Vorlesungsmitschrift
zum
Vorkurs Mathematik 2015/2016

Sören Sanders

Version vom 4. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Etwas Logik und Mengenlehre

Um Mathematik betreiben zu können müssen wir uns zunächst mit der formalen Sprache der Mathematik auseinandersetzen. Die moderne Mathematik, wie sie seit Anfang des 20. Jahrhunderts betrieben wird, fußt auf der Mengenlehre, so dass wir uns in diesem ersten Kapitel mit dem Begriff der Menge beschäftigen und eine kurze Einführung in die Mengenlehre geben. Die Aufgabe der Mathematik ist es nun ausgehend von diesem Fundament wahre Aussagen zu finden.
Der Teil der Mathematik, der sich mit dem formalen Schließen beschäftigt, wird als Logik bezeichnet. Wir beginnen damit die wesentlichen Begriffe und Konzepte der Logik einzuführen, bevor wir uns anschließend der Mengenlehre zuwenden und anwenden, was wir zuvor über Logik gelernt haben.
Abschließend betrachten wir Abbildungen zwischen Mengen und untersuchen einige ihrer Eigenschaften.

1.1 Logik

Der zentrale Begriff der Logik ist die **Aussage**. Formal verstehen wir unter einer Aussage „ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch sein kann". Im Allgemeinen kann die Aussage von einer freien **Variablen** abhängt, in diesem Fall bezeichnen wir „das sprachliche Gebilde" als **Aussageform**.

Um ein Gefühl für diese „Definition" zu erhalten betrachten wir einige Beispiele für Aussagen:

Beispiel 1.1.

a) „Die Erde ist ein Planet." ist eine wahre Aussage; wobei wir nicht formal definiert haben was wir unter einem Planeten verstehen und nicht was wir mit „Erde" bezeichnen.

b) $5 = 3+2$ ist eine wahre Aussage, wogegen $2 = 1$ eine falsche Aussage ist. Ein Ausdruck wie $1+1$ dagegen ist keine Aussage, da er weder falsch noch richtig ist.

c) $x^2 = 1$ ist eine Aussagenform, die beim Einsetzen von $x = 1$ bzw. $x = -1$ eine richtige und beim Einsetzen anderer reeller Zahlen eine falsche Aussage ist.

d) Für $n > 2$ gibt keine nicht triviale Kombination ganzer Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$, so dass

$$a^n + b^n = c^n.$$

Diese einfach zu verstehende Aussage wurde im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat (1607-1665) formuliert und wird als „Großer Fermatscher Satz" bezeichnet. Dass es sich bei ihr um eine wahre Aussage handelt, wurde im Jahr 1994 vom Mathematiker Andrew Wiles (geboren 1953) bewiesen.

Aufgabe 1.2. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen handelt und überprüfen Sie für die Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

a) Heute ist Montag.

b) Ich würde lieber Physik studieren.

c) $\exists n \in \{1,2,3,4\}\colon \forall m \in \{1,2,3,4,5,6\}\colon n > m$

d) Diese Aussage ist falsch.

Variablen in Aussageformen werden häufig mit lateinischen und in bestimmten Kontexten mit griechischen Buchstaben bezeichnet (Winkel, Indizes von Vierervektoren etc.). Zur Erinnerung ist hier noch einmal das griechische Alphabet mit den lateinischen Transkriptionen abgebildet:

$A\ \alpha$	$B\ \beta$	$\Gamma\ \gamma$	$\Delta\ \delta$	$E\ \varepsilon$	$Z\ \zeta$	$H\ \eta$	$\Theta\ \theta$
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	zeta	eta	theta
$I\ \iota$	$K\ \kappa$	$\Lambda\ \lambda$	$M\ \mu$	$N\ \nu$	$\Xi\ \xi$	$O\ o$	$\Pi\ \pi$
iota	kappa	lambda	my	ny	xi	omikron	pi
$P\ \rho$	$\Sigma\ \sigma$	$T\ \tau$	$Y\ \upsilon$	$\Phi\ \varphi$	$X\ \chi$	$\Psi\ \psi$	$\Omega\ \omega$
rho	sigma	tau	ypsilon	phi	chi	psi	omega

Manche Aussagen sind nicht so einfach, wie die aus unserem ersten Beispiel, sondern zusammengesetzt aus mehreren Teilen. So besteht zum Beispiel die Aussage „Das Logo der Uni Oldenburg ist blau und weiß.“ aus den zwei Teilen „Das Logo ist blau“ und „das Logo ist weiß“. Wahr ist die zusammengesetzte Aussage genau dann, wenn beide Teile der Aussage wahr sind. Diese „und“-Verknüpfung wird als *Konjunktion* bezeichnet und ist eine von vielen Möglichkeiten Aussagen miteinander zu verbinden. Um solche zusammengesetzten Aussagen einfach und eindeutig schreiben zu können, gibt es in der Mathematik die folgenden Schreibweisen für die verbreitesten Verbindungen von Aussagen:

Notation 1.3 (Zusammengesetzte Aussagen)**.** Sind A und B Aussagen, so lassen sich daraus wie folgt neue bilden:

Symbol	Bedeutung
$A \wedge B$	A und B (**Konjunktion**); genau dann wahr, wenn A und B wahr sind
$A \vee B$	A oder B (nicht-ausschließende **Disjunktion**); genau dann wahr wenn zumindest eine der Aussagen A oder B wahr ist
$\neg A$	nicht A (**Negation**); genau dann wahr, wenn A falsch ist
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B, bzw. wenn A dann B in der Bedeutung $(\neg A) \vee B$
$A \Leftrightarrow B$	A und B sind gleichbedeutend / äquivalent, d.h. $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

Dabei wird bei der Folgerung $A \Rightarrow B$ keine Aussage über die Richtigkeit der Aussagen A oder B separat gemacht, sondern nur ausgesagt, dass aus der Richtigkeit von A auch die von B folgt. Ist hingegen A falsch, so ist keine Aussage über B gemacht und die Folgerung $A \Rightarrow B$ ist stets richtig. Dies wird in der Mathematik gelegentlich als „aus einer falschen Voraussetzung kann man alles folgern“ paraphrasiert.

Aufgabe 1.4. Schreiben Sie die *Kontravalenz* (ausschließende Disjunktion) $A \dot{\vee} B$, die genau dann wahr ist, wenn genau eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist, als Verknüpfung aus Konjunktion und Disjunktion.

Bemerkung 1.5. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass die Folgerung $A \Rightarrow B$ und die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ verschiedene Aussagen sind (dies wird besonders in der Schule nicht besonders genau genommen). Allerdings hat es sich in der Mathematik eingebürgert bei *Definitionen* von Begriffen durch eine äquivalente, definierende Eigenschaft von „wenn“ zu sprechen anstatt korrekterweise „genau dann wenn“ zu verwenden.
So würden wir für die Definition einer positiven ganzen Zahl schreiben

„Eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ heißt positiv, wenn $z > 0$“,

auch wenn wir eigentlich

„Eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ heißt positiv, genau dann wenn $z > 0$“.

meinen.

In Beispiel 1.1 haben wir bereits gesehen, dass Aussageformen für manche Werte für die enthaltenen Variablen richtig und falsch für andere sein können. Um auszudrücken, dass eine Aussageform für (zumindest) einen Wert oder sogar für alle Werte wahr wird, gibt es die „es gibt“- und „für alle“-Quantoren:

Notation 1.6 (Quantoren)**.** Ist A eine Aussageform, in der eine freie Variable x vorkommt (wir schreiben dies dann auch als $A(x)$), so setzten wir

Symbol	Bedeutung
$\exists x : A(x)$	es gibt ein x, so dass $A(x)$ wahr ist
$\forall x : A(x)$	für alle x ist $A(x)$ wahr

Aufgabe 1.7. Schreiben Sie die nachfolgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren und überlegen Sie sich, ob diese wahr oder falsch sind.

a) Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$, so dass $y > x$.

b) Es gibt eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $y > x$.

Was bedeutet dies für das Vertauschen der Reihenfolge der Quantoren?

Nachdem wir uns in Notation 1.3 bereits mit verschiedenen Möglichkeiten auseinandergesetzt haben Aussagen zusammenzusetzen, betrachten wir an dieser Stelle wie sich negierte Aussagen umschreiben lassen.

Bemerkung 1.8 (Negation). Seien A und B Aussagen und $A(x)$ eine Aussageform.

a) $\neg(\neg A) = A$, es ist falsch, dass A falsch ist, genau dann wenn A richtig ist.

b) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$, A und B ist genau dann falsch, wenn A falsch ist oder B falsch ist.

c) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$, A oder B ist genau dann falsch, wenn A falsch ist und B falsch ist.

d) $\neg(\forall x : A(x)) = \exists x : \neg A(x)$, $A(x)$ gilt für alle x ist genau dann falsch, wenn es ein x gibt, so dass $A(x)$ falsch ist.

e) $\neg(\exists x : A(x)) = \forall x : \neg A(x)$, es gibt ein x so dass $A(x)$ gilt ist genau dann falsch, wenn für alle x gilt, dass $A(x)$ falsch ist.

Die Aussagen b) und c) werden als *de Morgansche Gesetze* bezeichnet.

Elementare Aussagen, wie die aus Bemerkung 1.8, könne wir zeigen, indem wir alle Fälle einzeln betrachten, dies lässt sich übersichtlich in eine Wahrheitstabelle zusammenfassen, in der für jede Kombination aus Wahrheitswerten der unabhängigen Elementaraussagen (A und B im folgenden Beispiel) die Wahrheit der abgeleiteten Aussagen eingetragen wird.
Die Aussage b) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ lässt sich zum Beispiel wie folgt zeigen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	falsch	wahr
wahr	falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch

Dabei sind die ersten beiden Spalten die unabhängigen Variablen und die vier Zeilen entsprechen den vier möglichen Kombinationen, die von den Variablen angenommen werden. Dass die fünfte und siebte Spalte gleich sind, bedeutet, dass die beiden Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $(\neg A) \vee (\neg B)$ äquivalent sind.

Aufgabe 1.9. Zeigen Sie mit einer Wahrheitstabelle die Aussagen a) und c) aus Bemerkung 1.8 und die Transitivität von Folgerungen, d.h. aus $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$. Handelt es sich dabei sogar um eine Äquivalenz? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.10. Zeigen Sie das Assoziativgesetz $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ für die Disjunktion dreier Aussagen A, B und C.

Abschließend betrachten wir die Beweismethode des **Widerspruchsbeweis**, bei der aus der Annahme des Gegenteils dessen was man zeigen will und der Voraussetzung ein Widerspruch entsteht. Die zugrunde liegende Idee kann wie folgt motiviert werden.

Bemerkung 1.11 (Widerspruchsbeweis). In Notation 1.3 haben wir gesehen, dass die Forderung $A \Rightarrow B$ gleichbedeutend ist mit $(\neg A) \vee B$. Mit Bemerkung 1.8 a) ist dies äquivalent zu $\neg(\neg B) \vee (\neg A)$, und somit auch zu $\neg B \Rightarrow \neg A$. Wollen wir also die Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ beweisen, so können wir genauso gut $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen, das heißt wir können annehmen, dass die zu zeigende Aussage B falsch ist, und daraus folgern, dass dann dann die Voraussetzung A falsch ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem der bekanntesten Beispiele eines Widerspruchsbeweises ab.

Satz 1.12 (Satz von Euklid)**.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Für unseren Widerspruchsbeweis nehmen wir also an, dass die zu zeigende Aussage falsch ist, das heißt wir nehmen an, dass es eine endliche Anzahl von Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ gibt. Multiplizieren wir diese Zahlen p_1 bis p_n miteinander, so erhalten wir eine Zahl $m := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$. Addieren wir eins zu dieser Zahl, so erhalten wir eine Zahl, die größer ist als jede der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$, selbst also keine Primzahl sein kann (die Liste $p_1, \dots, p_n$ enthielt ja schließlich alle Primzahlen). Da $m+1$ also keine Primzahl ist, wird sie von einer der Primzahlen geteilt, das heißt $m+1 = k \cdot p$ für eine der Primzahlen p. Wir können diese Gleichung nach 1 auflösen und erhalten dadurch

$$1 = k \cdot p - m = k \cdot p - p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Die Differenz auf der rechten Seite dieser Gleichung ist durch p teilbar, damit muss auch 1 durch p teilbar sein. Dies stellt gerade den von uns gesuchten Widerspruch dar: keine Primzahl teilt 1 □

In diesem Beispiel haben wir gesehen, wie wir aus der Annahme des Gegenteils der zuzeigenden Aussage einen Widerspruch herleiten können. Dabei haben wir eine allgemeingültige Aussage über die Primzahlen gezeigt und nicht wie in der Bemerkung 1.11 eine Folgerung der Form $A \Rightarrow B$. Wir werden im Laufe dieser Vorlesung an verschiedenen Stellen Gebrauch von Widerspruchsbeweisen machen und auch Beispiele dieser Form kennenlernen.

1.2 Mengenlehre

Im zweiten Teil dieses ersten Kapitels beschäftigen wir uns mit der Mengenlehre. Zunächst definieren wir, was wir unter einer Menge verstehen. Sehr verbreitet ist dazu die folgende Charakterisierung einer Menge von Georg Cantor (1845-1918):

> „Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte bezeichnen wir als ihre **Elemente**.

