Carl von Ossietzky Universität Oldenburg - Fakultät V- Institut für Physik
Modul Grundpraktikum Physik – Teil I

Trägheitsmoment - Steinerscher Satz

Stichworte:
Rotationsbewegung, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment, Drehmoment, Drehimpuls, STEINERscher Satz

Messprogramm:
Messung des Trägheitsmomentes einer Kreisscheibe, Bestimmung der Lage der Schwerpunktachse eines unregelmäßig geformten Körpers.

Literatur:
/1/ EICHLER, H. J., KRONFELDT, H.-D., SAHM, J.: „Das Neue Physikalische Grundpraktikum“, Springer-Verlag, Berlin u.a.

1 Einleitung

Ziel dieses Versuches ist es, das Verständnis für die Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung zu vertiefen. Dazu wird ein Versuchsaufbau verwendet, mit dem Trägheitsmomente von Körpern bezüglich beliebiger Achsen gemessen werden können.

Anhand von Tabelle 1 soll zunächst an die einander entsprechenden Größen der Translations- und Rotationsbewegung erinnert werden.

Tabelle 1: Zum Vergleich von Translations- und Rotationsbewegung.

Translationsbewegung			**Rotationsbewegung**		
Name	**Symbol**	**Einheit**	**Name**	**Symbol**	**Einheit**
Ortsvektor	$\mathbf{r}$	m	Winkel [1]	$\boldsymbol{\varphi}$	rad
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$	m s^{-1}	Winkelgeschwindigkeit [1]	$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$	rad/s^{-1}
Beschleunigung	$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$	m s^{-2}	Winkelbeschleunigung [1]	$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$	rad/s^{-2}
Masse	m	kg	Trägheitsmoment [2]	$I = \int R^2 \mathrm{d}m$	kg m^2
Impuls	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	kg m s^{-1}	Drehimpuls	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}$	kg m^2 s^{-1}
Kraft	$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$	N	Drehmoment	$\mathbf{T} = I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$ $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	N m

2 Theorie

Wir betrachten gem. Abb. 1 eine Drehscheibe D vom Radius r, um die ein feiner Faden gewickelt ist. Der Faden ist über eine Umlenkrolle R mit einer Masse m verbunden. Durch den Stift T eines Haltemagneten B wird die Drehscheibe arretiert. Nach Schließen des Schalters S fließt ein Strom aus der Spannungsquelle U durch den Spulendraht des Haltemagneten. Durch das dadurch entstehende Magnetfeld wird der Stift T zurückgezogen und die Drehscheibe freigegeben. Die fallende Masse m sorgt danach für eine beschleunigte Drehbewegung der Scheibe um die Drehachse H.
Wir suchen eine Gleichung, mit der wir aus bekannten oder messbaren Größen das Trägheitsmoment I_D der Drehscheibe berechnen können. Dazu stellen wir zunächst die Bewegungsgleichung für die Rotations-

[1] Die Richtungen der *axialen* Vektoren $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$ zeigen per Definition in Richtung der Drehachse. Hinsichtlich des Vorzeichens gilt die Rechte-Hand-Regel: zeigen die gekrümmten Finger in Richtung der Drehbewegung, so zeigt der Daumen in Richtung von $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$. *Polare* Vektoren (gewöhnliche Vektoren) wie z.B. die für Ort ($\mathbf{r}$) und Geschwindigkeit ($\mathbf{v}$) ändern ihr Vorzeichen bei einer Punktspiegelung des Koordinatensystems, axiale Vektoren (auch *Pseudovektoren* genannt) dagegen nicht.

[2] R ist der Abstand eines Massenelementes dm von der Drehachse.

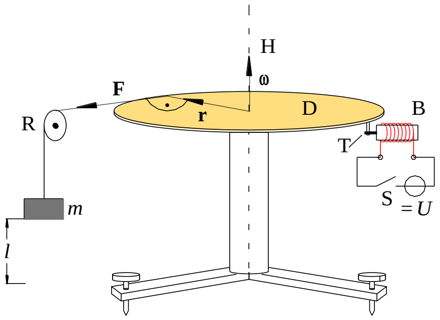

Abb. 1: Drehscheibe zur Messung von Trägheitsmomenten. Bezeichnungen siehe Text.

