

## Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2018, Übungsblatt 8)

<https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/>

**Abgabe:** Dienstag, 29. Mai bis 10:15 Uhr

### 29) Zum Umgang mit „rot“ und „grad“

Es sei  $f(\vec{r})$  ein differenzierbares skalares Feld und  $\vec{v}(\vec{r})$  ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie die folgende Produktregel:

$$\text{rot}(f\vec{v}) = f \text{rot } \vec{v} + \text{grad} f \times \vec{v} . \tag{1P}$$

### 30) Abbremsung durch eine verallgemeinerte Reibungskraft

Die Abbremsung eines Körpers der Masse  $m$ , der sich längs der  $x$ -Achse in einem viskosen Medium bewegt, soll durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^n$$

beschrieben werden. Dabei bestimmt der reelle Exponent  $n \geq 0$  die Dimension des Reibungskoeffizienten  $\gamma$ . Da der Fall der Stokes'schen Reibung ( $n = 1$ ) bereits aus Aufgabe 28 bekannt ist, braucht er hier nicht mehr betrachtet zu werden.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $v(t)$  sowie die Weg-Zeit-Funktion  $x(t)$  für die Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , und diskutieren Sie die Abbremsung in Abhängigkeit vom Exponenten  $n$ : In welchen Fällen kommt der Körper zur Ruhe, in welchen nicht? Wie groß ist jeweils seine Reichweite? Was geschieht insbesondere im Fall Newtonscher Reibung (d.h. für  $n = 2$ ) ? (2P)

### 31) Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

Unter einem „mathematischen Pendel“ versteht man eine Punktmasse  $m$ , die an einem masselosen Faden der Länge  $\ell$  aufgehängt ist und in einem homogenen Gravitationsfeld ebene Schwingungen ausführt.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung des Pendels her:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0 ,$$

wobei  $\varphi$  den Auslenkungswinkel des Fadens gegen die Lotrichtung und  $g$  die lokale Gravitationsbeschleunigung angibt.

b) Folgern Sie daraus nach bekanntem Muster, dass für eine Schwingung mit maximalem Auslenkungswinkel  $\varphi_{\max}$  die Schwingungsdauer  $T$  durch

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}}$$

gegeben wird.

c) Zeigen Sie weiter, dass man aus b) durch die Substitution

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_{\max}}{2} \sin \vartheta$$

den äquivalenten Ausdruck

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

erhält, wobei

$$k^2 = \sin^2 \frac{\varphi_{\max}}{2}$$

gesetzt wurde. (Das hier auftauchende Integral ist bekannt als „vollständiges elliptisches Integral erster Gattung“.)

d) Entwickeln Sie die Periodendauer  $T$  des mathematischen Pendels bis zu Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(k^{10})$  einschließlich! (4P)

### 32) Bewegung im isotropen Oszillatorpotential

Ein Punktteilchen der Masse  $m$  bewege sich in einem dreidimensionalen isotropen harmonischen Potential:

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 .$$

Beschreiben Sie seine Bahnkurve, d.h. berechnen Sie die zeitabhängige radiale Abstandsfunktion  $r(t)$  sowie die Winkelfunktion  $\varphi(r)$  in der Bahnebene. Zeigen Sie insbesondere, dass die Bahn in sich geschlossen ist! (3P)