Um ein grundlegendes Verständnis auszubauen, betrachten wir im Folgenden einige Beispiel und führen dabei die gängige Notation für Mengen ein. Wir werden uns in diesen Beispielen und im Folgenden auf Mengen von Zahlen beschränken. „Wohlunterscheidbare Objekte unsere Anschauung“ lassen natürlich auch Mengen, deren Elemente keine Zahlen sind, zu. Insbesondere Mengen von Mengen spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle und werden in weiterführenden Vorlesungen intensiv behandelt werden.

Notation 1.13.

a) Endliche Mengen lassen sich immer dadurch angeben, dass wir in geschweiften Klammern ihre Elemente auflisten, wobei die Reihenfolge und Mehrfachnennungen keine Rolle spielen. Eine Menge, die die Zahlen 1, 2 und 3 umfasst, können wir also als $\{1,2,3\}$ schreiben, völlig gleichwertig ist aber auch $\{2,1,3,2\}$.

b) Wir können Mengen ebenfalls durch eine beschreibende Eigenschaft angeben: $\{x; A(x)\}$ bezeichnet die Menge aller Objekte, die die Aussage $A(x)$ erfüllen. Für die Aussageform aus unserem Beispiel 1.1 c) ist das zum Beispiel
$$\{x \in \mathbb{R}; x^2 = 1\} = \{-1,1\}.$$

c) Die Menge $\{\}$ ohne Elemente nennen wir die **leere Menge** und bezeichnen sie mit $\emptyset$

d) Ist x Element einer Menge M, schreiben wir $x \in M$, andernfalls $x \notin M$.

e) Wenn für zwei Mengen M und N jedes Element von M auch in N enthalten ist, so nennen wir M eine **Teilmenge** von N und schreiben $M \subset N$. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass M und N gleich sind. Wollen wir ausdrücken, dass es sich um eine **echte Teilmenge** handelt, das heißt, dass $M \subset N$ und $M \neq N$, so schreiben wir stattdessen $M \subsetneq N$.

Wir hatten bereits im ersten Teil die Bezeichnung $\mathbb{Z}$ für die ganzen Zahlen und $\mathbb{R}$ für die reellen Zahlen benutzt. Nachdem wir nun definiert haben, was wir unter einer Menge verstehen, können wir diese ordentlich einführen. Dabei werden wir auf eine formale Definition verzichten, da dies den Umfang der Veranstaltung überschreiten würde. Die verbreitesten Zahlsysteme sind die im folgenden Beispiel aufgeführten, wobei die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ über die Peano-Axiome definiert werden und die weiteren daraus hervorgehen und zunehmend mehr „Struktur“ haben.

Beispiel 1.14.

a) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{0,1,2,\ldots\}$ sind durch die Peano-Axiome definiert, diese drücken im wesentlichen aus, dass es ein „kleinstes“ Element 0 gibt und für jedes Element n auch ein Element $n+1$ existiert.

b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ gehen aus den natürlichen Zahlen hervor indem man zu jedem Element sein „Negatives“ hinzunimmt.

c) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}\}$ umfassen alle Brüche ganzer Zahlen.

d) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stellen eine „Vervollständigung“ der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dar. Es werden gewissermaßen Lücken in den rationalen Zahlen geschlossen. Mit den für uns wichtigsten Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir uns im nächsten Kapitel auseinandersetzen.

Die hier verwendeten Beschreibung lässt sich mathematisch formal durchführen und dies wird in Teilen in den Grundlagenvorlesungen geschehen. Die Begriffe wie „kleinstes“, „Negatives“ und auch „Bruch“, die wir hier in einem anschaulichen Sinne verwendet haben, werden dort definiert. Für den Rahmen dieser Veranstaltung beschränken wir uns auf unser anschauliches Verständnis und ergänzen dieses in Beispielen, wann immer es sich anbietet.

Wir haben in Notation 1.3 gesehen, wie sich Aussagen zusammensetzen lassen. Völlig analog lassen sich aus Mengen neue Mengen erzeugen, die gängige Notation erinnert sogar etwas an die Analoge aus der Logik: $\wedge$ wird zu $\cap$ und $\vee$ wird zu $\cup$

Definition 1.15. Sind M und N Mengen, so lassen sich daraus wie folgt neue bilden:

a) $M \cap N := \{x; x \in M \wedge x \in N\}$ bezeichnen wir als die **Schnittmenge** von M und N; wenn M und N keine gemeinsamen Elemente enthalten, d.h. $M \cap N = \emptyset$, nennen wir M und N **disjunkt**.

b) $M \cup N := \{x; x \in M \vee x \in N\}$ bezeichnen wir als die **Vereinigungsmenge** bzw. **Vereinigung** von M und N.

c) $M \setminus N := \{x; x \in M \wedge x \notin N\}$ bezeichnen wir als die **Differenzmenge** von M und N.

d) $M \times N := \{(x,y); x \in M, y \in N\}$ bezeichnen wir als die **Produktmenge** bzw. das Produkt von M und N. Dabei bezeichnen wir mit (x,y) ein **geordnetes Paar** zweier Elemente von M bzw. N. Ist $M = N$, so schreiben wir statt $M \times N = M \times M$ auch M^2.

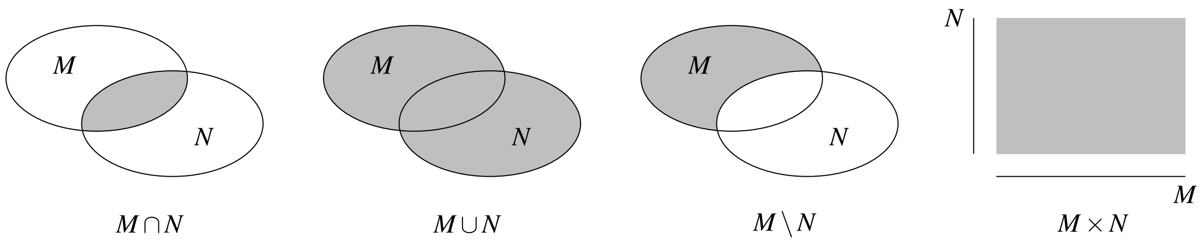


Abbildung 1.1: Darstellung der in Definition 1.15 definierten zusammengesetzten Mengen $M \cap N$, $M \cup N$, $M \setminus N$ und $M \times N$.

Aufgabe 1.16. Skizzieren Sie für zwei Mengen $A, B \subset M$ die *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := \{x; x \in A \dot{\vee} x \in B\},$$

die alle Elemente enthält, die in genau einer der Mengen A oder B liegen und schreiben Sie diese um in Form der oben eingeführten zusammengesetzten Mengen.

Das Analogon zur Negation von Aussagen in der Mengenlehre wird als Komplementbildung bezeichnet. In einer Menge M ist das Komplement von $N \subset M$ definiert als

$$N^{\mathrm{C}} := M \setminus N.$$

Völlig analog zu Bemerkung 1.8 lassen sich für das Komplement die in Bemerkung 1.17 aufgelisteten Aussagen zeigen.

Bemerkung 1.17. Seien $A, B, C \subset M$ Mengen.

a) Das Komplement des Komplements einer Menge entspricht dieser Menge: $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = A$

b) Das Komplement einer Schnittmenge ist die Vereinigung der Komplemente dieser Mengen:

$$(A \cap B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$$

c) Das Komplement einer Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente dieser Mengen:

$$(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$$

d) Zeigen Sie die Transitivität der Teilmengenrelation, d.h. aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$.

Die Aussagen b) und c) werden, wie ihrer Analoge für Aussagen, als de Morgansche Gesetze bezeichnet.
Um diese Aussagen zu zeigen, können wir auf ihre Analoge für Aussagen aus Bemerkung 1.8 zurückgreifen. So ergibt sich für die Identität in c) für ein Element $a \in M$

$$\begin{aligned} a \in (A \cap B)^{\mathrm{C}} &\Leftrightarrow \neg(a \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(a \in A \wedge a \in B) \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (\neg a \in A) \vee (\neg a \in B) \\ &\Leftrightarrow a \notin A \vee a \notin B \\ &\Leftrightarrow a \in A^{\mathrm{C}} \vee a \in B^{\mathrm{C}} \\ &\Leftrightarrow a \in A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

indem wir im mit $(*)$ markierten Schritt das in Bemerkung 1.8 gezeigte de Morgansche Gesetz für Aussagen verwendet haben.

Aufgabe 1.18. Zeigen Sie die Identitäten in Bemerkung 1.17 a), c) und d) für Mengen $A, B, C \subset M$ indem Sie die Ergebnisse aus Bemerkung 1.8 und Aufgabe 1.9 verwenden.

1.3 Abbildungen

Mit unserer Definition einer Menge sind wir nun ausgestattet zu definieren, was wir unter einer Abbildung zwischen zwei Mengen verstehen.

Definition 1.19 (Abbildungen)**.** Es seinen M und N Mengen.

a) Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von M nach N ist eine Zuordnung, die *jedem* Element aus M *genau ein* Element aus N „zuweist“. Wird dem Element $x \in M$ das Element $y \in N$ zugewiesen, so schreiben wir $f(x) = y$ und nennen y das **Bild** von x unter f bzw. den **Wert** von f an der Stelle x.

b) Die Menge M einer Abbildung f von M nach N nennen wir **Definitionsmenge**, **Startmenge** oder **Startraum** der Abbildung. Die Menge N bezeichnen wir als **Wertemenge**, **Zielmenge** oder **Zielraum** von f. Wenn wir betonen wollen was Definitions- und Wertemenge sind, schreiben wir statt f auch $f : M \to N$.

Bemerkung 1.20. Wir haben hier etwas salopp von einer Zuordnung gesprochen, formal lässt sich eine Abbildung f von M nach N als Teilmenge der Produktmenge $f \subset M \times N$ definieren, wobei es für jedes Element $x \in M$ genau ein Element $(x, y) \in f$ gibt. Mit der Notation aus Definition 1.19 lässt sich diese Menge schreiben als $f = \{(x, f(x)); x \in M\}$, entspricht also gerade dem **Graphen** der Abbildung f.

Bevor wir uns den Eigenschaften von Abbildungen zuwenden, betrachten wir zunächst einige einfache Beispiele.

Beispiel 1.21. Betrachten wir eine Abbildung $f : M \to N$, so müssen wir für jedes Element der Definitionsmenge M festlegen auf welches Element der Wertemenge N es abgebildet wird.

a) Sei M eine beliebige Menge, so ist die **identische Abbildung** definiert als

$$\mathrm{id}_M : M \to M, x \mapsto x,$$

d.h. jedes Element wird auf sich selbst abgebildet.

b) Sei $M := \{1, 2, 3\}$, dann definiert die Zuordnung $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$ und $3 \mapsto 2$ eine Abbildung von M auf M. Solche Umsortierungen einer endlichen Menge werden als *Permutationen* bezeichnet und spielen in der Mathematik eine große Rolle.

c) Die Zuordnungen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

stellen reelle Funktionen dar.

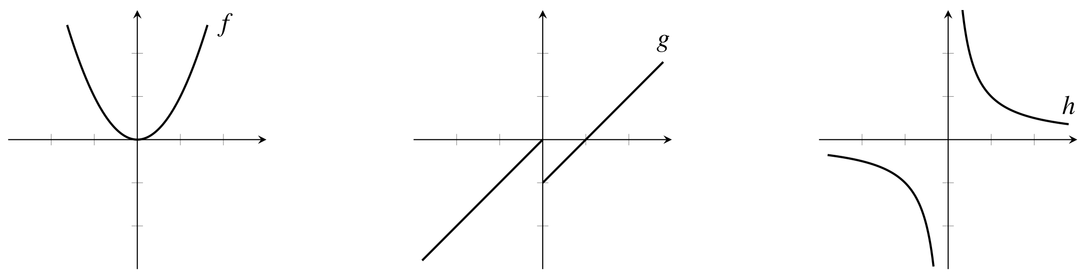


Abbildung 1.2: Darstellung der reellen Funktionen f, g und h aus aus Beispiel 1.21 c).

d) Sei $f : M \to N$ und $A \subset M$ eine Teilmenge, dann können wir auf A eine Abbildung

$$f|_A : A \to N, x \mapsto f(x)$$

definieren, diese bezeichnen wir als die **Einschränkung** von f auf A.
Nimmt $f : M \to N$ ausschließlich Werte in einer Teilmenge $B \subset N$ an, so lässt sich die Wertemenge von f entsprechend einschränken. Für die so eingeschränkte Abbildung verwenden wir die selbe Bezeichnung $f : M \to B$.

In Definition 1.19 legen wir nur fest, dass jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Wertemenge zugeordnet wird, anders herum können dabei Elementen der Wertemenge durchaus mehrere Elemente der Definitionsmenge oder auch kein Element der Definitionsmenge zugeordnet werden. Abbildungen, die jedem Element der Wertemenge *mindestens* ein Element der Definitionsmenge bzw. *höchstens* eines zuordnen, spielen eine besondere Rolle, so dass solche Abbildungen eigene Bezeichnungen erhalten haben:

Definition 1.22 (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Ist $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, so bezeichnen wir x als **Urbild** von y unter f.

b) Gibt es zu jedem Element der Wertemenge $y \in N$
   i) *mindestens* ein Urbild („jedes Element der Wertemenge wird erreicht“), so heißt f **surjektiv**.
   ii) *höchstens* ein Urbild („keine zwei Elemente der Definitionsmenge werden auf den selben Wert abgebildet“), so heißt f **injektiv**.
   iii) *genau* ein Urbild, d.h. ist f sowohl surjektiv als auch injektiv, so heißt f **bijektiv**.

c) Für eine bijektive Abbildung können wir eine Abbildung von N nach M definieren indem wir jedem $y \in N$ sein (eindeutiges) Urbild unter f zuordnen. Diese Abbildung bezeichnen wir als **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** von f und schreiben sie als $f^{-1} : N \to M$.

