Mathematik-Wettbewerb

Tag der Mathematik 2017

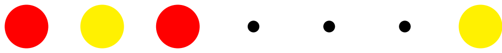
Lösungshinweise

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Emma isst nacheinander acht Gummibärchen, von denen genau zwei rot, zwei orange, zwei weiß und zwei gelb sind. Zwischen den beiden roten isst sie genau ein anderes, zwischen den beiden orangefarbenen isst sie genau zwei andere, zwischen den beiden weißen isst sie genau drei andere, und zwischen den beiden gelben isst sie genau vier andere Gummibärchen. In welcher Reihenfolge kann Emma die Gummibärchen gegessen haben?

Lösung:

Zwischen den beiden gelben Gummibärchen kann höchstens ein weißes sein. Unter den mindestens drei anderen muss also auch ein rotes sein. Bis auf Symmetrie gibt es dafür die beiden Möglichkeiten

1. 

   Da Emma nur 8 Gummibärchen isst, bleibt für das orangefarbene nur die Möglichkeit

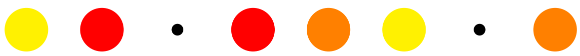
   Dann lässt sich aber das weiße nicht mehr unterbringen. Diese Möglichkeit scheidet daher aus.

2. 

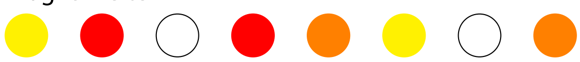
   Um die geforderten Abstände einzuhalten, können auf die beiden verbleibenden Plätze nur ein orangefarbenes und ein weißes. Für orange gibt es dabei nur die beiden Möglichkeiten

   (a) 

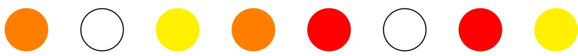
   Dann lässt sich aber das weiße nicht mehr unterbringen. Diese Möglichkeit scheidet daher aus.

   (b) 

   Dies führt zum Ziel, und aufgrund der Symmetrie erhalten wir die beiden einzigen Möglichkeiten

   oder

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Über die quadratische Funktion $P(x) = x^2 + b \cdot x + c$ ist bekannt dass

(i) sie genau eine Nullstelle hat, und

(ii) die Gleichung $P\Big(P\big(P(x)\big)\Big) = 0$ genau drei verschiedene Lösungen x_1, x_2 und x_3 hat.

Bestimmen Sie x_1, x_2 und x_3.

Lösung:

Wegen (i) hat $P(x)$ die Form $P(x) = (x - x_0)^2$ mit der einzigen Nullstelle x_0. Für eine Lösung x von (ii) gilt dann auch

$$x_0 = P\big(P(x)\big) = \big((x - x_0)^2 - x_0\big)^2 .$$

Da eine Quadratzahl nie negativ ist, folgt daraus zum einen, dass $x_0 \geq 0$, und zum anderen, dass

$$(x - x_0)^2 - x_0 = \pm\sqrt{x_0} \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 = x_0 \pm \sqrt{x_0} .$$

Folglich ist auch $x_0 - \sqrt{x_0} \geq 0$ (sonst gäbe es höchstens zwei Lösungen für x) und wir erhalten für x vier mögliche Lösungen, welche wir unter Beachtung von $x_0 \geq 0$ und $\sqrt{x_0 - \sqrt{x_0}} \geq 0$ der Größe nach anordnen

$$x_0 - \sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}} \leq x_0 - \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0}} \leq x_0 + \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0}} \leq x_0 + \sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}} .$$

Folglich muss $x_0 > 0$ sein, denn für $x_0 = 0$ wären alle Lösungen gleich. Dann sind die beiden äußeren Ungleichungen strikt. Somit gibt es nur dann genau drei verschiedene Lösungen, wenn bei der mittleren Ungleichung tatsächlich Gleichheit gilt, d.h.

