

Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase

Grieser, Daniel¹

Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Abstract In diesem Beitrag wird das Konzept des Moduls *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* vorgestellt, das einen problemorientierten Zugang zur Mathematik und eine ausführliche Thematisierung von Beweisen in den Mittelpunkt stellt. Das Modul eignet sich für den Einsatz am Beginn des Mathematikstudiums und bildet eine Antwort auf aktuell viel diskutierte Probleme beim Übergang von der Schule zur Hochschule. Gleichzeitig bereichert es das Mathematikstudium um wertvolle, bisher vernachlässigte Aspekte. Im vorliegenden Artikel wird nach grundsätzlichen Überlegungen zum Problemlösen und Beweisen im Studium sowie zur Studieneingangsphase das Konzept des Moduls vorgestellt und über seine Durchführung an der Universität Oldenburg in den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 berichtet.

Wichtiger Hinweis Ich weise darauf hin, dass dieser Beitrag mit einer etwas anderen Fokussierung schon einmal veröffentlicht wurde (s. Grieser 2015). Zahlreiche Passagen sind in beiden Artikeln identisch. In diesem Beitrag kommen jedoch grundsätzliche Überlegungen didaktischer Natur hinzu, zum Beispiel zu den unterschiedlichen Funktionen von Beweisen und der daraus entstehenden Problematik, zum Übergang von der Schule zur Hochschule und zur Rolle psychologischer Faktoren. Dagegen ist der Artikel Grieser (2015) stärker praktisch orientiert und enthält mehr konkrete Beispiele aus der Durchführung.

¹ Email: daniel.grieser@uni-oldenburg.de

Ausgangspunkte

Kreativität und Problembewusstsein in der Mathematik

Mathematik gilt als schwierig, aber Mathematik ist auch das Fach, das die intensivsten ‚Heureka-Erlebnisse‘ generieren kann. Das sollten wir in der Lehre, besonders am Studienbeginn, stärker als bisher nutzen.

Die meisten Mathematiker sehen Kreativität als wichtigen Teil mathematischer Aktivität an. Auch viele Kinder haben einen neugierigen, entdeckenden Zugang zu dem Fach. Irgendwann geht das den meisten verloren. Wie sieht es im Mathematik-Studium aus? Fach-Studenten merken, wenn überhaupt, oft zum ersten Mal bei ihren Abschlussarbeiten, dass Kreativität zur Mathematik gehört. Vorher sind sie damit beschäftigt, all die wunderbaren Definitionen, Konzepte und Sätze zu verdauen, die wir, die Lehrenden, ihnen in den Vorlesungen vorführen.² Viele Lehramtsstudenten³ erreichen diese Stufe nie. Das ist umso tragischer, als die aktuellen Kerncurricula bei Mathematik-Lehrern die Fähigkeit voraussetzen, das Entdecken von Mathematik kompetent zu begleiten. Wie soll das gehen, wenn sie es selbst nie erlebt haben?

Wir sollten uns auch fragen, ob wir unseren Studenten ausreichend Gelegenheit geben, Problembewusstsein zu entwickeln. Die über Jahrhunderte hinweg ausgefeilten Theorien, die wir lehren, sind aus Problemen entstanden, und sie können verwendet werden, um unzählige Probleme zu lösen. In der Lehre erscheinen die Probleme oft erst im Nachhinein, als Illustration oder Anwendung der Theorie. Wäre es nicht klüger, erst ein Problem zu formulieren und dann die Lösung zu geben? Mehr noch: die Studenten ernsthaft über das Problem nachdenken zu lassen, damit sie ein Gefühl dafür bekommen, wo die Schwierigkeiten liegen?⁴ Das macht neugierig, regt die Kreativität an, und es wird das Verständnis für die Theorie erhöhen.

Es ist unsere Aufgabe, den zukünftigen Mathematikern und Mathematik-Lehrern in ihrer Fachausbildung schon früh die Gelegenheit zu geben, Problembewusstsein zu entwickeln und mathematisch kreativ zu sein, und dabei immer wieder ‚Heureka‘ zu erleben. Dieses Ziel innerhalb existierender Lehrveranstal-

² Natürlich gibt es immer einige wenige, die schon früh weiter sehen können, aber die meisten sind von Übungsaufgaben, bei denen neuer Stoff mit eigenen Einfällen verknüpft werden muss, überfordert und bearbeiten nur die theorie-illustrierenden Aufgaben.

³ Hier sind immer Studenten des gymnasialen Lehramts gemeint.

⁴ Im heutigen Schulunterricht ist es weit verbreitet, Problemlösen an scheinbar anwendungsorientierten, doch häufig stark konstruierten Problemen zu betreiben. Dies ist hier ausdrücklich nicht gemeint. Es gibt auch unzählige motivierende innermathematische Probleme auf jedem Niveau, die jedenfalls für den Hochschulkontext geeigneter erscheinen.

tungen zu verfolgen ist zwar möglich, doch hat man hier wegen des ‚Stoffdrucks‘ meist wenig Zeit dazu.

Ein solcher Ansatz würde dem oft vernachlässigten dritten Punkte in der Triade mathematischer Aktivitäten *Rechnen – Theoriebildung – Problemlösen* die gebührende Aufmerksamkeit verschaffen.

Beweise

Beweise sind das Herz der Mathematik, und so ist uns besonders daran gelegen, sie den Studierenden näher zu bringen. Doch allzu oft schauen wir in leere Gesichter, wir begegnen Studenten, die Beweise verständnislos auswendig lernen, und Beweisaufgaben in Klausuren werden meist nur von wenigen bearbeitet. Wo liegt das Problem?