Beispiel 1.23. Unter diesen Gesichtspunkten betrachten wir nun noch einmal die reellen Abbildungen aus Beispiel 1.21 c).

- Die Abbildung f ist weder surjektiv noch injektiv, da zum einen -1 kein Urbild und 1 dagegen die beiden Urbilder -1 und 1 hat.

- Die Abbildung g ist surjektiv allerdings nicht injektiv. Für negative Zahlen entspricht g gerade der Identität, für $y < 0$ ist somit y ein Urbild. Nicht-negative Zahlen werden dagegen auf eine Zahl um eins kleiner abgebildet, für $y \geq 0$ ist somit $y + 1$ ein Urbild. Damit haben wir für jedes Element der Wertemenge ein Urbild gefunden, so dass g surjektiv ist. Andererseits hat $y = -1$ die beiden Urbilder $x = -1$ und $x = 0$, somit ist g nicht injektiv.

- Die Abbildung h ist injektiv aber nicht surjektiv. Um zu zeigen, dass h injektiv ist, betrachten wir zwei $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für die gilt $\frac{1}{x} = h(x) = h(x') = \frac{1}{x'}$, durch Multiplizieren mit xx' wird daraus $x' = x$, somit kann jedes Element $y \in \mathbb{R}$ höchstens ein Urbild haben. h ist nicht surjektiv, da es in $\mathbb{R}$ keine Zahl gibt, deren Kehrwert 0 ist, die 0 hat somit kein Urbild.

Schränken wir dagegen f auf $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ein, so ist sie bijektiv (wir setzten uns im nächsten Kapitel noch ausführlich mit dieser Funktion auseinander und verzichten an dieser Stelle auf einen formalen

Beweis, dass die Quadratfunktion auf den nicht-negativen reellen Zahlen bijektiv ist). Die Umkehrabbildung f^{-1} dieser Abbildung ist die aus der Schule bekannten Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot} := f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x} := f^{-1}(x).$$

Dabei haben wir die Bezeichnung $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ für die nicht-negative reelle Halbachse verwendet.

Aufgabe 1.24. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x + 2$$

bijektiv, also surjektiv und injektiv, ist und geben Sie eine Umkehrfunktion an.
Betrachten Sie die Einschränkung $f|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 3x+2$ auf die ganzen Zahlen. Ist diese Abbildung ebenfalls surjektiv und/oder injektiv?

Aufgabe 1.25. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, ((x,y),(x',y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + yx').$$

a) Zeigen Sie, dass f surjektiv aber nicht injektiv ist.

b) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fest und betrachten Sie $f_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x',y') \mapsto (xx' - yy', xy' + yx')$. Überprüfen Sie, ob $f_{(x,y)}$ surjektiv und/oder injektiv ist.

Aufgabe 1.26 (Knobelaufgabe)**.** Wieviele Abbildungen gibt es von $\{1,2,3,4\}$ nach $\{1,2,3,4,5,6\}$?
Wieviele davon sind injektiv, wieviele surjektiv?

Analog zur Bezeichnung Bild und Urbild einzelner Punkte, verwenden wir diese Notation auch für Mengen.

Definition 1.27. Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Für eine Menge $A \subset M$ nennen wir

$$f(A) := \{f(x); x \in A\} \subset N$$

das **Bild** von A unter f.

b) Für eine Menge $B \subset N$ nennen wir

$$f^{-1}(B) := \{x \in M; f(x) \in B\} \subset M$$

das **Urbild** von B.

Das Bild von M unter f bezeichnen wir mit $\operatorname{Im}(f) := f(M)$.

Wir wollen jetzt das „Hintereinanderausführen" von Abbildungen formalisieren und zeigen dessen wichtigste Eigenschaften.

Definition 1.28 (Verkettung von Abbildungen)**.** Für zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to R$ nennen wir die Abbildung

$$g \circ f : M \to R, x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** von f und g.

Verketten wir mehr als zwei Abbildungen spielt es keine Rolle in welcher Reihenfolge wir die Verkettung auflösen.

Lemma 1.29 (Assoziativität der Verkettung)**.** *Für drei Abbildungen $f : M \to N$, $g : N \to R$ und $h : R \to S$ gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Um zu zeigen, dass zwei Abbildungen gleich sind, müssen wir zeigen, dass beide Abbildungen jedes Element der Definitionsmenge auf den selben Wert in der Wertemenge abbilden. Das heißt wir müssen zeigen, dass die beiden Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ sämtliche $x \in M$ auf den selben Wert abbilden. Wir betrachten dazu ein beliebiges $x \in M$, für dieses gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

□

Die Verkettung erhält dabei Eigenschaften der Abbildungen wie die Surjektivität, die Injektivität und damit insbesondere die Bijektivität.

Lemma 1.30. *Seien $f : M \to N$ und $g : N \to R$ zwei Abbildungen.*

a) *Die Verkettung $g \circ f$ zweier surjektiver Abbildungen f und g ist surjektiv.*

b) *Die Verkettung $g \circ f$ zweier injektiver Abbildungen f und g ist injektiv.*

c) *Insbesondere ist die Verkettung $g \circ f$ zweier bijektiver Abbildungen f und g bijektiv.*

Beweis. Wir zeigen hier exemplarisch, dass die Verkettung surjektiver Abbildungen surjektiv ist. Dazu müssen wir nachweisen, dass für jedes $r \in R$ ein Urbild $m \in M$ existiert, für das gilt $(g \circ f)(m) = r$.
Wir stellen zunächst fest, dass, da g surjektiv ist, ein Urbild $n \in N$ existiert, für das $g(n) = r$ gilt. Da außerdem f surjektiv ist, gibt es ein Urbild $m \in M$ von n. Für diese m gilt dann wie gefordert

$$(g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(n) = r.$$

Damit haben wir für ein beliebiges $r \in R$ gezeigt, dass dieses ein Urbild hat. □

Aufgabe 1.31. Zeigen Sie, dass die Verkettung zweier injektiver Abbildungen injektiv ist.

Über injektive Abbildungen können wir definieren, was wir unter der Mächtigkeit einer Mengen verstehen.

Bemerkung 1.32 (Mächtigkeit von Mengen). Wir können leicht zeigen, dass die Permutation in Beispiel 1.21 b) eine bijektive Abbildung ist, wenn dagegen die Definitions- und Wertemenge unterschiedlich viele Elemente enthalten, so kann es sicherlich keine bijektive Abbildung geben.
Im Allgemeinen sprechen wir von der *Mächtigkeit* $|M|$ einer Menge M und sagen, dass eine Menge M mächtiger $|M| \geq |N|$ als eine Menge N ist, wenn es eine injektive Abbildung von N nach M gibt. Wir also gewissermaßen zu jedem Element aus N ein eindeutiges Element aus M finden können. Ist sowohl $|M| \geq |N|$ als auch $|M| \leq |N|$, so nennen wir M und N gleichmächtig.
Wir nennen eine Menge M *endlich* und von Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, wenn sie gleichmächtig wie $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Wenn M gleichmächtig wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist, so sagen wir, dass M *abzählbar* ist. Ist M dagegen echt mächtiger als $\mathbb{N}$, d.h. gibt es keine injektive Abbildung von M nach $\mathbb{N}$, so nennen wir M *überabzählbar*.

Um zu zeigen, dass zum Beispiel auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, von denen es „doppelt so viele“ wie natürliche Zahlen gibt, abzählbar sind, müssen wir zwei injektive Abbildungen, eine von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ und eine von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$ konstruieren. Eine injektive Abbildung von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist zum Beispiel die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z$.
Eine Abbildung aus den ganzen Zahlen in die natürlichen Zahlen, die injektiv ist, können wir ebenfalls angeben, die Idee ist dabei nicht-negative ganze Zahlen auf gerade Zahlen abzubilden und negative auf ungerade,

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z+1 & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Auf dem selben Weg können wir ebenfalls zeigen, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar sind. Dies erfordert etwas mehr Aufwand und wir verzichten an dieser Stelle auf einen formalen Beweis.

2 Zahlsysteme: reelle und komplexe Zahlen

Im ersten Kapitel haben wir bei der Vorstellung der Zahlsysteme von „Struktur“ gesprochen ohne zu spezifizieren, was wir damit meinen. Ziel dieses Kapitels ist es dies nachzuholen und sich mit weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen zu beschäftigen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels motivieren wir die komplexen Zahlen, führen diese formal ein und zeigen deren wichtigste Eigenschaften.

Definition 2.1 (Gruppe)**.** Eine **Gruppe** $(G,*)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung

$$*: G \times G \to G, (x,y) \mapsto x * y,$$

die die folgenden Gruppenaxiome erfüllen

a) (Assoziativität) Für alle $x,y,z \in G$ gilt $(x*y)*z = x*(y*z)$.

b) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e \in G$, für das $e*x = x*e = x$ für alle $x \in G$ gilt. Dieses Element bezeichnen wir als **neutrales Element**.

c) (Existenz von inversen Elementen) Für alle $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$, so dass $x'*x = x*x' = e$. Das Element x' nennen wir das **inverse Element** zu x.

Gilt außerdem

d) (Kommutatitivität) $x*y = y*x$ für alle $x,y \in G$

so bezeichnen wir $(G,*)$ als **kommutative** oder **abelsche Gruppe**

Bemerkung 2.2. Für die Definition einer Gruppe würde es ausreichen zu verlangen, dass $e*x = x$ in b) und $x'*x = e$ in c), aus den weitere Eigenschaften folgt dann direkt, dass auch $x*e = x$ und $x*x' = e$.

Bevor wir zu dieser etwas abstrakt anmutenden Definition einige Beispiele betrachten, wollen wir noch zeigen, dass sowohl das neutrale Element einer Gruppe als auch das inverse Element eines Elements einer Gruppe eindeutig definiert ist.

Lemma 2.3 (Eindeutigkeit neutraler und inverser Elemente)**.** *Für eine Gruppe $(G,*)$ gilt:*

a) *Es gibt genau ein neutrales Element.*

b) *Zu jedem Element x gibt es ein eindeutiges inverses Element x'.*

Beweis. Die Existenz eines neutralen Elements und des inversen Elements eines Elements der Gruppe ist nach Definition der Gruppe bereits gegeben, so dass wir nur die Eindeutigkeit dieser Elemente zeigen müssen. Dazu machen wir uns die Methode des Widerspruchsbeweis aus Bemerkung 1.11 zunutze.

a) Nehmen wir an, dass es zwei neutrale Elemente e und $\tilde{e}$ gibt, dann folgt für diese direkt:

$$\begin{aligned} e &= \tilde{e} * e && \text{(Eigenschaft des neutralen Elements } \tilde{e}) \\ &= \tilde{e} && \text{(Eigenschaft des neutralen Elements } e) \end{aligned}$$

b) Sei $x \in G$ beliebig. Nehmen wir an, dass es zwei inverse Elemente x' und $\tilde{x}'$ gibt, dann folgt für diese direkt:

$$\begin{aligned} x' &= e * x' && \text{(Eigenschaft des neutralen Elements } e) \\ &= (\tilde{x}' * x) * x' && \text{(Eigenschaft des inversen Elements } \tilde{x}') \\ &= \tilde{x}' * (x * x') && \text{(Assoziativität von } (G,*)) \\ &= \tilde{x}' * e && \text{(Eigenschaft des inversen Elements } x') \\ &= \tilde{x}' && \text{(Eigenschaft des neutralen Elements } e) \end{aligned}$$

□

Am Ende des letzten Kapitels hatten wir definiert, dass die Verkettung zweier Abbildungen selbst wieder eine Abbildung ist und gesehen, dass diese Operation assoziativ ist. Die Menge der Abbildungen $f : M \to M$ auf einer Menge M scheint also zumindest einige der Eigenschaften einer Gruppe zu erfüllen. Anstatt diese Menge aller Abbildungen zu betrachten (von der wir zeigen könnten, dass sie zusammen mit der Verkettung keine Gruppe darstellt), beschränken wir uns an dieser Stelle auf die Menge der linearer Abbildungen

$$L := \{x \mapsto a \cdot x + b; a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0\}$$

in den reellen Zahlen zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen.
Wir halten dazu zunächst fest, dass die Verkettung zweier linearer Funktionen $f : x \mapsto a \cdot x + b$ und $g : x \mapsto a' \cdot x + b'$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a \cdot x + b) = a' \cdot (a \cdot x + b) + b' = a'a \cdot x + (a'b + b')$$

selbst wieder eine lineare Abbildung ist, so dass die Verknüpfung von zwei Elementen der Menge L wieder ein Element der Menge L ergibt. Die Assoziativität folgt direkt aus Lemma 1.29. Als nächstes müssen wir zeigen, dass es ein Element e gibt, für das gilt, dass die Verkettung mit einer beliebigen linearen Funktion f diese erhält, d.h. $e \circ f = f$. Diese gesuchte Abbildung ist gerade die Identität auf den reellen Zahlen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$, die eine lineare Abbildung ist. Um dies zu sehen betrachten wir für eine beliebige lineare Abbildung $f : x \mapsto a \cdot x + b$ die Verkettung

$$(\mathrm{id} \circ f)(x) = \mathrm{id}(f(x)) = \mathrm{id}(a \cdot x + b) = a \cdot x + b = f(x).$$

Abschließend bleibt zu zeigen, dass es zu jeder linearen Abbildung f eine inverse Abbildung f' gibt, so dass deren Verkettung $f' \circ f = \mathrm{id}$ gerade das neutrale Element id ergibt. Wir betrachten dazu erneut eine beliebige lineare Abbildung $f : x \mapsto a \cdot x + b$ und die lineare Abbildung $f' : x \mapsto \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$, da $a \neq 0$ existieren die auftretenden Brüche. Die Verkettung dieser beiden Abbildungen ist

$$(f' \circ f)(x) = f'(f(x)) = f'(a \cdot x + b) = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x + b) - \frac{b}{a} = x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = x = \mathrm{id}(x).$$

Damit haben wir alle Gruppenaxiome nachgewiesen, die Menge der linearen Abbildungen L zusammen mit der Verkettung $\circ$ ist demnach eine Gruppe. Abschließend wollen wir noch zeigen, dass sie nicht abelsch ist, d.h. dass lineare Abbildungen im Allgemeinen nicht kommutieren. Dazu betrachten wir die Verkettungen der Abbildungen $f : x \mapsto x + 1$ und $g : x \mapsto 2x$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 \\ \text{und } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2. \end{aligned}$$

Wir haben damit die Verneinung $(\exists f, g \in L : f \circ g \neq g \circ f)$ des vierten Gruppenaxioms über die Kommutativität gezeigt.

