Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 7. Mai 2018

**Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik***

(SoSe 2018, Übungsblatt 6)

`https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/`

**Abgabe:** Dienstag, 15. Mai bis 10:15 Uhr

21) **Vertauschbarkeit partieller Ableitungen**

a) Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

für die folgenden Funktionen $F(x, y)$:

*(i)*

$$F(x, y) = \sin(xy) + 2x^3y^4$$

*(ii)*

$$F(x, y) = x^2y^4\mathrm{e}^{x^4y^2}$$

b) Unter dem *Gradienten* einer differenzierbaren Funktion $F(\vec{r}\,)$ versteht man das Vektorfeld

$$\operatorname{grad} F = \vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} \partial_x F \\ \partial_y F \\ \partial_z F \end{pmatrix} \; ,$$

wobei $\partial_x F = \partial F/\partial x$, usw. Unter der *Rotation* eines dreidimensionalen, differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r}\,)$ mit den Komponenten $v_x$, $v_y$, $v_z$ versteht man das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} \; .$$

Zeigen Sie, dass differenzierbare Gradientenfelder wirbelfrei sind, d.h. dass die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes, das seinerseits als Gradient einer Funktion $F(\vec{r}\,)$ darstellbar ist, stets verschwindet. **(2P)**

22) **Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen in drei Raumdimensionen**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen, die für *zwei*dimensionale Vektorfelder bereits aus der Vorlesung bekannt sind, auch für *drei*dimensionale Felder!

a) Kurvenintegrale über ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}\,)$ sind genau dann nur vom Anfangs- und Endpunkt eines Weges $\mathcal{C}$, nicht aber von dessen Verlauf abhängig, wenn $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist, wenn also eine Funktion $F(\vec{r}\,)$ existiert mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} F = \vec{v}$.

b) Wirbelfreie Felder, also Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r}\,)$ mit der Eigenschaft $\vec{\nabla}\times\vec{v}=\vec{0}$, sind Gradientenfelder, sofern ihr Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist. **(4P)**

23) **Kurvenintegrale über Gradientenfelder**

a) Berechnen Sie den Ausdruck $\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r}\,)$ für

$$\vec{v}(\vec{r}\,)=\begin{pmatrix} 2xy+z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

b) Eine sehr große Masse $M$ befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Auf eine zweite Masse $m$ am Ort $\vec{r}$ wirkt also die Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}\,)=-GMm\frac{\vec{r}}{r^3} .$$

Die Arbeit $W=-\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}\,)$ ist zu verrichten, um die Masse $m$ längs eines Weges $\mathcal{C}$ gegen das Feld von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ zu bringen. Erklären Sie, warum $W$ nur von den Abständen $r_1=|\vec{r}_1|$ und $r_2=|\vec{r}_2|$ dieser beiden Punkte vom Kraftzentrum abhängt! **(2P)**

24) **Clairaut-Differentialgleichung und Legendre-Transformation**

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Clairaut-Differentialgleichungen in expliziter Form und fertigen Sie Skizzen ihrer Graphen an!

*(i)*

$$y=xy'-\frac{1}{2}y'^2$$

*(ii)*

$$y=xy'-\sqrt{y'^2-1}$$

b) Berechnen Sie die Legendre-Transformierten der folgenden Funktionen:

*(i)*

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2$$

*(ii)*

$$y(x)=\sqrt{x^2-1}$$

**(2P)**