Beweise erfordern eine große intellektuelle Anstrengung und Disziplin. Wir akzeptieren und verstehen Beweise daher nur, wenn wir stark motiviert sind. Schon Pólya (1967, S.195) schrieb: „In erster Linie muss der Anfänger davon überzeugt werden, dass sich das Lernen von Beweisen lohnt, dass sie einen Zweck haben, dass sie interessant sind.“

Pólya dachte an Schüler. In der Schule werden heute Beweise noch weniger thematisiert als damals. Daher sind die ‚Anfänger‘ heute die Studienanfänger.

Ein Beispiel: Fragen der Grundlagen der Mathematik werden in der Schule nicht gestellt. Da überrascht es wenig, wenn der Beweis, dass das Quadrat jeder reellen Zahl nicht-negativ ist („das weiß doch jeder“), oder der Beweis des Basisergänzungssatzes – um zwei typische Beispiele aus Analysis und Lineare Algebra zu nennen – nicht beim Adressaten ankommt. Was nicht überrascht oder zu abstrakt daherkommt, motiviert nicht.

Beweise haben unterschiedliche Funktionen. Die wichtigsten sind Erkenntnis und Ordnung von Wissen. Dass es unendlich viele Primzahlen gibt, weiß ich erst, wenn ich es bewiesen habe. Indem ich Teilmengen mit 0,1-Folgen in Beziehung setze, entwickle ich ein tieferes Verständnis für die Formel für die Mächtigkeit einer Potenzmenge. Diese Beweise liefern mir Erkenntnis, dass und warum etwas wahr ist. Jedoch hat der Beweis des Zwischenwertsatzes aus den Axiomen der reellen Zahlen und der Definition der Stetigkeit eher eine Ordnungsfunktion: Jeder „weiß“, dass der Satz stimmt, das ist keine neue Erkenntnis. Der Beweis ordnet den Satz in das heute übliche Axiomensystem ein.⁵

⁵ Auch dieser Beweis liefert eine Erkenntnis, wenn auch eine recht abstrakte und für Studienanfänger kaum nachvollziehbare: Die Erkenntnis, dass sich der Satz aus diesen Axiomen und mit dieser Definition der Stetigkeit beweisen lässt. Das Ringen mit diesem Thema lässt sich historisch belegen: Bei der Grundlegung der Analysis im 19. Jahrhundert war jedem klar, dass der Zwischenwertsatz gelten muss. Die Frage bestand darin, wie man die Grundmauern der Mathematik so anlegt, dass er beweisbar ist (s. Spalt 1988).

Diese doppelte Funktion von Beweisen kann für Studienanfänger verwirrend sein. Leider wird sie nur selten thematisiert.

Bei einem ersten Kontakt mit Beweisen sollten Beweise zum Erkenntnisgewinn voranstellen. Denn dieser wirkt als Belohnung für die Anstrengung, die der Beweis erfordert. Dies schafft die nötige innere Motivation und erzeugt das Verlangen nach logischer Korrektheit. Weiterhin wird man dies am besten anhand bekannter, leicht zugänglicher Inhalte erreichen, nicht an neuen, abstrakten Themen.

Der Übergang Schule – Hochschule

Werfen wir einen Blick auf den Beginn des Mathematikstudiums, wie er in Deutschland seit langem üblich ist. Die Studierenden haben da viel zu schlucken:

- Eine neue Sprache, die konsequent Begriffe der Mengenlehre verwendet und logisch präzise ist.
- Alles wird bewiesen.
- Abstraktion und Allgemeinheit.
- Neuer Stoff (Lineare Algebra, Analysis), der in der neuen Sprache formuliert ist.
- Axiomatischer Aufbau der Mathematik.

Zweifellos, all dies sind wesentliche Elemente der Mathematik. Doch haben die meisten Studierenden aus der Schule ein Bild von der Mathematik als Sammlung von Rechentechniken, und dieser Übergang macht ihnen schwer zu schaffen: Sie können anfangs nur schwer nachvollziehen, wozu Abstraktion, Axiomatik und die neue Sprache gut sein sollen. Beweisen ist für sie keine gefühlte Notwendigkeit, sondern Pflichtübung. Und kein Wunder: Wie kann man sich für einen Beweis begeistern, wenn man sich nie ernsthaft eine mathematische Frage gestellt hat? Wie eine Theorie schätzen, die Antworten auf nie gestellte Fragen gibt? Wie die Axiomatik gutheißen, wenn man den Wert von Beweisen nicht erkennt? Kurz: Die Anforderungen passen nicht zum Entwicklungsstand vieler Studienanfänger.

Die Saat der wunderbaren Mathematik, die wir säen wollen, fällt auf ein ungepflügeltes Feld.

Dies ist nicht nur ineffizient, es hat auch handfeste Nachteile:

- Viele Studierende erkennen die Mathematik, das Fach, das ihnen in der Schule Spaß gemacht hat, nicht wieder. Ihre Begeisterung verpufft, statt genutzt zu werden. Wir holen sie nicht da ab, wo sie stehen.
- Schlimmer noch: Kann eine Enttäuschung ein guter Einstieg in einen neuen Lebensabschnitt sein? Manche werden sie überwinden, vielleicht sogar ange-

sport werden, den Sinn hinter dem Neuen zu entdecken. Aber es ist kaum verwunderlich, wenn viele abgeschreckt werden.