Aufgabe 2.4. Betrachten Sie die Menge der geraden Zahlen $2\mathbb{Z} := \{2z; z \in \mathbb{Z}\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ und zeigen Sie, dass diese zusammen mit der Addition eine abelsche Gruppe darstellt. Sie können dabei die Ergebnisse des folgenden Beispiels verwenden.

Beispiel 2.5. Als Beispiele für Gruppen wenden wir uns hier noch einmal den Zahlsystemen aus Beispiel 1.14 zu und betrachten diese zusammen mit der Addition beziehungsweise der Multiplikation.

a) Betrachten wir als erstes die natürlichen Zahlen zusammen mit der Addition $(\mathbb{N}, +)$. Es gilt, dass die Summe zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist, wir sagen auch, dass die natürlichen Zahlen abgeschlossen sind unter der Addition.
   - Die Addition ist assoziativ, d.h. $(n + m) + k = n + (m + k)$ für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$.
   - $0 \in \mathbb{N}$ ist das neutrales Element, da $0 + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   - Für kein Element mit Ausnahme der 0 gibt es ein inverses Element.
   - Die Addition ist kommutativ, d.h. $n + m = m + n$.

   Bei $(\mathbb{N}, +)$ handelt es sich somit nicht um eine Gruppe. Die Bezeichnung für eine Menge, die alle Gruppenaxiome bis auf die Existenz der Inversenelemente erfüllt, bezeichnen wir als Monoid.

b) Anhand dieser Betrachtung der natürlichen Zahlen wird auch direkt klar, was wir mit der Hinzunahme der „Negativen“ in unserer Einführung der ganzen Zahlen im ersten Kapitel gemeint haben – wir definieren zu jeder positiven natürlichen Zahl eine Zahl, die gerade ihr inverses Element bezüglich der Addition ist.
   Damit gelten für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Addition die Eigenschaften a) - d) aus Definition 2.1, so dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

c) Als drittes betrachten wir $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$. Auch in diesem Fall ist das Produkt zweier ganzer Zahlen wieder eine ganze Zahl, d.h. die ganzen Zahlen sind abgeschlossen unter der Multiplikation.
   - Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ für alle $x,y,z\in\mathbb{Z}$.
   - $1\in\mathbb{Z}$ ist ein neutrales Element, denn $1\cdot x = x$ für alle $x\in\mathbb{Z}$.
   - Für kein Element mit Ausnahme der 1 und -1 gibt es ein inverses Element.
   - Die Multiplikation ist kommutativ, d.h. $x\cdot y = y\cdot x$.

   Bei $(\mathbb{Z},\cdot)$ handelt es sich somit auch um ein Monoid.

d) Mit den ganzen Zahlen wiederum können wir die rationalen Zahlen definieren. Wir beschäftigen uns hier nicht weiter mit der formalen Definition der rationalen Zahlen als Quotientenkörper der ganzen Zahlen, dies ist Teil weiterführender Algebra-Vorlesungen.
   Entsprechend verzichten wir ebenfalls auf eine formalen Herleitung der folgenden Aussagen und setzen diese im Rahmen dieser Vorlesung axiomatisch voraus:
   - Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q},+)$ mit der Addition sind eine abelsche Gruppe.
   - Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ mit der Multiplikation sind eine abelsche Gruppe.
   - Es gilt das Distributivgesetz $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ für alle $x,y,z\in\mathbb{Q}$.

Dieses Beispiel verdeutlicht, was im ersten Kapitel gemeint war, als wir vage von „zunehmend mehr Struktur“ gesprochen haben. Wir werden uns im Folgenden zwei weitere Beispiele ansehen, die die Kombination der drei Eigenschaften aus Beispiel d) erfüllen, bevor wir das tun, führen wir aber zunächst eine Bezeichnung für solche Strukturen ein. In Anlehnung an die gerade betrachteten Beispiele bezeichnen wir dabei das neutrale Element bezüglich der Addition mit 0 und das bezüglich der Multiplikation mit 1.

Definition 2.6 (Körper)**.** Ein **Körper** ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : K\times K\to K \text{ und } \cdot : K\times K\to K,$$

so dass die folgenden Körperaxiome erfüllt sind

a) (Addition) $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

b) (Multiplikation) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

c) (Distributivgesetz) Für alle $x,y,z\in K$ gilt $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$.

Aufgabe 2.7. Betrachten Sie die Menge $\{g,u\}$ mit den folgenden kommutativen Operationen

$+$	g	u
g	g	u
u	u	g

$\cdot$	g	u
g	g	g
u	g	u

und zeigen Sie, dass $(\{g,u\},+,\cdot)$ ein Körper ist.
Sie können die Elemente g und u als gerade und ungerade Zahlen verstehen. Mit dieser Interpretation entspricht die Definition der Operationen genau denen aus den ganzen Zahlen bekannten.

Als nächstes zeigen wir, dass die Rechenregeln, die wir für die reellen Zahlen aus der Schule kennen, direkt aus den Körperaxiome folgen.

Lemma 2.8 (Rechenregeln in Körpern)**.** *Sei K ein Körper und $x,y\in K$.*

a) $-(-x) = x$ *und* $-(x+y) = (-x)+(-y)$.

b) *Sind* $x,y\neq 0$*, so gilt* $(x^{-1})^{-1} = x$ *und* $(x\cdot y)^{-1} = x^{-1}\cdot y^{-1}$.

c) $0\cdot x = 0$.

d) *Ist* $x\cdot y = 0$*, so ist* $x=0$ *oder* $y=0$

e) $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$.

f) $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

Beweis. Wir beweisen an dieser Stelle exemplarisch drei Aussagen und überlassen dem Leser die restlichen als Übungsaufgabe.

a) $-x$ ist das additive Inverse zu x, so dass gilt $0 = x + (-x) = (-x) + x$, somit ist x seinerseits das additive Inverse zu $-x$, welches wir unserer Konvention folgend als $-(-x)$ schreiben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 && \text{additives Neutrales} \\ &= x + (-x) + y + (-y) && \text{additives Neutrales} \\ &= x + y + (-x) + (-y) && \text{Kommutativität der Addition} \end{aligned}$$

b) Der Beweis verläuft völlig analog zu a) und ist dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

c) Es gilt $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, auf Grund der Eindeutigkeit des additiven Neutralen ist demnacht $0 \cdot x = 0$.

d) Angenommen $x \neq 0$, dann existiert das multiplikative Inverse x^{-1}. Durch Multiplikation mit diesem auf beiden Seiten erhalten wir $y = x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 = 0$. Die erste Identität ist dabei gerade die Definition des Inversen und die dritte folgt aus der Aussage c).

e)-f) Die Beweise sind dem Leser als Übungsaufgaben überlassen.

□

Aufgabe 2.9. Sei K ein Körper und $x, y \in K$, beweisen Sie die folgenden Aussagen aus Lemma 2.8.

a) Sind $x, y \neq 0$, so gilt $(x^{-1})^{-1} = x$ und $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

b) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

c) $-(x)^{-1} = -(x^{-1})$.

In den zuvorbetrachteten Rechenregeln in Körpern haben wir die etwas umständliche Notation $x + (-y)$ verwendet um auszudrücken, dass wir die Summe aus x und dem additiven Inversen von y bilden wollen. Um uns im folgenden die Schreibarbeit zu vereinfachen führen wir die folgenden, aus der Schule bekannten Konventionen ein.

Notation 2.10. Sei K ein Körper.

a) Für $x, y \in K$ schreiben wir $x - y := x + (-y)$ und wenn $y \neq 0$ so definieren wir $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$.

b) Für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ nennen wir das n-fache Produkt von x die n-te **Potenz** von x und schreiben

$$x^n := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-mal}}.$$

Für $n = 0$ interpretieren wir den Ausdruck als das „leere Produkt“ und setzen $x^0 := 1$. Wenn $x \neq 0$ können wir völlig analog auch negative ganze Zahlen als Exponenten verwenden $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

c) Für Summen mehrerer Summanden führen wir zudem folgenden Kurzschreibweise ein, das dabei verwendete Summenzeichen Σ entspricht dem großen griechischen Buchstaben Sigma.
Seien $m \leq n \in \mathbb{Z}$ und $x_i \in K$ für alle $i \in \{m, m+1, ..., n-1, n\}$, dann schreiben wir

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

Völlig analog schreiben wir für das Produkt mehrerer Faktoren

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n,$$

das dabei verwendete Produktzeichen entspricht dem großen griechischen Pi.

Bevor wir uns, wie angekündigt den reellen und komplexen Zahlen zuwenden, zeigen wir noch einige allgemeine Aussagen für Körper. Zu diesem Zweck führen wir das Verfahren der vollständigen Induktion ein, das weit über die Anwendungen in diesem Kapitel Bedeutung hat.

Bemerkung 2.11 (**Vollständige Induktion**). Seien $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ Aussagen. Wollen wir zeigen, dass diese wahr sind, so können wir wie folgt vorgehen:

a) (**Induktionsanfang**) Wir zeigen, dass $A(0)$ wahr ist.

b) (**Induktionsschritt**) Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**), zeigen wir, dass auch $A(n+1)$ gilt.

Das heißt, dass aus dem Induktionsanfang $A(0)$ mit dem Induktionsschritt $A(1)$ folgt, daraus folgt wiederum $A(2)$ und so weiter, so dass letztlich $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Aufgabe 2.12. Überlegen Sie sich wie Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anpassen könnten um Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ zu zeigen.

Um unser Verständnis dieser wichtigen Methode zu verbessern, betrachten wir einige Beispiele. Als erstes untersuchen wir die endliche **geometrische Reihe**, die zugleich ein Beispiel für die oben eingeführte Summennotation darstellt.

Satz 2.13 (Endliche geometrische Reihe)**.** *Es sei K ein Körper, $q \in K \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für die endliche geometrische Reihe*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Hilfe einer vollständiger Induktion über n.
Induktionsanfang $n = 0$: Durch Einsetzen von $n = 0$ ergibt sich direkt

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Daraus wollen wir nun die entsprechende Aussage für $n+1$ herleiten. Dazu betrachten wir die linke Seite der Gleichung für $n+1$ und versuchen diese in die entsprechende Form der rechten Seite umzuformen.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

Somit sind Induktionsanfang und Induktionsschritt gezeigt und damit die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Als zweites Beispiel für eine vollständige Induktion wollen wir uns die die Summe der ersten n-natürlichen Zahlen ansehen. Diese lässt sich mit der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

berechnen. Zwar ist diese seit der Antike bekannt, da aber Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) diese einer Anekdote nach als neunjähriger Schüler wiedergefunden haben soll, wird sie heute als *Gaußsche Summenformel* bezeichnet.

Aufgabe 2.14 (Gaußsche Summenformel)**.** Zeigen Sie die Gaußsche Summenformel mit einer vollständigen Induktion.

Als drittes Beispiel sehen wir uns die Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten „ersten binomischen Formel“ $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ auf beliebige Exponenten $n \in \mathbb{N}$ an. Für die Herleitung dieser allgemeinen **binomischen Formel** (2.1) benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 2.15 (Fakultät und Binomialkoeffizienten)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir das Produkt der Zahlen von 1 bis n als n-**Fakultät** und schreiben dafür

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n.$$

Entsprechend ist $0! = 1$ als „leeres Produkt“.
Mit dieser Notation definieren wir den **Binomialkoeffizienten** zweier Zahlen $n \geq k \in \mathbb{N}$ als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1}.$$

Bevor wir die binomische Formel beweisen, wollen wir zunächst zeigen, dass sich die Binomialkoeffizienten rekursiv durch

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k-1$$

berechnen lassen.

