Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 23. April 2018

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2018, Übungsblatt 4)

`https://www.uni-oldenburg.de/condmat/teaching/ETP/`

Abgabe: Montag, 30. April bis 16:00 Uhr (!)

13) **Die Differentialgleichung $\mathbf{y' = f(y/x)}$**

a) Zeigen Sie, dass die „homogene Differentialgleichung“

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

durch die naheliegende Substitution

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad (x \neq 0)$$

in eine Differentialgleichung von einem bekannten Typ überführt werden kann.
b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \qquad , \quad y(1) = 1 \; .$$

Auf welchem Intervall existiert die Lösung? **(2P)**

14) **Variation der Konstanten**

Konstruieren Sie für jede der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung! Weisen Sie nach, dass die von Ihnen gefundenen Lösungen korrekt sind.

a)

$$y' + 4x^3 y = 2x^7$$

b)

$$y' - \frac{2}{x} y = \frac{4x^2}{1+x^2}$$

c)

$$y' + y \sin x = \sin^3 x$$

d)

$$y' + 2xy = 3\mathrm{e}^{-x^2}$$

(4P)

15) **Die Bernoullische Differentialgleichung**

Die Lösung *nichtlinearer* Differentialgleichungen ist häufig sehr schwierig. Die in dieser Aufgabe behandelte, nach Johann Bernoulli benannte Differentialgleichung lässt sich jedoch auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen.

a) Die Bernoulli-Differentialgleichung besitzt die Form

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha} = 0 \qquad , \quad \alpha \neq 1.$$

Zeigen Sie, dass diese nichtlineare Gleichung durch Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ in die lineare Gleichung

$$u' + (1-\alpha)g(x)u + (1-\alpha)h(x) = 0$$

für $u = y^{1-\alpha}$ überführt wird.

b) Lösen Sie das nichtlineare Anfangswertproblem

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0 \qquad , \quad y(0) = -1 \ .$$

Auf welchem Intervall existiert die Lösung? **(2P)**

16) **Zum Begriff der Lipschitz-Stetigkeit**

Man sagt, dass eine in einem Streifen $S : x_1 \leq x \leq x_2,\ -\infty < y < +\infty$ definierte Funktion $f(x,y)$ dort einer *Lipschitzbedingung bezüglich* y genügt, wenn

$$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| \leq L|y - \overline{y}|$$

für ein geeignetes $L \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f_1(x,y) = -g(x)y + h(x)$ in jedem Streifen S einer solchen Lipschitzbedingung genügt, sofern g und h stetig sind, die Funktion $f_2(x,y) = \sqrt{|y|}$ dagegen nicht! **(2P)**