- Die hohen Ansprüche, der fehlende Anschluss an Bekanntes verunsichern viele Studierende, sie verlieren den Glauben an sich selbst. Im ungünstigsten Fall führt dies zum Studienabbruch bzw. Studienfachwechsel.
- Die fragende, forschende Haltung, die für ein erfolgreiches Studium so wichtig ist und die einige wenige mitbringen, ist durchaus für die Breite lehrbar. Doch ist dafür bei der Vielfalt anderer Anforderungen zu wenig Platz.
- Für Lehramtsstudenten stellen sich diese Probleme verschärft: Während viele Fach-Studenten nach einigen Semestern Mathematik eine kritische Schwelle überschreiten, bei der sie einsehen, wozu die neue Sichtweise gut ist, lernen die meisten Lehramtsstudenten nicht ausreichend viel und intensiv Mathematik, um diese Schwelle zu erreichen. Zudem bleibt für sie die Berufsrelevanz unklar, da sie wissen, dass sie diese Sprache, Systematik und Abstraktion in der Schule nicht werden einsetzen können.

Um hier weiterzukommen, sollten wir auf das Positive sehen: Viele Schüler haben sich durchaus zu gewissen Zeiten ernsthaft mathematische Fragen gestellt; das weiß jeder, der erlebt hat, wie begeisterungsfähig viele Grundschul Kinder auch für mathematische Inhalte sind. Leider wird dies nur selten im Unterricht aufgegriffen, und nur die wenigsten erhalten sich eine entdeckende Haltung bis in die Oberstufe. Trotzdem ist dies eine Ressource, an die wir anknüpfen können.

Einen Hinweis, wo wir ansetzen können, gibt uns folgende Überlegung: Beim Übergang von der (gegenwärtigen) Schulmathematik zur Hochschulmathematik (wie sie traditionell gelehrt wird) fehlen *Zwischenstufen* (s. Tabelle 1).⁶

Tabelle 1: Zwischenstufen zwischen Schul- und Hochschulmathematik

Schule:	Faktenwissen	Anschauliches Argumentieren		
Zwischenstufe:	Entwickeln einer fragenden Haltung	umgangssprachliches, doch präzises Argumentieren	an elementaren Inhalten argumentieren	Relevanz von Beweisen erfahren
Hochschule:	Fakten verstehen	formaler Beweis	an höheren oder abstrakten Inhalten argumentieren	das hoch komplexe, beweisend aufgebaute Gebäude der Mathematik verstehen

Als Illustration sei hier eine Erfahrung genannt, die aus der vernachlässigten Zwischenstufe zum formalen Beweis resultiert: Manche fortgeschrittene Studie-

⁶ Die Aussagen hier, z.B. über die Schulmathematik, sind zur Verdeutlichung der Unterschiede bewusst plakativ formuliert und entsprechen in dieser Ausprägung sicher nicht durchgehend der Realität.

rende, die durchaus in der Lage sind, formale Beweise nachzuvollziehen, erkennen einen nach mathematischen Standards korrekten, aber informell formulierten Beweis nicht als Beweis an.

Psychologische Faktoren

Psychologische Faktoren sind entscheidend für den Lernerfolg. Gute Lehre nimmt daher psychologische Faktoren ernst. Viele erfolgreiche Lehrende tun dies intuitiv. Ändern sich die Rahmenbedingungen, z.B. durch veränderte Eingangsvoraussetzungen (größerer Anteil eines Jahrgangs studiert, veränderte Curricula in Schulen) oder durch ehrgeizigere Ziele (weniger Abbrecher), lohnt es sich, explizit darüber nachzudenken. Obwohl solche Faktoren bereits in den vorangegangenen Abschnitten erwähnt wurden, verdienen sie eine eigenständige Betrachtung, auch wenn diese hier nur unvollständig sein kann. Aus Sicht einer sinnvollen Gestaltung von Lehre sollten wir dabei stets im Auge behalten, welche Faktoren wir beeinflussen können.

Motivation: Motivation ist das, was uns zum Handeln antreibt. Wer motiviert ist, lernt besser und ausdauernder. Die Quelle der Motivation kann intrinsisch (z.B. Neugierde, Spaß an der Sache, an der Herausforderung) oder extrinsisch (z.B. Berufsziel, Streben nach Anerkennung, Erfüllen von Erwartungen anderer) sein. Intrinsische Motivation kann z.B. gesteigert werden durch Freude an Evidenzerlebnissen, durch Schönheitsempfinden, Erleben eigener Kreativität sowie durch eine erhöhte Selbstwirksamkeitserwartung (s. unten). Sie kann auch mit der Zeit entstehen, z.B. wenn, zunächst extrinsisch motiviert, ein gewisses Verständnis-Niveau erreicht wird, auf dem gewisse Evidenzen usw. erst erlebt werden können. Motivation kann aber auch rasch verlorengehen, z.B. wenn Erwartungen nicht erfüllt werden oder schwer nachvollziehbare Brüche in der Lernbiographie auftreten (z.B. beim Übergang Schule-Hochschule).

Selbstvertrauen: In der modernen Psychologie spricht man genauer von der *Selbstwirksamkeitserwartung (SWE)*, definiert als die Überzeugung, schwierige Anforderungen aufgrund eigener Fähigkeiten bewältigen zu können (s. a. Blömeke in diesem Band). Sie wird für viele positive Effekte mitverantwortlich gemacht, z.B. Glücklichein, längeres Leben, Erfolg. Im Studiumskontext ist eine hohe Korrelation zum Studienerfolg nachgewiesen. Eine hohe SWE hilft uns, hochgesteckte Ziele anzustreben und ausdauernd zu verfolgen, Durststrecken auszuhalten, uns von externen Faktoren (z.B. schlechte Lehrende) unabhängig zu machen oder kreativ eigene Lösungen anzustreben. Die SWE kann gesteigert werden unter anderem durch Erfolgs- und Heureka-Erlebnisse, durch das Beobachten von Experten beim Umgang mit Problemen und Sackgassen, durch Ermutigung und durch das Bewusstmachen eigener Freiheitsgrade (z.B.: viele Lösungen sind mög-

lich), wie es z.B. durch das Erlernen von Problemlösestrategien geschieht. Sie wird nicht gesteigert durch mechanisch zu erledigende Aufgaben (Prototyp ‚Malen nach Zahlen‘). Sie kann verringert werden z.B. durch dem Lernstand nicht angemessene Herausforderungen.