Beweis. Anhand der Definition der Binomialkoeffizienten können wir direkt nachrechnen

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdots k} + \frac{(n-k+2) \cdot (n-k+3) \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot \cdots \cdot (k-1)} \\
&= \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \cdots \cdot n + k \cdot (n-k+2)(n-k+3) \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot \cdots \cdot k} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n-k+2) \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot \cdots \cdot k} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund dieser Rekursionsformel werden sie gelegentlich in Form des sogenannten **Pascalschen Dreiecks** angeordnet, in dem sich eine Zahl die Summe der beiden über ihr stehenden Zahlen ist.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\iddots & & & & & & \ddots \\
 & & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \\
 & & & \binom{n+1}{k} & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Satz 2.16 (Binomische Formel)**.** *Für zwei Elemente $x, y \in K$ aus einem Körper K und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2.1}$$

Beweis. Induktionsanfang $n = 0$: Durch Einsetzen von $n = 0$ ergibt sich direkt

$$(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Daraus wollen wir nun die entsprechende Aussage für $n+1$ herleiten. Dazu betrachten wir die linke Seite der Gleichung für $n+1$ und versuchen diese in die entsprechende Form der rechten Seite umzuformen.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n \\
&\overset{\text{IV}}{=} (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}
\end{aligned}$$

Im mit $(*)$ markierten Schritt haben wir den Index in der ersten Summe um eins verschoben und später die zuvor gezeigte Identität $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ genutzt. $\square$

Aufgabe 2.17. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$ und c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$.

Für's erste haben wir damit unsere allgemeine Betrachtung von Körpern abgeschlossen und wenden uns dem für uns wichtigsten Beispiel für einen Körper zu.

2.1 Die reellen Zahlen

Um zu verstehen, warum wir mit den rationalen Zahlen noch nicht am Ziel angekommen waren, einen „vollständigen Zahlenstrahl“ zu konstruieren, betrachten wir zunächst ein Beispiel dafür, dass wir uns Zahlen vorstellen können, die nicht rational sind. Dazu betrachten wir noch einmal die Wurzelfunktion aus Beispiel 1.23. Entsprechend ihrer Definition als Umkehrfunktion der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ gilt also für die Wurzel der Zahl 2 gerade, dass ihr Quadrat 2 ergibt. Von dieser Zahl wollen wir zeigen, dass sie nicht in den rationalen Zahlen liegt. Wir verwenden dazu erneut einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, sich also als Bruch zweier teilerfremder ganzer Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt. Durch Quadrieren erhalten wir

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \quad \text{bzw.} \qquad 2q^2 = p^2.$$

Demnach ist 2 ein Teiler von $p = 2p'$ für ein $p' \in \mathbb{Z}$ und wir können die Gleichung zu

$$2q^2 = 4p'^2 \qquad \text{und somit} \qquad q^2 = 2p'^2$$

umschreiben, so dass 2 auch ein Teiler von q ist. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass die Zahlen p und q teilerfremd sind. Damit haben wir gezeigt, dass die Zahl $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Insbesondere ist damit die Quadratfunktion $f : \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ auf den positiven rationalen Zahlen nicht surjektiv.
Die reellen Zahlen sind genau so konstruiert, dass sie derartige „Löcher“ schließen. Wir werden uns nicht mit der formalen Definition auseinandersetzen, sondern setzen die Eigenschaften der reellen Zahlen axiomatisch voraus:

$\boxed{\text{Die } \textbf{reellen Zahlen } \mathbb{R} \text{ sind ein Körper.}}$

Damit sind die reellen Zahlen anscheinend aber nicht vollständig charakterisiert, insbesondere für die rationalen Zahlen hatten wir gesehen, dass sie ebenfalls einen Körper darstellen. Im folgenden wollen wir uns also mit zwei weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen beschäftigen. Wir betrachten diese zunächst in einem allgemeinen Kontext bevor wir diese axiomatisch für die reellen Zahlen voraussetzen.
Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Begriff der *Ordnung*. Wir wissen, dass wir zwei Zahlen vergleichen und sagen können, welche größer ist. Für Körper wird dies durch die folgende Definition formalisiert.

Definition 2.18 (Geordneter Körper)**.** Einen Körper K nennen wir **geordneter Körper**, wenn es eine Teilmenge $P \subset K$ (die „Menge der positiven Zahlen") gibt, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

a) K ist eine disjunkte Vereinigung der drei Mengen P, $\{0\}$ und $-P$. Wir bezeichnen Elemente der Mengen P als **positive** Zahlen und Elemente der Menge $-P$ als **negative** Zahlen.

b) Die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv, d.h. für $x,y \in P$ ist auch $x+y \in P$.

c) Das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv, d.h. für $x,y \in P$ ist auch $x \cdot y \in P$.

Für zwei Elemente $x,y \in K$ eines geordneten Körpers schreiben wir $x < y$ wenn $y-x \in P$, und $x \leq y$ wenn $y-x \in P$ oder $x = y$.

Es lässt sich zeigen, dass die rationalen und die reellen Zahlen geordnete Körper sind, im Rahmen dieser Vorlesung setzen wir dies axiomatisch voraus.

$\boxed{\text{Die rationalen Zahlen } \mathbb{Q} \text{ und die reellen Zahlen } \mathbb{R} \text{ sind geordnete Körper.}}$

Es gibt zahlreiche Beispiele für Körper, die keine geordneten Körper sind. Wir werden im nächsten Abschnitt die komplexen Zahlen kennenlernen und von diesen zeigen, dass sie nicht geordnet sind.
Bevor wir zur zweiten charakterisierenden Eigenschaft der reellen Zahlen kommen, betrachten wir zunächst einige Eigenschaften der in Definition 2.18 definierten Ordnungen $<$ und $\leq$.

Lemma 2.19. *Sei K ein geordneter Körper und $x,y,z \in K$.*

a) *(Transitivität) Für $x < y$ und $y < z$ gilt $x < z$.*

b) *Für $x < y$ gilt $x+z < y+z$. Gilt außerdem $z > 0$ so folgt $xz < yz$, ist dagegen $z < 0$ so dreht sich das Ungleichzeichen und es gilt $xz > yz$.*

c) *Für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$, insbesondere gilt also $1 > 0$.*

d) *Für $0 < x < y$ gilt $0 < y^{-1} < x^{-1}$.*

Analog gelten diese Eigenschaften auch für $\leq$, $>$ und $\geq$.

Beweis. Seien $x,y,z \in K$.

a) Seien $x < y$ und $y < z$, d.h. $y-x$ und $z-y$ sind positiv, damit ist auch die Summe dieser beiden positive Zahlen $(y-x)+(z-y) = z-x$ positiv, so dass $x < z$.

b) Seien $x < y$, dann ist $(y+z)-(x+z) = y-x+(z-z) = y-x$ positiv und somit $x+z < y+z$. Setzen wir außerdem voraus, dass $z > 0$, d.h. $z = z-0$ ist positiv. Damit ist auch das Produkt dieser beiden positiven Zahlen $(y-x) \cdot z = yz - xz$ positiv, so dass $xz < yz$. Ist dagegen $z < 0$, so ist $-z$ positiv und damit ist das Produkt dieser beiden positiven Zahlen $(y-x) \cdot (-z) = xz - yz$ positiv, so dass $xz > yz$.

c) Sei $x \neq 0$. Wenn x positiv ist, so ist nach Definition auch x^2 positiv. Nehmen wir also an, dass x negativ ist. Dann ist $(-x)$ positiv und somit $x^2 = (-x) \cdot (-x)$ als Produkt zweier positiver Zahlen ebenfalls positiv.

d) Seien $0 < x < y$. Zunächst stellen wir fest, dass $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2$ als Produkt zweier positiver Zahlen positiv ist (analog für y). Damit ist auch das folgende Produkt als Produkt positiver Zahlen positiv $(y-x) \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = (x^{-1} - y^{-1})$, so dass $0 < y^{-1} < x^{-1}$ gilt.

□

Wir hatten bereit in Notation 1.13 gesagt, dass wir Mengen über die definierenden Eigenschaften ihrer Elemente angeben können, das nutzen wir nun für eine kompakte Darstellung „zusammenhängender“ Mengen, sogenannter Intervalle in geordneten Körpern.

Notation 2.20 (Intervalle)**.** Sei K ein geordneter Körper und $a \leq b \in K$.

- $[a,b] := \{x \in K; a \leq x \leq b\}$ bezeichnen wir als **abgeschlossenes Intervall**.
- $(a,b) := \{x \in K; a < x < b\}$ bezeichnen wir als **offenes Intervall**.
- $[a,b) := \{x \in K; a \leq x < b\}$ bezeichnen wir als **halboffenes Intervall**.
- $[a,\infty) := \{x \in K; a \leq x\}$ bezeichnen wir als **uneigentliches Intervall**.

Völlig analog definieren wir $(a,b]$, $(-\infty,\infty)$ und $(-\infty,b)$.
Wenn wir Intervalle in $\mathbb{R}$ grafisch respräsentieren deuten wir durch die Wahl der Rundung am Ende an, ob die Randpunkte Teil des Intervalls sind oder nicht.

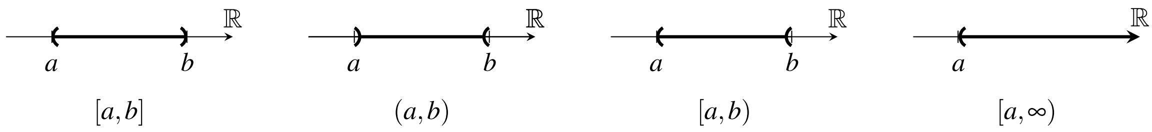


Abbildung 2.1: Darstellung der in Notation 2.20 definierten Intervalle $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ und $[a,\infty)$.

Für einen geordneten Körper K können wir zudem eine Funktion definieren, welche negative Zahlen steht auf ihr positives Korrespondent und positive Zahlen auf sich selbst abbildet. Diese sogenannte **Betragsfunktion** ist gegeben durch

$$|\cdot| : K \to K, x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Für diese gelten dann einige wichtige Eigenschaften.

Lemma 2.21 (Eigenschaften der Betragsfunktion)**.** *Sei K ein geordneter Körper und $x,y \in K$.*

a) *Es gilt $|xy| = |x| \cdot |y|$.*

b) *(Dreiecksungleichung) Es gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$.*

Beweis. Seien $x,y \in K$.

a) Wir betrachten die vier Kombinationen der Vorzeichen von x und y getrennt. Für positives x und positives y ist die Gleichung trivial. Ist dagegen x positiv und y negativ, so ist das Produkt aus x und y negativ und wir erhalten $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Die zwei verbleibenden Fälle folgen völlig analog.

b) Zunächst stellen wir fest, dass $x \leq |x|$, denn nach Definition gilt für $x \geq 0$ die Identität $x = |x|$, wogegen für negatives x gilt $x < 0 < -x = |x|$. Entsprechend gilt auch $y \leq |y|$ und wir können die folgende Abschätzung machen

$$x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|.$$

Wie oben können wir auch zeigen, dass $-x \leq |x|$ gilt und damit

$$-x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|.$$

zeigen. Abschließend nutzen wir, dass $|x+y|$ entweder $x+y$ oder $-x-y$ ist.

□

Aufgabe 2.22. Zeigen Sie für zwei Elementen $x,y \in K$ eines geordneten Körpers die Abschätzung

$$|x+y| \geq |x| - |y|.$$

Als nächstes betrachten wir eine weitere wichtige Ungleichung, die es uns erlaubt Potenzen mit Produkten abzuschätzen.

Satz 2.23 (**Bernoullische Ungleichung**). *Es sei K ein geordneter Körper und $x \in K$ mit $x \geq -1$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Aufgabe 2.24. Zeigen Sie mittels einer vollständigen Induktion die Bernoullische Ungleichung.

In einem geordneten Körper gibt es Mengen deren Elemente alle kleiner bzw. größer als eine gewisse Zahl des Körpers sind, solche Mengen werden als „beschränkt" bezeichnet. Im letzten Teil dieses Abschnitts formalisieren wir diese Eigenschaft zunächst in Form der folgenden Definitionen und nutzen diese Notation um den Unterschied zwischen den rationalen und reellen Zahlen axiomatisch festzuhalten.

Definition 2.25 (Beschränkte Mengen)**.** Sei K ein geordneter Körper und $M \subset K$ eine Teilmenge. Wir nennen M **nach oben beschränkt**, wenn es ein $s \in K$ gibt, für das gilt, $x \leq s$ für alle $x \in M$. Ein solches s bezeichnen wir als **obere Schranke** für M. Entsprechend nennen wir M **nach unten beschränkt** und ein s **untere Schranke**, wenn für dieses gilt $x \geq s$.
Eine Menge, die sowohl von oben als auch von unten beschränkt ist, nennen wir **beschränkt**.

Ein Intervall wie $(-\infty,0] \subset \mathbb{R}$ ist von oben, nicht aber von unten beschränkt. Eine obere Schranke ist beispielsweise 1, aber auch 2 und 3 sind obere Schranken. Solche Schranken scheinen also zunächst nicht eindeutig zu sein. Die Idee, die eindeutige „beste" Schranke auszuzeichnen, wird in der Mathematik in Form des Supremums bzw. des Infimums formalisiert.

Definition 2.26 (Supremum und Infimum)**.** Sei K ein geordneter Körper und $M \subset K$ eine Teilmenge. Wir nennen $s \in K$ ein **Supremum** von M, wenn „s eine kleinste obere Schranke für M" ist, d.h.

a) s ist eine obere Schranke für M.

b) Für jede obere Schranke s' für M gilt $s \leq s'$.

Analog bezeichnen wir s als **Infimum** von M, wenn „s eine größte untere Schranke für M ist".