bewegung der Drehscheibe auf. Sie hat in diesem Fall eine sehr einfache Form: die Drehscheibe erfährt durch das Drehmoment $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ die Winkelbeschleunigung d**ω**/d*t*. In Analogie zum NEWTONschen Gesetz $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ gilt also (siehe Tabelle 1):

(1) $$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = I_D \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

Daraus folgt aufgrund der gewählten Geometrie ($\mathbf{r} \perp \mathbf{F}$) für die Beträge:

(2) $$F = \frac{I_D}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\,t}$$

In dieser Gleichung müssen wir F und $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ durch bekannte oder messbare Größen ersetzen. Um einen Ausdruck für $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ zu finden, betrachten wir zunächst die Bewegung der Masse m. Sie möge für das Durchfallen der Strecke l die Zeit t benötigen. Dann gilt für ihre Beschleunigung a:

(3) $$a = \frac{2l}{t^2}$$

Aufgrund der Verbindung von m mit der Drehscheibe über den Faden muss dies auch die Tangentialbeschleunigung eines Massepunktes am Rande der Drehscheibe sein. Für einen solchen Punkt gilt daher aufgrund des bekannten Zusammenhangs zwischen Tangential- und Winkelbeschleunigung mit Gl. (3):

(4) $$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} = \frac{a}{r} = \frac{2l}{r\,t^2}$$

Einsetzen von Gl. (4) in Gl. (2) ergibt:

(5) $$F = I_D \frac{2l}{r^2 t^2} = I_D \frac{a}{r^2}$$

Wir benötigen nun noch eine Beziehung für die nicht direkt messbare Kraft F, die die Drehscheibe beschleunigt. Dazu schauen wir uns die Kräftebilanz für die Anordnung an. Die beschleunigende Gewichtskraft $G = mg$ (g: Erdbeschleunigung) muss die Masse m beschleunigen, Reibungskräfte an Umlenkrolle R und Drehscheibe D überwinden sowie die Umlenkrolle und die Drehscheibe in beschleunigte Rotation versetzen. Hierfür sind folgende Kräfte erforderlich:

F_m :	Beschleunigungskraft für m
F_{RR} :	Reibungskraft an der Umlenkrolle
F_R :	Beschleunigungskraft für die Umlenkrolle
F_{RD}:	Reibungskraft an der Drehscheibe
F:	Beschleunigungskraft für die Drehscheibe

Es gilt also:

(6) $$G = mg = F_m + F_{RR} + F_R + F_{RD} + F$$

Die Kraft, die m beschleunigt, $F_m = ma$, ist also erheblich kleiner als die Gewichtskraft $G = mg$.

Der Einfachheit halber wollen wir nun annehmen, dass Reibungskraft und Beschleunigungskraft an der Umlenkrolle durch *eine* Kraft ersetzt werden können, die zur Translationsbeschleunigung einer Ersatzmasse m_e (hier: $m_e \approx 2{,}2$ g) aufgewendet werden müsste:

(7) $$F_R + F_{RR} := m_e a$$

Damit folgt für die gesuchte Kraft F aus Gl. (6):

(8) $$F = mg - (m + m_e)a - F_{RD}$$

Setzen wir diese Gleichung in Gl. (5) ein, so erhalten wir:

(9) $$mg - (m + m_e)a = I_D \frac{a}{r^2} + F_{RD}$$

Der besseren Lesbarkeit wegen führen wir eine Kraft

(10) $$F_E := mg - (m + m_e)a$$

mit den messbaren Größen m und a und den bekannten Größen m_e und g ein, so dass Gleichung (9) die Form erhält:

(11) $$F_E = I_D \frac{a}{r^2} + F_{RD}$$

In dieser Gleichung zur Bestimmung von I_D stört uns noch die unbekannte und nicht direkt messbare Größe F_{RD}. Nehmen wir jedoch an, dass es sich bei der Reibung an der Drehscheibe um eine von der Geschwindigkeit unabhängige trockene Roll- und Gleitreibung handelt (so genannte COULOMB-*Reibung*), die nur von der Masse der Drehscheibe inkl. aufgelegter Körper abhängt, dann kann F_{RD} als zeitunabhängige Konstante behandelt werden. Gl. (11) stellt in diesem Fall eine einfache Geradengleichung der Form

(12) $$y = cx + b$$

dar, mit

(13) $$y = F_E, \qquad x = \frac{a}{r^2}, \qquad c = I_D, \qquad b = F_{RD}$$

Tragen wir also gem. Gl. (11) bei konstantem r für verschiedene beschleunigende Massen m die zugehörige Größe F_E (Gl. (10)) über a/r^2 auf (mit a nach Gl. (3)), so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung I_D. Wir haben damit, auch ohne die Größe F_{RD} zu kennen, einen Weg gefunden, um das Trägheitsmoment der Drehscheibe zu messen.