Das Modul Mathematisches Problemlösen und Beweisen

Im Folgenden stelle ich ein Konzept einer Lehrveranstaltung vor, das auf die oben genannten Probleme eingeht und die dort formulierten Lösungsansätze konkretisiert. Der Titel *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* (kurz MPB) nennt bereits die wesentlichen Aspekte:

- Anspruchsvolle Mathematik
- Problemorientiertes Lernen
- Ausführliche, eigenständige Behandlung von Beweisen

Das Konzept wird zunächst anhand der zugrundeliegenden Ideen und Ziele vorgestellt. Diese erlauben in Organisationsform und Inhalt unterschiedliche Umsetzungen, zum Beispiel lassen sich Teile davon in bestehende Lehrveranstaltungen integrieren. Einen umfassenderen Anspruch hat das an der Universität Oldenburg geschaffene Modul MPB, dessen Inhalte, Aufbau und Durchführungsform, wie ich es in den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 durchgeführt habe, in den folgenden Abschnitten beschrieben sind. Die Einbindung in die Studiengänge und Erfahrungen werden ebenfalls thematisiert. Mehr zu den Inhalten des Moduls erfahren Sie in dem Buch *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* (Grieser 2013), weitere Ausführungen und Beispiele in Grieser (2015).

Grundidee, Ziele

Mathematisches Problemlösen und Beweisen soll

- . . . ein Ort für einen kreativen, problemorientierten Zugang zur Mathematik sein. Schon der Titel verschafft einem in der Lehre bisher vernachlässigten Aspekt der Mathematik die gebotene Aufmerksamkeit.
- . . . ein Ort für eine ausführliche Thematisierung von Beweisen sein. Die Studierenden sollen dabei Beweise als Mittel zum Erkenntnisgewinn in elementaren, leicht zugänglichen Kontexten kennenlernen, nicht als Kitt in einem systematischen Aufbau der Theorie. Zudem ist es sinnvoll, nicht nur allgemeine Beweisformen, sondern auch typische Beweismuster zu identifizieren und systematisch zu üben.

- . . . explizit Problemlösestrategien thematisieren. Einige dieser Strategien sollten gleichzeitig als wichtige mathematische Leitideen identifiziert werden.
- . . . sich auf elementare, intuitiv leicht zugängliche Themen beschränken. Dies bedeutet anfangs ein direktes Anknüpfen an Schulstoff der Mittelstufe sowie bei neu eingeführten Themen Verzicht auf Abstraktion.⁷ Bei der Themenauswahl soll auch auf den Bezug zu anderen Teilen des Mathematikstudiums und zu mathematischer Allgemeinbildung geachtet werden.
- . . . sprachlich an die Alltagssprache anknüpfen. Dabei soll auf logisch präzise Ausdrucksweise geachtet und nach und nach mathematisch formale Sprache (z.B. Mengen, Bijektionen) in bedeutungstragenden Kontexten eingeführt werden.

Dabei soll das Niveau (z.B. die Schwierigkeit der Aufgaben) so gewählt und variiert werden, dass ein ‚breites Mittelfeld‘ im Leistungsspektrum angesprochen wird, aber auch leistungsstarke Studierende vor Herausforderungen gestellt werden. *Ausdrückliches Ziel von MPB ist es, Aspekte der Mathematik, die bisher hauptsächlich für besonders leistungsstarke Studierende erreichbar waren, für viele zugänglich zu machen.*⁸

Ich halte es für wichtig, im Studium Lehrveranstaltungen anzubieten, die zumindest teilweise explizit methodisch, nicht fachgebietsbezogen (z.B. Problemlösen und Beweisen, nicht Analysis, Algebra) ausgerichtet sind (s. z.B. Fußnote 10). Natürlich müssen die Methoden mit Inhalten verknüpft sein, sonst sind sie leer. Allgemeine Kompetenzkurse (z.B. ‚Einführung in wissenschaftliches Arbeiten‘) werden bereits an vielen Universitäten angeboten, oft aber wegen der fehlenden Anbindung an konkrete Inhalte kritisiert. Daher muss diese Art von Kurs ein Teil der mathematischen Fachausbildung sein.

Mit einer nach den oben genannten Prinzipien durchgeführte Lehrveranstaltung lassen sich weitere positive Effekte erzielen:

- Indem die Studierenden erleben, dass sie selbst kreativ tätig sein können, werden sie *motiviert* und gewinnen *Selbstvertrauen*.
- Die Akzeptanz von Beweisen wird erhöht, da sie natürlich und in leicht zugänglichem Kontext auftreten, nicht als formale Pflicht. *Studenten wollen beweisen*.
- Die Studierenden erleben Mathematik als *lebendige Wissenschaft*, nicht als statisches Gebäude.
- Es wird ein *fruchtbarer Boden* für das weitere Studium bereitet:

⁷ Das heißt nicht Verzicht auf Niveau. Es gibt viele elementare, schwierige Probleme, an denen man viel lernen kann.

⁸ Dies, und die Anbindung an die Hochschulmathematik, unterscheidet MPB wesentlich von Vorbereitungskursen für mathematische Schülerwettbewerbe. MPB soll das Positive solcher Kurse mit den Ansprüchen eines Studiums verknüpfen.