In der Definition haben wir zunächst von „einem" Supremum und „einem" Infinum einer Menge M gesprochen. Diese sind (sofern sie existieren) eindeutig. Um das zu zeigen, nutzen wir erneut die Technik des Widerspruchsbeweises und nehmen an, dass es zwei Suprema s und s' gibt. Aus Eigenschaft a) des Supremums s' wissen wir, dass s' eine obere Schranke ist. Dieses ist aber nach Eigenschaft b) des Supremums s mindestens genauso groß wie s, so dass $s \leq s'$ gilt. Vertauschen wir in dieser Argumentation die Rolle von s und s', so erhalten wir $s \geq s'$. Damit ist $s = s'$; *das* Supremum ist also eindeutig. Wenn das Supremum einer Menge M existiert, so bezeichnen wir es mit $\sup M$.
Genauso können wir auch zeigen, dass *das* Infimum einer Menge M eindeutig ist. Wenn es existiert bezeichnen wir es mit $\inf M$.

Aufgabe 2.27. Sei $M := [0,1) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\inf M = 0$ und $\sup M = 1$ gilt.

In der obigen Aufgabe haben wir gesehen, dass das Supremum einer Menge M also nicht zwangsläufig in dieser liegen muss. Für den Fall, dass Supremum beziehungsweise Infimum einer Menge in dieser Menge liegen, verwenden wir alternativ die Bezeichnungen **Maximum** $\max M$ der Menge beziehungsweise **Minimum** $\min M$ der Menge.
Diese Begriffe helfen uns jetzt die „Lückenlosigkeit" der reellen Zahlen, welche diese gerade von den rationalen Zahlen unterscheidet zu formalisieren. Dazu betrachten wir zunächst noch einmal unser einleitendes Beispiel in den rationalen Zahlen.

Beispiel 2.28. Wir betrachten die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ in den rationalen Zahlen. Diese ist durch 2 nach oben beschränkt. Um dies zu sehen stellen wir fest, dass für ein $x > 2$ gilt $x^2 > 2^2 = 4 > 2$. So dass x nicht in M liegt. Damit können wir uns fragen, ob es ein Supremum von M gibt. In den reellen Zahlen ist sicherlich $\sqrt{2}$ das Supremum von M, da $\sqrt{2}$ allerdings kein Element von $\mathbb{Q}$ ist, liegt es nahe zu vermuten, dass es kein Supremum gibt. Wir wollen dies durch einen Widerspruchsbeweis zeigen und nehmen an, dass es ein Supremum s von M gibt. Da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt für s somit $s^2 > 2$ oder $s^2 < 2$. Wir betrachten beide Fälle getrennt:
Zunächst betrachten wir $s^2 > 2$. Wir wollen zeigen, dass es dann eine kleinere obere Schranke

$$s' := s - \frac{s^2-2}{2s} < s.$$

gibt, im Widerspruch zur Definition des Supremums.
Um zu sehen, dass s' tatsächlich eine obere Schranke ist, müssen wir nachrechnen, dass Zahlen $x > s'$ nicht Element der Menge M sind, dazu gehen wir wie folgt vor

$$x^2 > (s')^2 = \left(s - \frac{s^2-2}{2s}\right)^2 = s^2 - (s^2-2) + \left(\frac{s^2-2}{2s}\right)^2 = 2 + \left(\frac{s^2-2}{2s}\right)^2 \geq 2.$$

Somit is s' also eine kleinere obere Schranke als s und s kann nicht das Supremum sein.
Als nächstes betrachten $s^2 < 2$. In diesem Fall wollen wir zeigen, dass es dann Elemente $x \in M$ gibt, die größer als s sind, s also keine obere Schranke und insbesondere nicht das Supremum ist. Dazu betrachten wir

$$x := s + \Delta > s \quad \text{mit} \quad \Delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2-s^2}{2s+1}\right\} > 0$$

und zeigen, dass $x \in M$.

$$\begin{aligned}
(s+\Delta)^2 &= s^2 + 2s\Delta + \Delta^2 && \left(\text{da } \Delta \leq \frac{1}{2} < 1\right) \\
&< s^2 + 2s\Delta + \Delta && \left(\text{da } \Delta^2 \leq \frac{1}{2}\cdot\Delta < \Delta\right) \\
&\leq s^2 + (2s+1)\cdot\frac{2-s^2}{2s+1} && \left(\text{da } \Delta \leq \frac{2-s^2}{2s+1}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Somit ist s keine obere Schrank von M.
Wir haben die Annahme, dass ein Supremum von M existiert also zu einem Widerspruch geführt, so dass die Annahme falsch gewesen sein muss. Damit haben wir gezeigt, dass es Mengen in $\mathbb{Q}$ gibt, die kein Supremum haben.

Die Eigenschaft, dass Teilmengen eines Körpers Suprema haben, formalisieren wir mit der folgenden Definition.

Definition 2.29 (Supremumsaxiom)**.** Sei K ein geordneter Körper. Wir sagen, dass K das **Supremumsaxiom** erfüllt, wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Aus Beispiel 2.28 wissen wir, dass die rationalen Zahlen das Supremumsaxiom nicht erfüllen. Die reellen Zahlen dagegen sind so konstruiert, dass für sie das Supremumsaxiom gilt. Im Rahmen dieser Veranstaltung werden wir dies nicht zeigen und setzen es stattdessen einfach axiomatisch voraus. An dieser Stelle fassen wir noch einmal sämtliche Eigenschaften der reellen Zahlen zusammen.

$$\boxed{\text{Die reellen Zahlen } \mathbb{R} \text{ sind ein geordneter Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt.}}$$

Mit dieser Eigenschaft können wir zeigen, dass alle Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ in den reellen Zahlen enthalten sind. Dazu betrachten wir $M := \{x \in \mathbb{R}; x^n = a\}$. Wir können analog zu unserem Vorgehen in Beispiel 2.28 zeigen, dass das Supremum gerade die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ ist und nach dem Supremumsaxiom ist dies ein Element der reellen Zahlen.
Als zweite Folgerung aus dem Supremumsaxiom wollen wir zeigen, dass es zu jeder reellen Zahl eine größere natürliche Zahl gibt und somit die Menge der natürlichen Zahlen nach oben unbeschränkt ist.

Lemma 2.30 (Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$)**.** *Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ aufgefasst als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind nach oben unbeschränkt.*

Beweis. Wir zeigen die Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen durch einen Widerspruchsbeweis, dazu nehmen wir an, dass die natürlichen Zahlen nach oben beschränkt sind. Dann existiert nach dem Supremumsaxiom ein Supremum $s \in \mathbb{R}$. Da es sich beim Supremum um die kleinste obere Schranke handelt, ist $s-1$ keine obere Schranke. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s-1$. Aufgrund der charakterisierenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen, dass es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $n+1$ gibt, existiert somit eine natürliche Zahl $n+1 > s$ im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke ist. Somit war unsere Annahme, dass die natürlichen Zahlen beschränkt sind, falsch. □

Desweiteren lässt sich zeigen, dass die reellen Zahlen nicht einer von vielen geordneten Körpern, die das Supremumsaxiom erfüllen, ist, sondern diese Eigenschaften die reellen Zahlen eindeutig charakterisieren. Der damit verbundene Aufwand übersteigt allerdings weit den Umfang dieser Vorlesung.

Satz 2.31 (Charakterisierung)**.** *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind der einzige geordnete Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt.*

Aufgabe 2.32 (Knobelaufgabe)**.**

a) Zeigen Sie für $x,y \in \mathbb{Z}$ und $k,n \in \mathbb{N}$, dass $(x+y\sqrt{k})^n + (x-y\sqrt{k})^n \in \mathbb{Z}$.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung von a) die 100. Nachkommastelle von $(2+\sqrt{5})^{2011}$.

Damit haben wir unsere Betrachtung der reellen Zahlen fast abgeschlossen. Bisher haben wir gesehen, dass die reellen Zahlen zahlreiche „wünschenswerte Eigenschaften“ haben, diese machen sie zur idealen Basis für viele mathematischen Beschreibungen physikalischer Phänomen und zumeist liegt einer theoretischen Untersuchung in der Physik die Annahme zu Grunde, dass die Variablen reelle Werte annehmen. Um unsere Betrachtung abzuschließen und die Einführung eines weiteren Körpers zu motivieren, führen wir den Begriff des Polynoms ein. Dies tun wir zunächst wieder für einen allgemeinen Körper bevor wir uns den Konsequenzen für die reellen Zahlen zuwenden.

Definition 2.33 (Polynomfunktionen)**.** Sei K ein Körper. Eine Funktion $f: K \to K$ von der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit $a_n \neq 0$ nennen wir eine **Polynomfunktion** vom **Grad** n. Urbilder von 0 unter f, d.h. solche $x_0 \in K$ so dass $f(x_0) = 0$, bezeichnen wir als **Nullstelle** von f.

Satz 2.34 (Abspalten von Nullstellen)**.** *Sei K ein Körper und $f: K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad n.*

a) *Ist $x_0 \in K$ eine Nullstelle von f, so gibt es eine Polynomfunktion g vom Grad $n-1$ mit*

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \qquad \textit{für alle } x \in K.$$

b) *f hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Sei K ein Körper und $f: K \to K$ so dass $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

a) Zunächst stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}(x-x_0)\cdot\sum_{l=0}^{k-1} x_0^l x^{k-1-l} &= (x-x_0)\cdot(x^{k-1} + x_0 x^{k-2} + \cdots + x_0^{k-1}) \\ &= (x^k + x_0 x^{k-1} + \cdots + x_0^{k-1} x) - (x_0 x^{k-1} + x_0^2 x^{k-2} + \cdots + x_0^k) \\ &= x^k - x_0^k\end{aligned} \tag{$*$}$$

Sei $x_0 \in K$ eine Nullstelle von f, dann gilt somit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - x_0^k) \\ &\overset{(*)}{=} (x-x_0)\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} x_0^l x^{k-1-l}}_{=:g(x)} \end{aligned}$$

Die Funktion g ist nach ihrer Definition ein Polynom von Grad $n-1$.

b) Der zweite Teil lässt sich mittels einer Induktion über den Grad des Polynoms zeigen und ist den Leser als Übungsaufgabe überlassen.

$\square$

Aufgabe 2.35. Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion über den Grad, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat.

Für ein Polynom f lässt sich somit, wenn wir eine Nullstelle x_0 kennen, diese „in einem Linearfaktor abspalten" $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, der Grad des dabei auftauchenden Polynoms g ist um eins kleiner als der von f. Und g lässt sich, wie im Beweis zu Satz 2.34 gezeigt, schreiben. Alternativ kann g auch mit der aus der Schule bekannten Polynomdivision bestimmt werden.

Aufgabe 2.36. Betrachten Sie das Polynom $f(x) = x^2 + px + q$ und bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung seiner Nullstellen.
Hinweis: Verwenden Sie dabei die quadratische Ergänzung nach der $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ gilt (machen Sie sich bewusst, wie dies aus der binomischen Formel folgt).

Aufgabe 2.37. Das Polynom $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ hat die Nullstelle $x_0 = -1$. Spalten Sie den Linearfaktor $(x - x_0)$ mittels einer Polynomdivision ab und berechnen Sie die anderen beiden Nullstellen mit der in Aufgabe 2.36 bestimmten Gleichung.

Bisher haben wir nur Aussagen darüber gemacht, was gilt, *falls* es eine Nullstelle gibt. Wie solche gefunden werden können und ob es auch eine untere Schranke für die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms gibt, haben wir bisher nicht betrachtet. Dass die entsprechenden Antworten weit weniger zufriedenstellend sind, wollen wir an dem folgenden einfachen Beispiel zeigen und darüber die Definition der komplexen Zahlen motivieren.
Untersuchen wir das Polynom $f(x) = x^2 + 1$, so stellen wir fest, dass $f(x) = x^2 + 1 > x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Polynom f hat demnach keine Nullstellen. Im ersten Moment gibt es zwar keinen zwingenden Grund, warum jedes nicht konstante Polynom eine Nullstelle haben sollte, allerdings hat es sich gezeigt, dass dies einfach zu erreichen ist, indem die reellen Zahlen geschickt erweitert werden. Die zugrundeliegende Idee ist es der Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ eine Bezeichnung zu geben und diese zu den reellen Zahlen zu „adjungieren". Die dabei entstehende Struktur ist ebenfalls ein Körper und erbt einige, wenn auch nicht alle, Eigenschaften der reellen Zahlen.

2.2 Die komplexen Zahlen

Anders als wir es für die rationalen und reellen Zahlen getan haben, können wir die komplexen Zahlen formal definieren und ihre Eigenschaften aus den Eigenschaften der reellen Zahlen herleiten. Dazu führen wir die **imaginäre Einheit** i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ ein. Für die imaginäre Einheit gilt somit $0 = i^2 + 1 = f(i)$, für das Polynom $f(x) = x^2 + 1$, für welches wir am Ende des letzten Abschnitts festgestellt hatten, dass es keine Nullstelle in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ hat. „Ergänzen" wir also die reellen Zahlen formal um die imaginäre Einheit i, so hat das Polynom zweiten Grades f die beiden Nullstellen i und $-i$. Wir haben demnach die reellen Zahlen so ergänzt, dass die Nullstellen des Polynoms f in dieser Übermenge aus den reellen Zahlen „ergänzt" um die imaginäre Einheit i liegen. Dabei handelt es sich nicht um eine Besonderheit des Polynoms f, sondern für sämtliche reelle Polynome. Bevor wir uns allerdings dieser und weiterer charakteristischer Eigenschaften dieser „Ergänzung" der reellen Zahlen zuwenden, definieren wir diese zunächst und führen einige entsprechende Begriffe ein.