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass auf die Drehscheibe zusätzlich ein Körper aufgelegt wird. Ist I_K das Trägheitsmoment dieses Körpers (Masse m_K) bei Drehung um eine seiner Schwerpunktachsen (*Hauptachsen*) und fällt diese Schwerpunktachse C mit der Drehachse H der Drehscheibe zusammen, so ist das Gesamt-Trägheitsmoment I der Anordnung Drehscheibe/Körper:

(14) $$I = I_D + I_K$$

Verlaufen die Achsen H und C im Abstand s zueinander parallel, so gilt nach dem STEINER*schen Satz*[3]:

(15) $$I = I_D + I_K + m_K s^2$$

---

[3] JAKOB STEINER (1796 - 1863)

Gl. (11) lautet dann:

(16) $$F_E = I\,\frac{a}{r^2} + F_{RD}$$

Daraus folgt mit Gl. (3):

(17) $$I = \left(F_E - F_{RD}\right)\frac{r^2}{a} = \left(F_E - F_{RD}\right)\frac{r^2}{2l}\,t^2$$

Wir können diesen Zusammenhang benutzen, um die Lage einer zur Drehachse der Drehscheibe parallel verlaufenden Schwerpunktachse eines beliebig geformten Körpers zu bestimmen, der auf der Drehscheibe aufliegt. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Gemäß Gl. (15) wird I minimal für $s = 0$, d.h. wenn die Schwerpunktachse des Körpers und die Drehachse der Drehscheibe zusammenfallen. Ein Minimum für I ist nach Gl. (17) gleichbedeutend mit einem Minimum für die Fallzeit t bzw. für t^2. Verschieben wir also den Körper auf der Drehscheibe (variieren also s), so muss die Fallzeit t bei einer bestimmten Körperposition ein Minimum aufweisen. Die zugehörige Funktion $t = f(s)$, die dieses Verhalten beschreibt, wollen wir nun bestimmen. Dazu setzen wir Gl. (15) in Gl. (17) ein, lösen nach t^2 auf und erhalten für t als Funktion von s:

(18) $$t^2 = \underbrace{\frac{\left(I_D + I_K\right)2l}{\left(F_E - F_{RD}\right)r^2}}_{K_1} + \underbrace{\frac{2l\,m_k}{\left(F_E - F_{RD}\right)r^2}}_{K_2}\,s^2$$

oder in übersichtlicherer Schreibweise mit den Hilfsgrößen K_1 und K_2:

(19) $$t^2 = K_1 + K_2\,s^2$$

Frage 1:
- Was für eine Funktion (Kurve) stellt Gl. (19) dar? (Hinweis: Kegelschnitte)

Zur experimentellen Bestimmung der Lage der gesuchten Schwerpunktachse C mit Hilfe von Gl. (19) gehen wir folgendermaßen vor: Auf der Drehscheibe geben wir ein Koordinatensystem *XY* vor, dessen Ursprung wir in die Drehachse H legen (s. Abb. 2). Längs der y-Achse versehen wir die Drehscheibe mit einer Lochreihe. Auf dem Körper, für den wir die Lage der Schwerpunktachse suchen, bringen wir an beliebiger Stelle P einen Stift an. Stift und Lochreihe sind so ausgelegt, dass wir den Körper in y-Richtung auf der Drehscheibe verschieben können, ohne seine Orientierung bezüglich des Koordinatensystems *XY* dabei zu ändern (s. Anmerkung am Ende von Kap. 3.2).

Nach dem Auflegen des Körpers auf die Drehscheibe habe der Punkt P (also der Stift) die Koordinaten $(0, y_P)$. Für den Abstand s der Schwerpunktachse C von der Drehachse H gilt dann:

(20) $$s = \sqrt{\Delta x^2 + \left(y_P - \Delta y\right)^2}$$

Gemäß Gl. (19) hat die Fallzeit t für die beschleunigende Masse m dann ein Minimum, wenn s minimal ist, was nach Gl. (20) bei festem Δx für $y_P = \Delta y$ der Fall ist.