- Die forschende Haltung, die die Studierenden im Laufe des Moduls entwickeln, ermöglicht ihnen ein tieferes Verständnis von Mathematik.
 - Die Probleme machen neugierig auf mehr Mathematik. Wer an elementaren Inhalten gelernt hat, was ein mathematisches Problem oder ein Beweis ist, wer sich selbst mathematische Fragen gestellt hat, dem wird die ‚höhere Mathematik‘ leichter fallen als dem, der Mathematik wie Vokabeln lernt.
 - Durch die Einführung übergreifender mathematischer Leitideen wird die Grundlage für ein Erkennen der Kohärenz der Mathematik, quer zu den Grenzen der Fachgebiete, gelegt.
- Für Lehramtsstudenten haben diese Ziele besondere Bedeutung: Sie können ihren Schülern eine lebendige Mathematik nur vermitteln, wenn sie sie selbst als solche erleben. Die Berufsrelevanz ist für sie klar erkennbar.⁹

Ein Vorbild: Vor über 50 Jahren entwickelte Georg Pólya in zahlreichen Büchern (z.B. Pólya 1949, 1967) sehr konkrete Ideen zu problemlösendem Unterricht. Er dachte damals an Schüler und an die Lehrerausbildung. Heutige Lehramtsstudenten lernen Pólya in fachdidaktischen Lehrveranstaltungen kennen, da sie auf problemorientiertes Lehren vorbereitet werden sollen. Doch wird nur gut problemorientiert lehren können, wer selbst zumindest zeitweise problemorientiert gelernt hat. Daher muss das Reden *über* Pólya von einem eigenen Praktizieren begleitet oder vorangegangen sein. Daher hat MPB seinen Platz in der Fachausbildung, nicht in der Didaktik.

Inhalt und Aufbau; das 3-Phasen-Modell

In den folgenden Abschnitten wird die konkrete Durchführung von MPB an der Universität Oldenburg beschrieben.

Probleme und Lösungsstrategien: Den Kern des Moduls bildet das Bearbeiten zahlreicher *Probleme* in Vorlesung, Übungen und Hausaufgaben. Diese sind so ausgewählt, dass die Studierenden zum eigenen Entdecken eingeladen werden und an ihnen mathematische Arbeitsweisen und wichtige mathematische Ideen in elementarem Kontext entdecken, üben oder lernen können. Ein weiteres Kriterium ist Attraktivität: ‚hübsche‘ Probleme motivieren mehr als langweilige.

Durch das gemeinsame Bearbeiten der Probleme in Vorlesung und Tutorien (s. u.) erleben und erlernen die Studenten den *mathematischen Prozess*: was tue ich, wenn ich anfangen, mir über ein mathematisches Problem Gedanken zu machen? Dies fängt an mit einfachen Techniken der Selbstorganisation (sich klar werden über die verwendeten Begriffe; was ist gegeben? was ist gesucht? Nicht

⁹ Um dies noch greifbarer zu machen, wurde in einer Vorlesung eine Lehrerin eingeladen, die über ihre Erfahrungen mit problemlöseorientiertem Unterricht und mit Beweisen in der Schule berichtete.

aufgeben, wenn ein Ansatz nicht weiterführt, sondern einen anderen versuchen, usw.) und reicht über einfache Problemlösetechniken (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Zwischenziele setzen etc.) bis hin zu komplexen Techniken des Beweisen und Problemlösens (indirekte Beweise, Extremalprinzip usw.). Solche *Problemlösestrategien* werden explizit thematisiert, im Laufe des Semesters immer wieder angesprochen und in einer Liste (‘Werkzeugkasten’) gesammelt.

Als ordnende Struktur wird ein 4-Stufen-Schema verwendet, das ungefähr den *Vier Stufen des Problemlösens* von Pólya (1949) entspricht, aber durch die klarere Forderung nach korrektem Aufschreiben für den Hochschulkontext angepasst wurde:

1. Verstehen des Problems
2. Untersuchung des Problems
3. Geordnetes Aufschreiben der Lösung
4. Rückschau

Sinn dieses Schemas ist es, immer wieder an die wichtigen und oft vernachlässigten Schritte 1 und 4 zu erinnern und explizit zwischen den Phasen der Untersuchung und des geordneten Aufschreibens zu unterscheiden. Dies ist geboten, da in den meisten Mathematik-Texten die Untersuchungsphase nicht sichtbar ist. Natürlich wird das Schema oft nicht linear durchlaufen, Rückkopplungsschleifen z.B. zwischen 2. und 3. sind alltäglich.

Logik und Beweise: Logik und Beweise werden systematisch und mit vielen Beispielen behandelt, jedoch erst nach ca. 1/3 des Semesters, da die Studierenden zu diesem Zeitpunkt schon einige Erfahrungen im Argumentieren gesammelt haben. Eine Behandlung am Anfang erscheint wenig sinnvoll, da die Studierenden eine Alltagslogik mitbringen und erst durch die intensivere Beschäftigung mit Mathematik Offenheit für eine genaue Betrachtung entsteht.

Die Notwendigkeit von Beweisen wird für die Studierenden evident durch Einsatz offener Problemstellungen (‘Entscheiden Sie, ob...’ statt ‘Beweisen Sie, dass...’) und von Problemen mit Überraschungen (z.B. ‘Ist $n^2 + n + 41$ für alle natürlichen Zahlen n eine Primzahl?’ – beim Probieren von $n = 1, 2, 3, \dots$ könnte man zunächst vermuten, dass die Antwort ja ist).