Definition 2.38 (Komplexe Zahlen)**.** Wir definieren die Menge der **komplexen Zahlen** als

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[i] := \{x + i \cdot y; x, y \in \mathbb{R}\}$$

zusammen mit einer komponentenweisen Addition

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (x + i \cdot y, x' + i \cdot y') \mapsto (x + x') + i \cdot (y + y')$$

und einer Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (x + i \cdot y, x' + i \cdot y') \mapsto (xx' - yy') + i \cdot (xy' + x'y).$$

Sei $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nennen $\mathrm{Re}\, z := x \in \mathbb{R}$ den **Realteil** und $\mathrm{Im}\, z := y \in \mathbb{R}$ den **Imaginärteil** von z. Weiterhin definieren wir die **komplex konjugierte Zahl** $\bar{z} := x - i \cdot y$ und den **Betrag** $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Als erstes wollen wir zeigen, wie sich der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl mit Hilfe der komplexen Konjugation schreiben lässt.

Aufgabe 2.39. Sei $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass $\overline{\overline{z}} = z$.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$.

c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

Die etwas seltsam anmutende Definition der Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann einfach verstanden werden indem wir in der folgenden Pseudorechnung i wie eine reelle Variable behandeln und im letzten Schritt $i^2 = -1$ ausnutzen.

$$\begin{aligned}(x+i\cdot y)\cdot(x'+i\cdot y') &= xx' + x\cdot i\cdot y' + i\cdot y\cdot x' + i\cdot y\cdot i\cdot y' \\ &= xx' + i^2 yy' + i\cdot(xy'+x'y) \\ &= (xx'-yy') + i\cdot(xy'+x'y)\end{aligned}$$

Aus der Definition der Addition und Multiplikation ist direkt klar, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ unter diesen beiden Operationen abgeschlossen sind. Außerdem folgt durch einfaches Nachrechnen, dass sich die Assoziativität und Kommutativität der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen übertragen. Das additive Neutrale ist, wie in den reellen Zahlen, $0 = 0 + i\cdot 0$ und das additive Inverse $-(x+i\cdot y) = -x - i\cdot y$ einer komplexen Zahl $x+i\cdot y \in \mathbb{C}$ können wir einfach angeben, so dass die komplexen Zahlen zusammen mit der Addition $(\mathbb{C},+)$ eine abelsche Gruppe sind. Analog ist das neutrale Element der Multiplikation $1 = 1 + i\cdot 0$ und mit der Definition der komplex konjugierten Zahl ist es einfach zu sehen, dass das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ gerade $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ ist, so dass auch $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. Damit haben wir gezeigt, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen mit den oben definierten Operationen einen Körper bilden.

Lemma 2.40. *Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein Körper.*

Als nächstes wollen wir untersuchen, ob sich weitere Eigenschaften der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen übertragen. Die zweite Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir axiomatisch vorausgesetzt hatten, war, dass die reellen zahlen ein *geordneter* Körper sind. Dies überträgt sich nicht auf die komplexen Zahlen und sie stellen gerade das versprochene Beispiel für einen Körper dar, der nicht geordnet ist. Wir verwenden erneut die Technik des Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass die komplexen Zahlen geordnet sind. Wie wir in Lemma 2.19 gezeigt haben, ist 1 eine positive Zahl, entsprechend ist -1 eine negative Zahl, dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass Quadrate stehts positive Zahlen sind, da $-1 = i^2$ das Quadrat von i ist.

Lemma 2.41. *Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind kein* geordneter *Körper.*

Um ein wenig Übung im Umgang mit komplexen Zahlen zu erhalten betrachten wir zunächst einige Beispiele:

Aufgabe 2.42. Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen $z = x + i\cdot y \in \mathbb{C}$.

a) $z = \overline{(3+2i)} + 4i$, b) $z = (1+2i)\cdot(2+i)$, c) $z = (1+i)\cdot(1-i)$ und d) $z = \dfrac{1}{3+5i}$

Beispiel 2.43.

a) Wir betrachten die komplexe Zahl $z = \frac{1+2i}{3+4i}$ und wollen den Real- und Imaginärteil von z bestimmen. Dazu rufen wir uns in Erinnerung was wir über das Inverse von komplexen Zahlen in unserer Ausführung zum multiplikativen Inversen geschrieben hatten: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{3+4i} &= (1+2i)\cdot\frac{\overline{3+4i}}{(3+4i)\overline{(3+4i)}} \\ &= (1+2i)\cdot\frac{3-4i}{(3+4i)\cdot(3-4i)} \\ &= \frac{3+8-i\cdot(-4+6)}{9+16} \\ &= \frac{11}{25} + i\cdot\frac{2}{25}\end{aligned}$$

b) Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung $2z^2 + 2i\cdot z = 5$. Wir beginnen damit die Gleichung umzuformen.

$$\frac{5}{2} = z^2 + i\cdot z = \left(z+\frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \left(z+\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Subtrahieren wir $\frac{1}{4}$ von beiden Seiten, so lässt sich einfach die Wurzel ziehen.

$$z + \frac{i}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

Demnach sind die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{i+3}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{i-3}{2}.$$

Aufgabe 2.44. Berechnen Sie die in den folgenden Ausdrücken die komplexe Zahl $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ und geben Sie sie in der Form Realteil + Imaginärteil an.

$$\text{a) } z = \frac{i}{1+i} - \frac{1+i}{2i}, \qquad \text{b) } z(1+i) + \frac{\overline{z}}{i} = 5i \cdot (1+2i) \qquad \text{und c) } z^2 = -3-4i$$

Bemerkung 2.45 (Geometrische Interpretation von $\mathbb{C}$). Wir haben die reellen Zahlen als „vollständigen Zahlenstrahl" bezeichnet, entsprechend können wir die komplexen Zahlen geometrisch als eine zweidimensionales Ebene interpretieren, diese bezeichnen wir als **komplexe Zahlenebene**. Wir tragen dabei den Realteil der komplexen Zahl als Ordinate und dem Imaginärteil als Abszisse auf, dies ist in der folgenden Abbildung für eine komplexe Zahl z und ihre komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ getan. Daneben haben wir die Addition zweier komplexer Zahlen dargestellt.

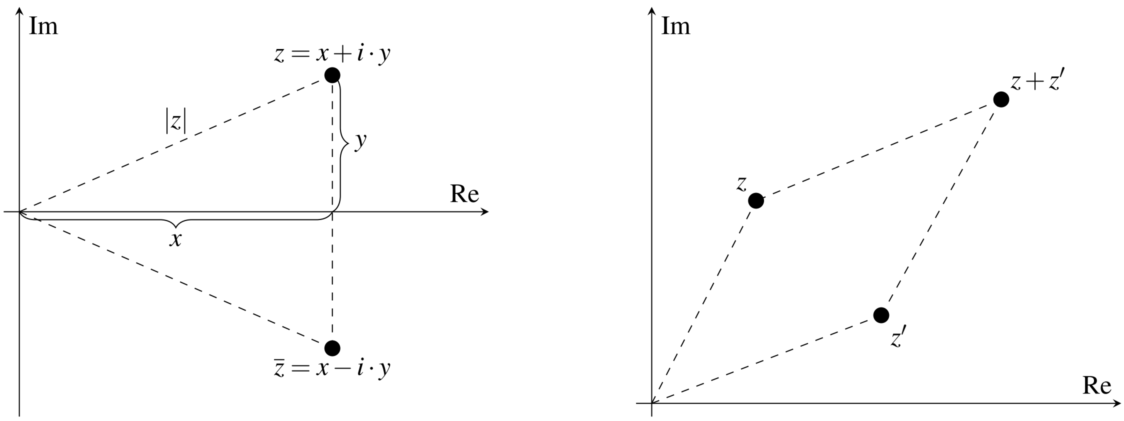


Abbildung 2.2: Darstellung einer komplexen Zahl z sowie seiner komplex konjugierten Zahl $\overline{z}$ und der Addition zweier komplexer Zahlen z und z' in der komplexen Zahlenebene.

Interessanter ist die grafische Darstellung der komplexen Multiplikation. Wir betrachten zwei komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y$ und $z' = x' + i \cdot y'$. Das Produkt der Zahlen z und z' ist entsprechend seiner Definition gegeben durch $z \cdot z' = z \cdot x' + z \cdot i \cdot y'$. In der folgenden Abbildung sind exemplarisch zwei komplexe Zahlen in der komplexen Ebene visualisiert, zusätzlich zu den Beträgen, den Real- und Imaginärteilen haben wir ebenfalls die Winkel α und β zwischen Realteil und Betrag eingezeichnet. Wir zerlegen das Produkt von z und z' in die Summe aus $z \cdot x' = xx' + i \cdot yx'$ und $z \cdot i \cdot y' = -yy' + i \cdot xy'$. Diese Summe können wir wie in der vorherigen Abbildung skizzieren. Betrachten wir das dabei entstehende Dreieck mit den Eckpunkten 0, $z \cdot x'$ und $z \cdot z'$, so stellen wir fest, dass der Winkel in $z \cdot x'$ auf Grund unserer Konstruktion ein rechter Winkel ist. Außerdem kennen wir die Seitenlängen der Katheten $|z| \cdot x'$ bzw. $|z| \cdot y'$. Das Verhältnis dieser entspricht dem der entsprechenden Katheten im zu z' gehörigen Dreieck, so dass diese Dreiecke ähnlich zueinander sind. Der Winkel im Ursprung ist damit β und die Länge der Hypotenuse beträgt $|z| \cdot |z'|$. Wir haben somit gezeigt, dass der Betrag des Produkts zweier komplexer Zahlen $z \cdot z'$ gerade dem Produkt der Beträge entspricht und dass der „Winkel" des Produkts gerade der Summe der „Winkel" der Faktoren entspricht.

Dies ist Grundlage einer alternativen Schreibweise für komplexe Zahlen. Anstatt über Real- und Imaginärteil können komplexe Zahlen auch mittels ihres Betrags und des oben genutzten Winkels im Ursprung angegeben werden. Eine solche Schreibweise macht die Berechnung des Produkts zweier komplexer Zahlen besonders einfach, allerdings ist die Addition ungleich komplizierter. Welche Schreibweise zu bevorzugen ist, hängt also von der verwendeten Rechenvorschrift ab.
Bisher haben wir nicht formal definiert, wie wir den Winkel nutzen wollen um eine komplexe Zahl anzugeben. Da

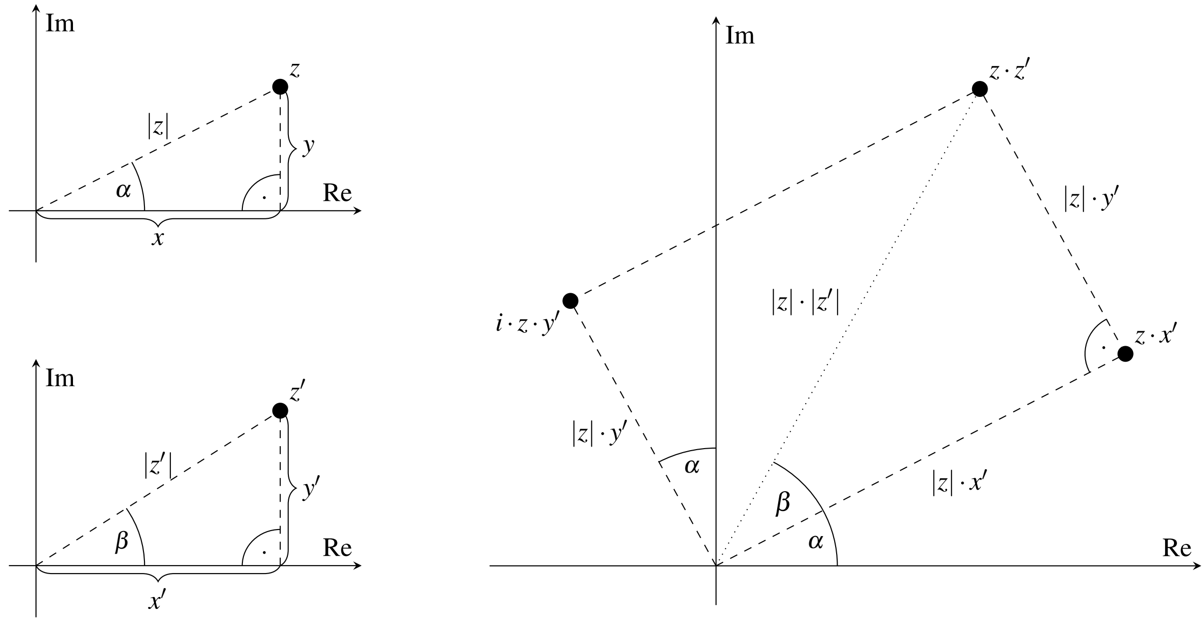


Abbildung 2.3: Darstellung zweier komplexer Zahl z und z' (links) und der geometrischen Interpretation des Produkts $z \cdot z'$ (rechts).

wir die verwendeten Ausdrücke erst im Laufe des nächsten Kapitels formal einführen, greifen wir an dieser Stelle auf unsere Kenntnis der trigonometrischen Funktionen aus der Schule zurück. In der Darstellung der komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ in Abbildung 2.3 ist $|z|$ die Hypotenuse und x die Ankathete zum Winkel α, so dass mit der Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$$x = |z| \cdot \cos\alpha$$

gilt. Entsprechend ist y die Gegenkathete zum Winkel α und somit gilt mit der Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$$y = |z| \cdot \sin\alpha.$$