Verschieben wir demnach den Körper in y-Richtung auf der Drehscheibe und tragen wir jeweils die Fallzeit t über der Verschiebung y_P auf, so können wir durch Minimumsuche in der entstehenden Kurve die Größe Δy bestimmen. Auf analoge Weise lässt sich die Größe Δx finden und wir können, ausgehend von dem willkürlich gewählten Punkt P, die Lage der gesuchten Schwerpunktachse angeben.

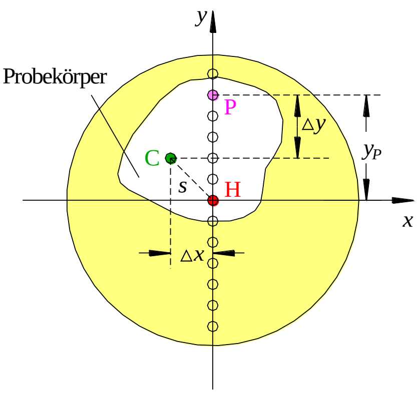

Abb. 2: Drehscheibe (gelb) mit Probekörper (weiß, Aufsicht). H ist die Drehachse, C die Schwerpunktachse des Probekörpers[4] und P der Punkt der Fixierung des Probekörpers in der vertikalen Lochreihe auf der Drehscheibe. s ist der Abstand zwischen C und H.

3 Versuchsdurchführung

Zubehör:

Drehscheibe auf Dreifuß, 5 Beschleunigungsgewichte (m = (1,00 ± 0,01) g) mit Teller (m gemäß Aufdruck, Fehler vernachlässigbar), Messingkreisscheibe mit Haltestiften, unregelmäßig geformter Probekörper mit Haltestiften, Netzgerät (PHYWE (0 - 15 / 0 - 30) V), Magnethalter, Stativmaterial für Magnethalter, Schalter, Lichtschranke, elektronischer Universalzähler, Digital-Oszilloskop TEKTRONIX TDS 1012 / 1012B / 2012C / TBS 1102B - EDU, Präzisionswasserwaage (Genauigkeit 0,1 mm auf 1 m), Waage, Metallmaßstab, Messschieber, Bremsstäbchen, Faden.

Achtung:

Die Drehscheiben haben sehr empfindliche Präzisionslager, die bei unsachgemäßer Behandlung zerstört werden können. Drehscheiben nur vorsichtig mit dem Finger bewegen! Durch rechtzeitiges Abbremsen darauf achten, dass der Faden sich nicht im Lager verfängt! Abbremsen der Scheiben nur mit dem bereitliegenden Bremsstäbchen!

Hinweis:

Vor Praktikumsbeginn wurden die Drehscheiben von der technischen Assistenz mit Hilfe einer Präzisionswasserwaage exakt waagerecht ausgerichtet.

3.1 Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

Das Trägheitsmoment I_K einer Messing-Kreisscheibe (Radius r_K, Masse m_K) bei Drehung um ihre Symmetrieachse C (Abb. 3) soll mit einer Anordnung gem. Abb. 1 bestimmt werden. Es berechnet sich gem. Gl. (14) zu:

$$I_K = I - I_D \tag{21}$$

Um I_K zu erhalten, muss mit Hilfe von Gl. (11) zunächst das Trägheitsmoment der leeren Drehscheibe (I_D) und anschließend mit Hilfe von Gl. (16) das Trägheitsmoment von Drehscheibe und Messingscheibe zusammen (I) bestimmt werden. Dazu wird

a) für die leere Drehscheibe
b) für die Drehscheibe mit zentrisch aufgelegter Messingscheibe

für 5 verschiedene Beschleunigungsgewichte die Fallzeit t (Mittelwert aus jeweils mindestens 4 Einzelmessungen) für eine vorgegebene Fallstrecke l (ausmessen!) gemessen. Die Fallzeit wird mit einem elektronischen Universalzähler gemessen. Der Zähler wird durch den Impuls gestartet, mit dem der Stift des Magnethalters zurückgezogen wird, der die Drehscheibe zunächst in der Ausgangsposition hält. Der Stoppimpuls für den Zähler wird durch eine Lichtschranke geliefert, durch die die Beschleunigungsgewichte am Ende der Strecke l fallen.
Anschließend werden gem. Gl. (11) bzw. Gl. (16) für a) und b) in *einem* Diagramm jeweils F_E über a/r^2 aufgetragen und die Ausgleichsgeraden berechnet (r *vorsichtig* mit dem Metallmaßband messen)[5]. Auf