Neben den allgemeinen Beweisformen (direkter, indirekter, Widerspruchsbeweis) werden typische Beweismuster (z.B. Existenzbeweise mittels Konstruktion, Schubfach- oder Extremalprinzip) anhand geeigneter Probleme eingeführt, benannt und geübt.

Themenauswahl: Die Themenauswahl ordnet sich den Grundideen unter. Konkrete Themen waren u. A. Rekursionen, Graphen (z.B. Eulerformel, Planarität), Abzählprinzipien, elementare Zahlentheorie (Teilbarkeit, Kongruenzen) sowie Permutationen und deren Signatur (als wichtiges nicht-triviales Beispiel einer Invariante). Ein anderes Thema, das sich gut eignen würde, ist die Geometrie.

Die drei Phasen: Dem Aufbau des Moduls MPB liegen einige grundsätzliche Überlegungen zugrunde, wie Studierende zu einem selbständigen Umgang mit Mathematik hingeführt werden können. Ich unterscheide drei Phasen:

1. **Entdecken:** In der ersten Phase machen die Studierenden die Erfahrung, dass sie Mathematik selbst entdecken können. Diese Phase öffnet den Geist für die Mathematik und schafft Selbstvertrauen.
2. **Konsolidieren:** In der zweiten Phase lernen die Studierenden, ihre Lösungs-ideen zu präzisieren und genau zu formulieren, und erkennen den Wert von Beweisen und allgemeinen Formulierungen. Nachdem sie eine Gesetzmäßigkeit oder ein Muster entdeckt haben, brauchen sie einen Beweis, um sicher zu sein, dass diese allgemein gilt.
3. **Strategien lernen:** In der dritten Phase lernen die Studierenden Strategien zum Problemlösen und Beweisen kennen und setzen sie gezielt ein.

In den ersten Wochen liegt der Fokus auf der ersten Phase, sie wird jedoch schon bald durch die zweite und dritte Phase ergänzt, wobei im Laufe des Semesters die Komplexität der eingesetzten Strategien und Beweismuster zunimmt. Mit der Zeit wird die Kombination von Entdecken, allgemeinem Formulieren und Beweisen unter (meist unbewusstem) Einsatz von Problemlöse- und Beweisstrategien selbstverständlich. Für das Entdecken wird immer wieder viel Zeit eingeräumt. Der Übergang zu allgemeinen Formulierungen und Argumenten fällt vielen Studierenden schwer. Hier hilft viel Übung, viel Hilfestellung und konstruktives Korrigieren der Hausaufgaben. Sorgfältig aufgeschriebene Lösungen, die die in der Veranstaltung gefundenen Lösungswege zusammenfassen, bilden hilfreiche Vorbilder.

Einen guten Einstieg in die anspruchsvollste dritte Phase bieten relativ transparente Lösungs- bzw. Argumentationsstrategien, z.B. Rekursion und Induktion. Neben das schematische Anwenden dieser Strategien¹⁰ tritt von Anfang an das gezielte Planen ihres Einsatzes (eine Rekursion suchen, einen Induktionsbeweis planen). Gegen Ende des Semesters wird ein anspruchsvolles Niveau erreicht, das im Hinblick auf logische Komplexität und Anspruch an Kreativität deutlich über andere Anfängervorlesungen hinausgeht. Dies ist nur möglich, da nicht gleichzeitig abstrakte Inhalte zu verarbeiten sind.

Form: Durchführung von Vorlesung und Tutorien; Prüfungen

Wenn wir die Studierenden zu einem aktiven Umgang mit Mathematik hinführen wollen, sollten wir unsere Lehrveranstaltung so gestalten, dass sie ständig zur

¹⁰ Zum Beispiel der Beweis von Formeln durch vollständige Induktion. Da in der Analysis-Vorlesung viele solche 'Schema F' Beispiele behandelt werden, wird dies in MPB nur kurz illustriert.

Mitarbeit aufgerufen sind. Wie lässt sich dies verwirklichen, insbesondere bei hohen Teilnehmerzahlen?

Das Modul MPB an der Uni Oldenburg gliedert sich in wöchentlich je eine 90-minütige Vorlesung (ca. 200 Studierende) und ein 90-minütiges Tutorium (ca. 15-20 Studierende unter Anleitung eines Tutors/einer Tutorin – dies sind fortgeschrittene Studierende).

Die Vorlesung: In weiten Teilen hat die Vorlesung die Form eines Dialogs zwischen Dozent und Studierenden. Der Dozent formuliert ein Problem und illustriert es kurz durch ein oder zwei Beispiele. Es werden keine fertigen Lösungen präsentiert, sondern Ideen gesammelt, verschiedene Zugänge versucht, Ziele analysiert usw. Dabei wird den Studierenden immer wieder Zeit zum Nachdenken gegeben, gerne auch im Gespräch mit den Nachbarn. Dadurch erleben die Studierenden, wie Mathematik entsteht, und sind intensiv am Geschehen beteiligt. Obwohl im Plenum nur wenige Studierende zu Wort kommen, können sich die anderen mit diesen identifizieren. Dies ist besser, als wenn alle Beiträge zur Lösung vom Dozenten kämen.

Es ist wichtig, für diese explorativen Phasen viel Zeit einzuräumen.¹¹ Sie werden gelegentlich durch Abschnitte in eher klassischem Vorlesungsstil ergänzt (s. die Themenauswahl in Abschnitt ‚Inhalt und Aufbau‘)

Die bei den Lösungsprozessen gewonnenen methodischen und inhaltlichen Erkenntnisse werden vom Dozenten explizit benannt, geordnet und dadurch für weitere Probleme nutzbar gemacht.

