Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 4. Juni 2018

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2018, Übungsblatt 10)

`https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/`

Abgabe: Dienstag, 12. Juni bis 10:15 Uhr

37) **Das Levi-Civita-Symbol**

Der *total antisymmetrische Tensor dritter Stufe*, der nach dem italienischen Mathematiker Tullio Levi-Civita (1873-1941) auch als *Levi-Civita-Symbol* bezeichnet wird, ist definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist;} \\ -1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist;} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieses Tensors können viele Umformungen, die Kreuzprodukte von Vektoren enthalten, sehr kompakt geschrieben werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$\varepsilon_{ijk} v_j w_k = \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)_i ,$$

d.h. dass die linke Seite dieser Gleichung mit der i-ten Komponente des Kreuzproduktes $\vec{v} \times \vec{w}$ übereinstimmt. (Summenkonvention!)

b) Beweisen Sie die wichtige Beziehung

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell} ,$$

wobei δ_{ij} das bekannte Kronecker-Symbol ist.

c) Folgern Sie, dass ein zweimal differenzierbares Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ der Identität

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \Delta\vec{v}$$

gehorcht, wobei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ den Laplace-Operator bezeichnet. **(2P)**

38) **Einiges zu Gaußintegralen**

a) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-x^2} ,$$

indem Sie das Quadrat I^2 dieses Integrals in ebenen Polarkoordinaten auswerten.

b) Berechnen Sie für reelles $\alpha > 0$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, x^4 \mathrm{e}^{-\alpha x^2} .$$

c) Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$\delta_n(x - x_0) = N_n \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2} , \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Bestimmen Sie die Normierungsfaktoren N_n derart, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \delta_n(x - x_0) = 1$$

und ermitteln Sie dann den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \delta_n(x - x_0) f(x)$$

für eine beliebige, glatte und integrable „Testfunktion“ f. **(3P)**

39) **Volumenintegrale: Zur Reihung der Integrationen**

Gegeben ist das skalare Feld $\varphi(x, y, z) = xyz$. Berechnen Sie das Volumenintegral dieses Feldes über das Volumen V, das im ersten Oktanden unter der Ebene $2x+2y+z = 6$ liegt. Dabei soll dieses Integral in kartesischen Koordinaten mit Hilfe der beiden Integrationsreihenfolgen

$$\int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \dots \qquad \text{und} \qquad \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}y \dots$$

ausgewertet werden. **(3P)**

40) **Der Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinatensystemen**

Ein Punkt im Raum werde durch drei Koordinaten u, v, w spezifiziert; etwa in sphärischen Polarkoordinaten durch $u = r$, $v = \vartheta$ und $w = \varphi$. Dieses „krummlinige“ Koordinatensystem soll *orthogonal* sein, so dass die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$ und $\vec{e}_w$, die in jedem Raumpunkt in Richtung der zugehörigen Koordinatenlinie zeigen, senkrecht aufeinander stehen. Eine infinitesimale Verschiebung $\mathrm{d}\vec{r}$ von (u, v, w) nach $(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, w + \mathrm{d}w)$ besitzt dann die Form

$$\mathrm{d}\vec{r} = f \, \mathrm{d}u \, \vec{e}_u + g \, \mathrm{d}v \, \vec{e}_v + h \, \mathrm{d}w \, \vec{e}_w$$

mit spezifischen Funktionen $f = f(u, v, w)$, $g = g(u, v, w)$ und $h = h(u, v, w)$.

a) Zeigen Sie, dass der Gradient $\vec{\nabla} F$ einer Funktion $F(u, v, w)$ die Form

$$\vec{\nabla} F = \vec{e}_u \frac{1}{f} \frac{\partial F}{\partial u} + \vec{e}_v \frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial v} + \vec{e}_w \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial w}$$

annimmt.

Hinweis: Die definierende Eigenschaft des Gradienten besteht darin, dass das Differential

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial F}{\partial v} \mathrm{d}v + \frac{\partial F}{\partial w} \mathrm{d}w$$

durch das Skalarprodukt $\vec{\nabla} F \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ gegeben wird.

b) Welche Gestalt besitzt daher $\vec{\nabla} F$ in sphärischen Polarkoordinaten? **(2P)**