordnen? (2P)

4) Von der Binomial– zur Poissonverteilung

a) Ein radioaktives Präparat bestehe aus N Atomen, von denen jedes mit einer Wahrscheinlichkeit q während eines bestimmten Zeitintervalles zerfallen kann. Weiter sei \hat{X} diejenige Zufallsgröße, die die Anzahl der Zerfälle in diesem Intervall angibt, und $P(\hat{X} = k)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k Zerfälle stattfinden. Begründen Sie die Formel

$$P(\hat{X} = k) = \binom{N}{k} q^k (1 - q)^{N-k}$$

und berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Varianz von \hat{X} .

b) In praktisch wichtigen Fällen wird die Zahl N der Atome sehr groß, die Wahrscheinlichkeit q für den Zerfall eines bestimmten Atoms jedoch sehr klein. Betrachten Sie daher den Grenzfall $N \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$, wobei das Produkt $Nq \equiv \lambda$ konstant gehalten wird, und zeigen Sie, dass dann die Zufallsgröße \hat{X} für nicht zu große k durch eine andere Zufallsgröße \hat{Y} approximiert werden kann, die der Verteilung

$$P(\hat{Y} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

gehört. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von \hat{Y} . (2P)