Behauptung. *Seien* $\mathbb{K}$ *ein beliebiger Körper und* $p(x)$ *ein Polynom aus* $\mathbb{K}[x]$ *vom Grad* n

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \textit{mit} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K} \textit{ und } a_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Ferner seien $P_i = (x_i, p(x_i))$ *für* $0 \leq i \leq n$ *Punkte an paarweise verschiedenen Stellen* $x_i \in \mathbb{K}$. *Dann ist das (kleinstgradige) Interpolationspolynom* $f(x)$, *für das* $f(x_i) = p(x_i)$ *für* $0 \leq i \leq n$ *gilt, eindeutig bestimmt, hat Grad* n *und es gilt* $p = f$.

Beweis. Existenz, Eindeutigkeit und Grad $\leq n$ lasse ich als Klassiker hier außen vor. Nehmen wir also an, der Grad von f wäre kleiner als n. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^i \qquad \text{mit} \qquad b_i \in \mathbb{K} \text{ (darf 0 sein.}$$

Dann ist das Differenzpolynom $d(x) := p(x) - f(x)$ vom Grad n, denn

$$\begin{aligned} d(x) &= p(x) - f(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \\ &= \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i) x^i. \end{aligned}$$

Wegen $f(x_i) = p(x_i)$ gilt $d(x_i) = p(x_i) - f(x_i) = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$. Das Differnzpolynom hat also mindestens $n + 1$ Nullstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Aus dem Fundamentalsatz folgt dann, dass $d(x)$ dargestellt werden kann als

$$d(x) = \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}_{\text{Grad } n+1} \cdot r(x)$$

wobei $r(x)$ ein beliebiges Polynom aus $\mathbb{K}[x]$ ist. Ist der Grad von $r(x)$ nichtnegativ, so ist der Grad von $d(x)$ mindestens $n+1$. Das steht im Widerspruch dazu, dass $d(x)$ den Grad n hat. Bleibt noch die Möglichkeit, dass $r(x)$ den Grad $-\infty$ hat, also das Nullpolynom ist. In dem Fall wäre $d(x) = 0$, also $f(x) = p(x)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass der Grad von f kleiner ist als der Grad von p. Folglich ist die Annahme widerlegt und mit den ausgelassenen Beweisklassikern gilt $f(x) = p(x)$.

$\square$

Ohne die Einschränkung auf Punkte die auf einem Polynom liegen, kann der Grad des Interpolationspolynoms natürlich kleiner sein.