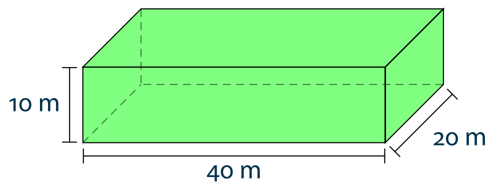
$$x_0 - \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0}} = x_0 + \sqrt{x_0 - \sqrt{x_0}} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \sqrt{x_0} = 0 .$$

Wegen $x_0 > 0$ erfüllt dies nur $x_0 = 1$, und wir erhalten die drei verschiedenen Lösungen

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 1 + \sqrt{2} .$$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Der Planet *Ziegelstein* hat die Form eines Quaders mit den Kanten von 10 m, 20 m und 40 m und ist komplett mit Gras bedeckt.

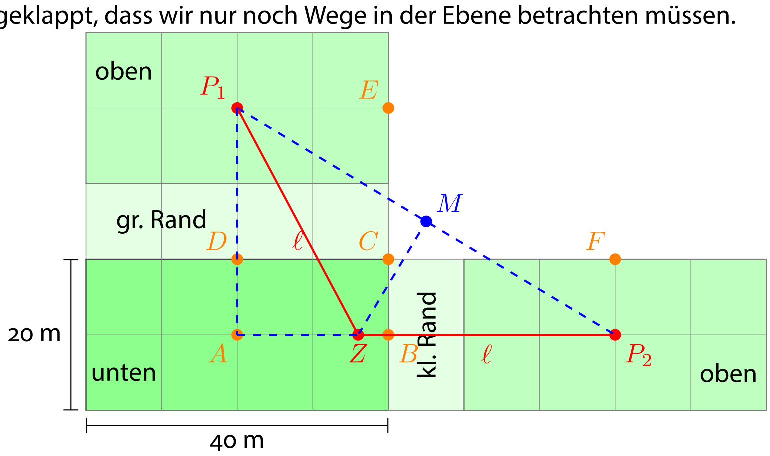


Eine Ziege ist in der Mitte einer der größten Seitenflächen angepflockt. Wie lang muss das Seil mindestens sein, damit die Ziege den Planeten vollständig abgrasen kann?

(Je kürzer die begründete Seillänge ist, desto mehr Punkte bekommen Sie für diese Aufgabe!)

Lösung:

Die Seitenfläche mit dem Pflock nennen wir "oben", die gegenüberliegende "unten" und die restlichen je nach Größe "kleiner Rand" bzw. "großer Rand". Wir denken uns den Quader so aufgeklappt, dass wir nur noch Wege in der Ebene betrachten müssen.



Das Seil muss mindestens so lang sein, dass unten alles abgegrast werden kann. Der maximale Abstand der Ziege vom Pflock ist gleich der Seillänge ℓ. Dabei bezeichnen wir den Pflock mit P_1, wenn die Ziege über den großen Rand nach unten geht, und mit P_2, wenn sie über den kleinen Rand nach unten geht (siehe Skizze). Dann liegen alle Punkte, für die die Abstände in beiden Fällen gleich sind, auf der Mittelsenkrechten zur Strecke P_1P_2 (deren Mittelpunkt sei M). Insbesondere muss auch der Schnittpunkt Z der Mittelsenkrechten mit der Strecke AB erreicht werden (die Existenz des Schnittpunktes lässt sich hier konstruktiv begründen). Im rechtwinkligen Dreieck AZP_1 gilt dann nach Pythagoras

$$(50m - \ell)^2 + (30m)^2 = \ell^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2500m^2 - 100m \cdot \ell + \ell^2 + 900m^2 = \ell^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 34m$$