[4] Beachte, dass die weiße Fläche die *Aufsicht* auf den Probekörper darstellt. Deshalb muss C nicht im Schwerpunkt der weißen Fläche liegen.

eine Fehlerrechnung für die einzelnen Werte von F_E und a/r^2 kann verzichtet werden. Aus den Parametern der Ausgleichsgeraden werden die Reibungskräfte F_{RD} an der Drehscheibe sowie die Trägheitsmomente I_D und I inkl. Fehler berechnet und daraus das Trägheitsmoment I_K gem. Gl. (21), ebenfalls inkl. Fehler.

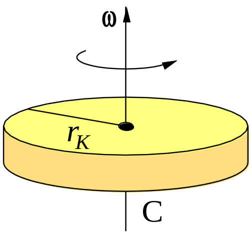

Abb. 3: Drehung einer Kreisscheibe mit Radius r_K und Masse m_K um ihre Symmetrieachse C.

Frage 2:

- Wie lässt sich aus der Beziehung $I = \int R^2 \, \mathrm{d}m$ (siehe Kap. 1) das Trägheitsmoment I einer Kreisscheibe mit der Masse m_K und dem Radius r_K bei Drehung um ihre Symmetrieachse C (s. Abb. 3) berechnen? Wie groß ist das theoretisch erwartete Trägheitsmoment für die benutzte Messingkreisscheibe (r_K und m_K messen!)? Woher rühren gegebenenfalls Abweichungen zwischen Theorie und Experiment?

3.2 Bestimmung der Lage einer Schwerpunktachse eines unregelmäßig geformten Körpers

Gemäß der bei Gl. (18) - (20) gegebenen Erläuterungen soll die Lage einer zur Drehachse H parallel verlaufenden Schwerpunktachse C eines unregelmäßig geformten Probekörpers bestimmt werden. Dazu wird der am Körper montierte Stift nacheinander in 10 verschiedene Löcher der Lochreihe auf der y-Achse der Drehscheibe eingesteckt und jeweils die Koordinate y_P bestimmt[6]. Für jede Position wird für *eine* Masse m jeweils die mittlere Fallzeit t (Mittelwert aus 4 Einzelmessungen) für eine vorgegebene Fallstrecke l gemessen. Anschließend wird t inkl. Fehlerbalken (Standardabweichung des Mittelwertes) über y_P aufgetragen und grafisch der Wert Δy ermittelt, bei dem t ein Minimum hat.

Alternativ *kann* die Lage des Minimums von t über einen nichtlinearen Funktionsfit[7] gewonnen werden. Als Zielfunktion dient dabei gem. Gl. (19):

$$t = \sqrt{K_1 + K_2 \left(y_P - \Delta y \right)^2} \tag{22}$$

mit den Fitparametern K_1, K_2 und Δy. Dieser Fit liefert direkt den Wert $y_P = \Delta y$, für den die Fallzeit t minimal ist.

Auf analoge Weise ließe sich Δx bestimmen und mit Hilfe beider Größen die Lage des Schwerpunktes C in der xy-Ebene relativ zum Punkt P angeben. Wir wollen es aus Zeitgründen jedoch bei der Messung des Abstandes Δy zwischen P und C belassen.

Anmerkung:

Um zu gewährleisten, dass sich die Orientierung des Probekörpers beim Verschieben längs der y-Achse nicht ändert, sind an dem Körper *zwei* Haltestifte angebracht. Es muss daher vorab festgelegt werden, welcher der beiden Stifte den Ort des Punktes P markieren soll.

---

5 Die Beschleunigung a liegt in der Größenordnung von 10^{-2} ms^{-2} und ist damit klein gegenüber g. Für F_E nach Gl. (10) ergeben sich deshalb für die Fälle a) und b) nur kleine Unterschiede.

6 Der Abstand zweier Löcher auf der Drehscheibe beträgt 10 mm (fehlerfrei).

7 Nichtlineare Funktionsfits werden in Teil II des Grundpraktikums im SoSe behandelt, siehe http://physikpraktika.uol.de/download/GPR/pdf/Nichtlineare_Fits.pdf. Daher ist die Anwendung hier freiwillig.