Die Tutorien: Hier werden Probleme zunächst allein und dann in kleinen Gruppen (2-4 Studierende) erarbeitet und die Lösungsversuche dann in der gesamten Gruppe besprochen. In der Kleingruppenarbeit haben die Studierenden Gelegenheit, ihre Ideen sprachlich zu formulieren, und lernen voneinander. Wichtig ist eine enge Abstimmung von Tutorien und Vorlesung sowie der Tutorien untereinander. Dies wurde durch ausführliche Besprechungen sowie durch die Vorgabe von Präsenzaufgaben für die Tutorien durch den Dozenten erreicht. Neben inhaltlichen Hinweisen (z.B. auf mehrere Lösungsansätze hinweisen) sind methodische Überlegungen wie die Grundprinzipien und das 3-Phasen Modell Thema der Besprechungen. Die Tutoren haben eine sehr wichtige Funktion und sollten darin angeleitet werden, Hilfe zur Selbsthilfe zu geben.

Übungszettel und Klausur: Wie sonst auch üblich, werden wöchentlich Übungszettel ausgegeben. Die Korrektur ist anspruchsvoll, da häufig sehr verschiedene Lösungswege beurteilt werden müssen. Daher korrigieren die Tutoren gemeinsam. Als Prüfungsform am Semesterende ist wegen der großen Zahl der Studierenden nur eine Klausur praktikabel. Die naheliegende Frage, wie man Problemlösefähigkeiten unter Klausurbedingungen testen kann, wird dadurch beantwortet bzw.

¹¹ Der Luxus, diese Zeit zu haben, ist der Vorteil einer methodisch orientierten Lehrveranstaltung.

teilweise umgangen, dass die Klausuraufgaben Variationen von Aufgaben sind, die in Vorlesung, Übungsgruppe oder Hausaufgabe behandelt wurden.

Rahmenbedingungen: Einbindung in die Studiengänge

An der Universität Oldenburg wurde das Modul *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* zum Wintersemester 2011/12 eingeführt. Es wird immer im Wintersemester angeboten. Im Studiengang 2-Fächer-Bachelor Mathematik (für das Lehramt in Gymnasien und berufsbildenden Schulen) ist es Pflicht und wird zum Besuch im ersten Semester, neben der Analysis 1, empfohlen. Im Vergleich zur früher empfohlenen Kombination Analysis 1 / Lineare Algebra bedeutet das eine Entlastung am Studienbeginn, sowohl zeitlich (10 statt 12 Stunden wöchentliche Präsenzzeit) als auch inhaltlich (MPB wird als leichter empfunden als Lineare Algebra). Im Fach-Bachelor Studiengang ist MPB Teil eines Wahlpflicht-Bereichs (sog. Professionalisierungsbereich) und wird empfohlen. Die Standardempfehlung für das erste Semester ist hier wie früher Analysis 1 und Lineare Algebra. Auch Studierende höherer Semester profitieren von dem methodischen Ansatz, den herausfordernden Problemen und der Diskussion übergreifender wissenschaftlicher Prinzipien.

Eine solche Umstellung bringt Herausforderungen mit sich, organisatorisch (z.B. wird die Lineare Algebra im Winter und im Sommer angeboten; Lehramtsstudenten besuchen sie parallel zur Analysis 2) und inhaltlich: Wird eine neue Lehrveranstaltung Pflicht, muss eine andere weichen. Das ist eines der Hauptprobleme bei der Weiterentwicklung von Studiengängen. Alles erscheint wichtig, für jedes existierende Modul gibt es gute Gründe, es beizubehalten. Für das Pflichtmodul MPB wurden in Oldenburg Kürzungen in fortgeschrittenen Themen der Analysis und Algebra im Lehramtsstudium vorgenommen. Wir haben uns entschieden, dass wir für die angehenden Lehrer einen soliden Einstieg, an dem sie wachsen und die Mathematik entdeckend erleben, als wichtiger ansehen als zum Beispiel den Satz über implizite Funktionen.

Erfahrungen

Wurden die angestrebten Ziele erreicht? Wie wurde das Format angenommen? Gibt es nun weniger Studienabbrecher?

Die folgenden Einschätzungen/Aussagen basieren auf vielen Gesprächen mit den Tutoren und mit Studierenden, auf Lehrevaluationen, auf der Klausurkorrektur sowie auf Berichten der Studierenden in sogenannten Lerntagebüchern. In diesen sollten sie die Inhalte des Moduls aus Sicht ihres eigenen Lernfortschritts re-

flektieren und beurteilen. Mehrmals im Semester wurden die Lerntagebücher eingesammelt.¹²

Allgemein kann gesagt werden, dass die im Abschnitt ‚Grundideen, Ziele‘ formulierten Ziele für einen großen Teil der Studierenden erreicht wurden: Entwickeln von Problemlösefähigkeiten, souveräner Umgang mit Beweisen, erhöhtes Selbstvertrauen und Erleben der Lebendigkeit der Mathematik. Beweisaufgaben in der Klausur wurden von einer deutlichen Mehrheit der Teilnehmer gut gelöst – im Kontrast zu Erfahrungen, die man meist mit (selbst einfachen) Beweisaufgaben z.B. in Analysis 1 Klausuren macht.

Das 3-Phasen-Modell hat sich sehr gut bewährt: Nach 1-2 Wochen war bei vielen Teilnehmern eine Begeisterung über die ersten eigenen mathematische Entdeckungen zu verspüren. Das wiederholte explizite Thematisieren der Notwendigkeit von Beweisen und allgemeinen Formulierungen in der zweiten Phase erlaubte es, damit auch Studenten zu erreichen, die anfangs damit Schwierigkeiten hatten. Die dritte Phase des gezielten Einsetzens und Planens von Beweisen wurde erwartungsgemäß sehr unterschiedlich gemeistert und bot auch den leistungsstärksten Studenten angemessene Herausforderungen.

