# Der Vierfarbensatz

**Planarer Graph:**

- endlich viele Punkte in der Ebene (Ecken)
- Verbindungen zwischen einigen von diesen (Kanten)
- planar: keine Kreuzungen!

**Färbung eines planaren Graphen:**
Jede Ecke erhält eine Farbe, so dass benachbarte Ecken verschiedenfarbig sind.

**Vierfarbensatz:**
Jeder planare Graph kann mit vier Farben gefärbt werden.

# Geschichte des 4-Farben-Problems

1852 F. Guthrie: Erste dokumentierte Erwähnung

> De Morgan: 'Ich habe das Gefühl, daß im Fall von 4 Ländern, von denen je zwei stets eine gemeinsame Grenze haben, immer eines von den drei anderen eingeschlossen wird, so daß es nicht mit einem fünften verbunden sein kann. Wenn das stimmt, so sollten 4 Farben tatsächlich immer genügen. Aber es ist nicht einfach und ich bin nicht sicher über die möglichen Verwicklungen.'

1878 Cayley stellt das Problem der London Math. Society vor

1879 Kempe (Jurist!) veröffentlicht 'Beweis'

1890 Heawood findet Fehler, beweist 5-Farben-Satz

20. Jh. Entwicklung der Graphentheorie, stark von der 4-Farben-Vermutung inspiriert

1950 Heesch: Beweis 'sollte möglich sein', $\leq 10000$ Atome

1976 Appel, Haken, Koch: Erster Beweis, 1476 Atome

1997 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas: Vereinfachter Beweis, 633 Atome

# Die zwei Hauptideen

*Wie färbt man einen Graphen?*

1. *Versuch:* Färbe die Ecken nacheinander mit möglichst wenig Farben.

   (Brauche eventuell beliebig viele Farben.)

2. *Versuch: (Planen)* Lege zunächst die Reihenfolge fest, dann wie oben.

   **Behauptung:** Es gibt eine Ecke $E$ mit höchstens 5 Nachbarn.
   **Strategie:** Färbe zunächst $G \setminus E$ (Induktion!), dann $E$.

   $\Longrightarrow$ **6-Farben-Satz**

3. *Versuch: (Umfärben)* Falls $E$ genau 5 Nachbarn hat und diese nach Färben von $G \setminus E$ verschiedenfarbig sind, färbe eine davon um! Verwende die freigewordene Farbe für $E$.

   $\Longrightarrow$ **5-Farben-Satz**

   **Beispiel:**

# Graphen auf Flächen

$M$ = geschlossene Fläche, $\chi(M)$ = Euler-Charakteristik von $M$

$\chi(M) = \quad 2 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad -2$

$G$ planar $\Longleftrightarrow$ $G$ kann in die Sphäre eingebettet werden.

**Satz:** *Falls $M$ nicht die Sphäre ist, so gilt:*

*(a) (Heawood) $G$ kann in $M$ eingebettet werden $\Longrightarrow$ $G$ ist $k(M)$-färbbar,*

$$k(M) = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}\right]$$

*(Ausnahme: $k$(Kleinsche Flasche) $= 6$).*

*(b) Dies ist bestmöglich.*

**Beispiel:** $M$ = Torus, $\chi = 0$, $k = 7$:

# Eine spektrale Grapheninvariante
## (Y. Colin-de-Verdière, 1990)

| | |
|---|---|
| $M$ = geschlossene Fläche<br>$g$ = Riemannsche Metrik<br>Für $f, h : M \to \mathbb{R}$<br>bedeutet $h = \Delta_g f$:<br>$h(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{\varepsilon^2} \left( \fint_{S_\varepsilon(x)} f(y)dy - f(x) \right)$<br><br>Sei $V : M \to \mathbb{R}$. | $G$ = Graph<br>$g : \mathcal{K} \to (0, \infty)$ 'Metrik'<br>Für $f, h : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$<br>bedeutet $h = \Delta_g f$:<br>$h(x) = \left( \sum_{y \sim x} g(x,y) f(y) \right) - f(x)$<br><br>Sei $V : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$. |

Betrachte die Gleichung

$$\boxed{-\Delta_g f + V f = \lambda f}$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eigenwerte: | $\lambda_1$ | $<$ | $\lambda_2$ | $<$ | $\lambda_3$ | $<$ | $\dots$ | $\infty$ |
| Multiplizitäten: | $m_1$ | | $m_2$ | | $m_3$ | | $\dots$ | |

**Problem:** Gegeben $M$ (bzw. $G$) und $\lambda_i$, $m_i$ ($i \leq N$), gibt es $g, V$ mit diesen Eigenwerten und Multiplizitäten?

**Satz:** *$\lambda_i$ können beliebig vorgegeben werden, $m_i$ nicht.*

**Satz:** *$M$ = Sphäre $\Longrightarrow m_2 \leq 3$.*

**Definition:** $\mu(G) = \max_{g,V} \{ m_2 : \textit{Stabilitätsbedingung erfüllt} \}$.

**Satz:** *$G$ planar $\Longleftrightarrow \mu(G) \leq 3$.*

# Der Beweis

Beweis des 5-Farben-Satzes:

(I) Jeder Graph $G$ ist aus gewissen 'Atomen' aufgebaut.

Atome:

(II) Tritt Atom $A$ in $G$ auf, so läßt sich *jede* 5-Färbung von $G \setminus A$ zu einer 5-Färbung von $G$ modifizieren.

1. Modifiziere mittels 2-Farben-Ketten.
2. Dehne die Färbung auf $A$ aus.

**Wesentlich:** Es reicht, sich $A$ und seinen 'Ring' anzusehen!

**Idee für den Beweis des 4-Farben-Satzes:**

- **Verwende größere Atome (mehr Flexibilität bei 1.,2.),**
- **dann braucht man aber mehr Atome.**

Robertson, Sanders, Seymour, Thomas:
633 Atome, Ringgröße $\leq 14$

- Beweis, daß jeder Graph aus diesen Atomen aufgebaut ist: 20 min. Computer, oder mehrere Monate per Hand.
- Beweis, daß sich 4-Färbungen für alle Atome modifizieren lassen:
  3 Std. Computer (für jedes Atom sind etwa 200.000 Färbungen zu testen)

# Schlussbemerkungen

Zur Rolle des Computers:

- Vor dem Beweis: Experimente helfen, Intuition zu entwickeln.
- Beim Beweis: Der Computer kann sehr *zuverlässig* viele Einzelfälle testen.

Ist der Beweis

- *gültig*? $\longrightarrow$ Standards der Überprüfbarkeit
- *zufriedenstellend*? $\longrightarrow$ Ästhetik, Erwartungen an die Mathematik

Ist das 4-Farben-Problem ein 'gutes' Problem?

Ein interessantes Problem:
Gibt es Probleme, die nur mit Computerhilfe lösbar sind?