Das Seil muss also mindestens 34 m lang sein. Es muss aber auch nicht länger sein, denn: Da $\ell = 34$ m länger ist als die Diagonalen der Rechtecke P_1DCE mit $\sqrt{800}$ m $\approx 28{,}3$ m und BP_2FC mit $\sqrt{1000}$ m $\approx 31{,}6$ m, können diese rechteckigen Bereiche vollständig abgegrast werden. Aufgrund der Symmetrie kann dann alles oben und der ganze Rand abgegrast werden, und es bleibt nur noch der rechteckige Bereich $ABCD$ zu untersuchen. Dieser wird vollständig durch die rechtwinkligen Dreiecke P_1AZ, P_1ZM und P_2MZ überdeckt. Da in diesen die längste Seite jeweils P_1Z bzw. P_2Z ist, und jeder Punkt in $ABCD$ sich auf geradem Weg von P_1 über den großen Rand oder von P_2 über den kleinen Rand erreichen lässt, kann auch der ganze Bereich $ABCD$ abgegrast werden.

Aufgabe 4: (3+7=10 Punkte)

Erik möchte ein Planschbecken mit Wasser füllen und dazu einen 3-Liter-, einen 4-Liter- sowie einen 5-Liter-Kanister verwenden.

(a) Zeigen Sie, dass er damit für jede ganze Zahl $n \geq 3$ genau n Liter Wasser einfüllen kann.

(b) Erik möchte dabei mit möglichst wenig Füllungen auskommen. Begründen Sie:

(i) Wenn Erik die beiden kleineren Kanister zusammen höchstens zweimal verwendet hat, so ist er tatsächlich mit einer minimalen Anzahl an Füllungen auskommen.

(ii) Hat er dagegen die beiden kleineren Kanister zusammen mehr als viermal verwendet, so wäre er auch mit weniger Füllungen ausgekommen.

Lösung:

(a) Wegen $6 = 2{\cdot}3$ und $7 = 3{+}4$ kann Erik n Liter Wasser einfüllen für alle $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Jedes andere $n \geq 8$ lässt sich schreiben als $n = n_0 + c \cdot 5$ mit einem $n_0 \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ und einer ganzen Zahl c. Also erreicht Erik die gewünschten Menge Wasser sicher dadurch, dass er zunächst n_0 Liter einfüllt und dann noch c Füllungen mit dem 5-Liter-Kanister macht.

(b) (i) Seien $a, b, c \geq 0$ die Anzahl der verwendeten Füllungen mit den einzelnen Kanistern, d.h. $n = a \cdot 3 + b \cdot 4 + c \cdot 5$. Dann gilt auch

$$n \geq (a + b) \cdot 3 + c \cdot 5\,. \tag{1}$$

Die Gesamtzahl aller Füllungen ist $a + b + c$. Für die Gesamtzahl der Füllungen mit den beiden kleineren Kanistern gelte $a + b \leq 2$. Angenommen, die gleiche Menge Wasser lässt sich auch mit weniger Füllungen erreichen, d.h. es ist auch $n = \tilde{a} \cdot 3 + \tilde{b} \cdot 4 + \tilde{c} \cdot 5$ mit $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} \leq a + b + c - 1$. Dann gilt auch

$$n \leq (\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}) \cdot 5 \leq (a + b + c - 1) \cdot 5\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann aber

$$(a + b) \cdot 3 + c \cdot 5 \leq (a + b + c - 1) \cdot 5 \quad \Leftrightarrow \quad a + b \geq \frac{5}{2}\,,$$

was $a + b \leq 2$ widerspricht.

(ii) Für $n = a \cdot 3 + b \cdot 4 + c \cdot 5$ mit $a + b \geq 5$ können wir auch schreiben

$$n = (a - x) \cdot 3 + (b - y) \cdot 4 + c \cdot 5 + x \cdot 3 + y \cdot 4$$

mit ganzen Zahlen $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq b$ und $x + y = 5$. Wir zeigen nun, dass wir die Füllmenge $x \cdot 3 + y \cdot 4$ Liter auch mit nur 4 statt 5 Füllungen erreichen können. Dazu genügt es, alle sechs möglichen Wertepaare für (x, y) zu betrachten:

$$\begin{aligned}
&0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 \\
&1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\
&2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\
&3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\
&4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \\
&5 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4
\end{aligned}$$