Die meisten Studierenden waren durchgehend sehr motiviert. Dies war besonders auffällig für die Lehramtsstudenten, da für sie die Berufsrelevanz gut erkennbar war.

Das interaktive Format, gemischt mit gelegentlichen Vorlesungssequenzen, hat sich trotz der Größe der Vorlesung bewährt, um die Aufmerksamkeit über weite Strecken zu erhalten. Ebenfalls bewährt hat sich das Format der Kleingruppenarbeit in den Tutorien, dort wurde meist begeistert mitgearbeitet.

Die insgesamt sehr positive Stimmung lässt sich durch eine Äußerung beschreiben, die ich von mehreren der beteiligten Tutoren gehört habe: So ein Modul hätte ich mir am Studienbeginn auch gewünscht.

Studienabbrecherzahlen lassen sich zwar erheben, sie sind aber schwierig zu interpretieren, da sie vielen Einflüssen und natürlichen Schwankungen unterliegen. Im Lehramtsstudiengang (2-Fächer-Bachelor Mathematik) war die Anzahl der Abbrecher im 1. Semester im WS 2011 mit 12,5% geringer als in den Vorjahren, im WS 2012 mit 6,8% sogar deutlich. Die Anzahl der Studierenden, die im WS 2011 begonnen und ihr Studium bis zum Ende ihres 3. Semesters abgebrochen oder das Fach gewechselt hatten, lag immerhin noch bei 34%, war damit aber auch deutlich geringer als in den Vorjahren.

Ich möchte auch einige Schwierigkeiten erwähnen. Da MPB von den Studierenden als deutlich zugänglicher empfunden wurde als die parallel besuchte Analysis 1, ergab sich hier zeitweilig eine Konkurrenzsituation, z.B. Konkurrenz um Arbeitszeit (Fokussierung auf die schwierigere Veranstaltung). Die Ansprüche an

¹² Die Akzeptanz der Lerntagebücher war anfangs gering. Einige Studierende fanden sie bis zum Semesterende überflüssig, aber es gab auch viele, die es sehr schätzten, am Ende noch einmal ihre Eintragungen vom Anfang zu lesen und ihre Fortschritte so klar vor Augen zu haben. Das Führen der Lerntagebücher war gefordert, ihre Inhalte flossen aber nicht in die Note ein.

die Tutoren sind hoch, insbesondere wenn die Veranstaltung erstmalig durchgeführt wird. Sie lernen aber auch methodisch viel dabei. Auch die Ansprüche an den Dozenten der Vorlesung sind zumindest ungewöhnlich: Das interaktive Format erfordert ein schnelles Eingehen auf unvorhergesehene Vorschläge, manchmal auch den Mut, vor Publikum zu überlegen, zu schwanken oder auch zu sagen, dass man sich etwas in Ruhe überlegen müsse. Genau das ist aber auch im Sinne von MPB: Den mathematischen Prozess für die Studenten sichtbar machen.

Schlussworte

Mit MPB habe ich eine Möglichkeit beschrieben, dem Mathematikstudium wertvolle neue Impulse zu geben und damit unter Anderem den Übergang von der Schule zur Hochschule zu erleichtern, ohne dabei die wissenschaftliche Qualität des Studiums zu kompromittieren. Manche Kollegen mögen sich durch die positiven Erfahrungen ermutigt fühlen, ähnliches zu versuchen. Aufgrund der Hindernisse, die großen Änderungen von Studiengängen im Weg stehen, mag dies auch durch teilweise Integration der im Abschnitt ‚Grundidee, Ziele‘ dargelegten Grundideen geschehen.

Im schulischen Bereich wurden seit einigen Jahren von zahlreichen Autoren Forderungen und Konzepte formuliert, die eine ähnliche Zielrichtung wie MPB haben (z.B. Bruder 2001, Pehkonen 2001, Winter 1989). Im universitären Bereich scheint ein derartiger Ansatz bisher neu zu sein - abgesehen vom Klassiker (Pólya 1967). Es ist bemerkens- und bedauerndswert, dass die dort formulierten Ideen bisher nicht systematisch in das Mathematikstudium integriert wurden. MPB greift diese Ideen auf und zeigt, wie sie im Kontext der aktuellen Mathematikausbildung in Schule und Universität umgesetzt werden können.

In der Studie *Mathematik Neu Denken*, die der Gymnasiallehrerbildung neue Impulse gegeben hat, fordern die Autoren neben Veranstaltungen zu historischen und philosophischen Themen unter anderem: ‚Die Fachmathematik muss nach unserer Auffassung eine starke elementarmathematische Komponente enthalten, die nach Möglichkeit an schulmathematische Erfahrungen anknüpft und auch wissenschaftliches Arbeiten „im Kleinen“ ermöglicht‘ (Beutelsbacher et al. 2011, S. 2). Genau dies (und mehr) leistet MPB.

Literaturverzeichnis

- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Bruder, R. (2001). Kreativ sein wollen, dürfen und können. *mathematik lehren*, 106, 46-50.
- Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise*

in die Mathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grieser, D. (2015). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studiengangphase. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 87-102). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Pehkonen, E. (2001). Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 47(6), 60-72.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern: Francke.

Pólya, G. (1967). *Vom Lösen Mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren* (Bd. 2). Basel: Birkhäuser.

Spalt, D. D. (1988). Das Unwahre des Resultatismus. Eine historische Fallstudie aus der Analysis. *Mathematische Semesterberichte*, 35, 6-36.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Vieweg.