Wir können die komplexe Zahl z demnach als $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ schreiben. Anstelle der trigonometrischen Funktionen wird dabei die komplexe Exponentialfunktion genutzt, diese definieren wir an dieser Stelle mit unserer Kenntnis der trigonometrischen Funktionen als $\exp(i \cdot \alpha) := \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$.
Damit ergibt sich die sogenannten **Polardarstellung** einer komplexen Zahl z mit Hilfe ihres Betrags $|z|$ und ihrer **Phase** α

$$z = |z| \cdot \exp(i \cdot \alpha).$$

Aufgabe 2.46.

a) Machen Sie sich mit Hilfe Ihrer Kenntnis der trigonometrischen Funktionen bewusst, dass

$$|\exp(i \cdot \alpha)| = 1 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) Schreiben Sie sämtliche Nullstellen des komplexen Polynoms $f(z) = z^4 + 1$ in Polardarstellung und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

Lemma 2.47 (Eigenschaften der komplexen Konjugation und der Betragsfunktion)**.** *Seien $z, z' \in \mathbb{C}$.*

a) *Es gelten $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ und $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.*

b) *Es gilt $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.*

c) *Es gilt $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (**Dreiecksungleichung**).*

Beweis. Seien $z = x + i \cdot y$ und $z' = x' + i \cdot y' \in \mathbb{C}$.

a) Die beiden Aussagen über die komplexe Konjugation ergeben sich durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{x + x' + i \cdot (y + y')} = x + x' - i \cdot (y + y') = x - i \cdot y + x' - i \cdot y' = \overline{z} + \overline{z'} \\ \text{und} \quad \overline{z \cdot z'} &= \overline{xx' - yy' + i \cdot (xy' + yx')} = xx' - yy' - i \cdot (xy' + yx') = (x - i \cdot y) \cdot (x' - i \cdot y') = \overline{z} \cdot \overline{z'} \end{aligned}$$

b) Wir haben diese Aussage bereits geometrisch in Bemerkung 2.45 gesehen, alternativ lässt es sich mit der Definition des Betrags und der ersten Aussage einfach nachrechnen:

$$|z \cdot z'| = \sqrt{zz' \cdot \overline{zz'}} \overset{\text{a)}}{=} \sqrt{zz' \cdot \overline{z} \cdot \overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \cdot \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \cdot |z'|$$

c) Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, betrachten wir die Quadrate der beiden Seiten getrennt:

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} \overset{\text{a)}}{=} z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{\overline{z'}z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad (|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z| \cdot |z'|$$

Somit bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z \cdot z'| \overset{\text{b)}}{=} |z| \cdot |z'|$. Sei dazu $\tilde{z} = \tilde{x} + i \cdot \tilde{y}$ eine komplexe Zahl, dann gilt

$$\mathrm{Re}\,\tilde{z} = \tilde{x} \leq \sqrt{\tilde{x}^2} \leq \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = |\tilde{z}|.$$

Die gesuchte Abschätzung $\mathrm{Re}\,\tilde{z} \leq |\tilde{z}|$ gilt also sogar für beliebige komplexe Zahlen. Zusammenfassend haben wir somit gezeigt, dass

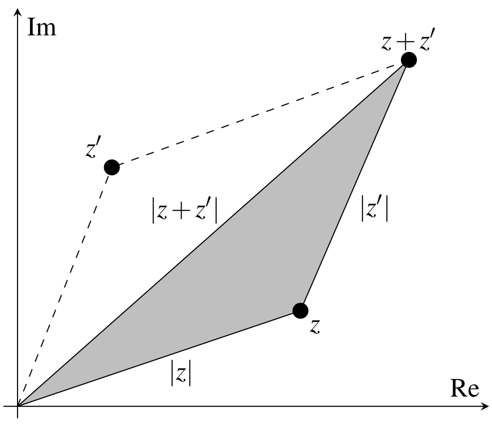
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z| \cdot |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

Die Dreiecksungleichung folgt durch Wurzelziehen auf beiden Seiten.

□

Bemerkung 2.48.

a) Geometrisch ist die Dreiecksungleichung leicht zu verstehen, wir betrachten dazu in der folgenden Abbildung das graue Dreieck mit den Eckpunkten 0, z und $z+z'$. Die Dreiecksungleichung besagt nun, dass die Summe der Längen zweier Seiten stehts zumindest genauso groß ist, wie die Länge der dritten Seite. Ihren Namen erhält die Dreiecksungleichung aus dieser geometrischen Interpretation.



b) Wir haben gesehen, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper sind, somit können wir unsere Definition 2.25 in der wir definiert haben, wann wir eine Menge beschränkt nennen, nicht direkt auf die komplexen Zahlen übertragen. Mit Hilfe der Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ lässt sich dies umgehen und wir definieren: eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ nennen wir **beschränkt**, wenn ihr Bild $|M| \subset \mathbb{R}$ unter der Betragsfunktion beschränkt ist, das heißt, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $z \in M$ gilt $|z| \leq s$. Eine Unterscheidung von nach oben bzw. nach unten beschränkt können wir auf diesem Weg natürlich nicht machen.

Als Motivation der komplexen Zahlen haben wir das Polynom $f(x) = x^2 + 1$ betrachtet und festgestellt, dass dieses keine Nullstelle in den reellen Zahlen sehr wohl aber in den komplexen Zahlen die beiden Nullstellen i und $-i$ hat. Wir hatten bereits am Anfang unserer Ausführung erwähnt, dass dies nicht nur für das Polynom f gilt, sondern für Polynome im Allgemeinen. Die wichtige Aussage, dass Polynome mit Koeffizienten in den komplexen Zahlen über eine Nullstelle in den komplexen Zahlen verfügen, wird als Hauptsatz oder Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet. Auf einen Beweis werden wir an dieser Stelle verzichten, da dafür eine bessere Kenntnis der Algebra oder der Theorie komplexer Funktionen, der sogenannten Funktionentheorie, nötig ist.

Satz 2.49 (Hauptsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2.50. Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes, dass ein nicht-konstantes komplexes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat.

3 Folgen und Reihen

Im ersten Teil dieser Vorlesung soll es um die Analysis gehen, also um die „Untersuchung von Funktionen“. Dazu haben wir in den ersten beiden Kapitel die benötigten Grundlagen gelegt und die beiden für die Analysis wichtigsten Zahlkörper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ kennen gelernt. Viele der Aussagen die wir im Folgenden untersuchen wollen, gelten gleichermaßen auf den reellen wie auf den komplexen Zahlen und folgen direkt aus den gemeinsamen Eigenschaften beider Körper. Um unsere Notation kompakt und übersichtlich zu halten, benutzen wir die folgende Konvention:

$$\boxed{\text{Das Symbol } \mathbb{K} \text{ steht stellvertretend für einen der Körper } \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.}$$

In diesem Kapitel widmen wir uns dem Grenzwert, der einen zentralen Begriff der Analysis darstellt. Dazu betrachten wir zunächst Folgen und Reihen, die wir als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto a_n$ einführen und machen uns mit Grenzwerten der Form $n \to \infty$ vertraut. Wir werden diesen Grenzwertbegriff im nächsten Kapitel auf allgemeine Funktionen und beliebige Grenzwerte $x \to x_0$ für ein $x_0 \in \mathbb{K}$ übertragen.
Am Ende des Kapitels führen wir Potenzreihen ein und geben eine formale Definition der im letzten Kapitel genutzten Exponentialfunktion exp und der trigonometrischen Funktionen sin und cos.

3.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 3.1 (Grenzwert)**.**

a) Eine **Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto a_n$$

Wenn dies nicht zu Verwechslung führen kann, verwenden wir an Stelle von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die alternative Schreibweise (a_n). Für Folgen, die nicht beim Index 0 sondern bei einem anderen Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen, schreiben wir $(a_n)_{n\geq n_0}$.

b) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen $a \in \mathbb{K}$ als **Grenzwert** der Folge (a_n), wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Eine Folge (a_n), für die ein solches a existiert, nennen wir **konvergent** und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

oder alternativ

$$a_n \to a \text{ wenn } n \to \infty.$$

Eine Folge, für die kein Grenzwert existiert, nennen wir **divergent**.

Bemerkung 3.2. Für ein $a \in \mathbb{K}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ nennen wir die Menge $U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{K}; |z-a| < \varepsilon\}$ die ε-**Umgebung** von a. Die geometrische Interpretation dargestellt in Abbildung 3.1 hängt dabei vom Körper $\mathbb{K}$ ab. In den reellen Zahlen (links) ist $U_\varepsilon(a)$ das offene Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, wogegen in den komplexen Zahlen (rechts) $U_\varepsilon(a)$ eine Kreisfläche um a mit Radius ε darstellt.
Mit dieser Notation können wir die Definition eines Grenzwerts anschaulich interpretieren: Für eine Folge (a_n) nennen wir eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ Grenzwert, falls in jeder ε-Umgebung von a – egal wie klein das ε gewählt ist – alle Folgenglieder ab einem gewissen n_0 liegen. Dieses n_0 darf und wird im Allgemeinen von ε abhängen. Innerhalb jeder ε-Umgebung des Grenzwerts liegen also von den abzählbar vielen Folgengliedern *alle bis auf endlich viele* (alle bis auf evtl. $\{0,1,2,\ldots,n_0-1\}$). Wir wollen die Sprechweise „**fast alle**“ für „alle bis auf endlich viele“ verwenden und können damit die Grenzwertdefinition kompakt formulieren als: *eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ ist Grenzwert einer Folge, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.*
Aus dieser Formulierung wird somit auch direkt klar, dass Abändern, Weglassen oder Hinzufügen endlich vieler Folgenglieder nicht ändert, ob die Folge konvergiert und falls dies der Fall ist gegen welchen Grenzwert.

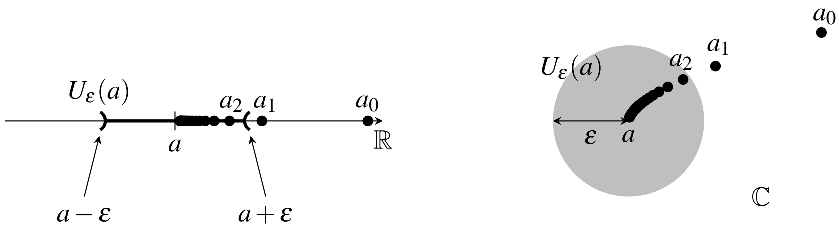


Abbildung 3.1: Darstellung der Folge (a_n) und einer ε-Umgebung um den Grenzwert a in den reellen Zahlen (links) und den komplexen Zahlen (rechts).

Beispiel 3.3. Wir betrachten einige elementare Beispiele.

a) Betrachten wir zunächst die konstante Folge (a_n) für die $a_n = a \in \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Unserer Erwartung entsprechend konvergiert diese gegen a. Dies können wir einfach zeigen indem wir für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ feststellen, dass für alle $n \geq 0$
$$|a_n - a| = |a - a| = |0| = 0 < \varepsilon.$$
In diesem Fall können wir $n_0 = 0$ sogar unabhängig von ε wählen.

b) Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Da die natürlichen Zahlen unbeschränkt sind gibt es in den natürlichen Zahlen ein $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Für dieses gilt demnach $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ und damit auch für alle $n \geq n_0$
$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

c) Als drittes wollen wir uns ein Beispiel für eine divergente Folge ansehen. Dazu betrachten wir die reelle Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folgenglieder von (a_n) alternieren zwischen 1 und -1, so dass uns direkt anschaulich klar ist, dass sich (a_n) keinem Grenzwert annähern kann. Für einen formalen Beweis wählen wir ein beliebiges $a \in \mathbb{K}$ und betrachten $\varepsilon = 1$, dann gilt entweder $1 \notin U_\varepsilon(a)$ oder $-1 \notin U_\varepsilon(a)$, da andernfalls nach der Dreiecksungleichung
$$2 = |1 - a + 1 + a| \leq |1 - a| + |1 + a| = |1 - a| + |-1 - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2$$
gelten würde. Somit liegt für jedes $a \in \mathbb{K}$ (zumindest) jedes zweite und damit unendlich viele Folgenglieder a_n außerhalb der ε-Umgebung von a für $\varepsilon = 1$. So dass die Folge (a_n) gegen kein $a \in \mathbb{K}$ konvergieren kann.

Aufgabe 3.4. Betrachten Sie die unten definierten Folgen und entscheiden Sie, ob diese konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Aussagen über die Definition und berechnen Sie den Grenzwert konvergenter Folgen ohne Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 3.8.
$$\text{a) } a_n := n, \qquad \text{b) } b_n := \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 1} \qquad \text{und c) } c_n := \sqrt{n^2 + 1} - n$$
Hinweis: Der Grenzwert der dritten Folge lässt sich einfach durch geschicktes Erweitern ausrechnen.

In unserer Notation $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ haben wir bereits suggeriert, dass der Grenzwert einer Folge sofern er existiert eindeutig ist, das wollen wir nun formal beweisen.

Lemma 3.5 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels eines Widerspruchsbeweises und nehmen an, dass es eine Folge (a_n) gibt, die gegen die beiden Grenzwerte $a \in \mathbb{K}$ und $b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq b$ konvergiert. Da $a \neq b$ ist $|a - b| > 0$ (dies lässt sich jeweils einfach anhand der Definition des Betrags sehen) und wir können $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ wählen. Nach der Definition der Konvergenz von (a_n) gegen a gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$. Völlig analog folgt die Existenz eines $n_0' \in \mathbb{N}$, für das für alle $n \geq n_0'$ gilt, dass $|a_n - b| < \varepsilon$. Somit gilt für alle $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$
$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$
Damit haben wir unsere Annahme, dass es eine Folge mit zwei Grenzwerten geben kann zu dem Widerspruch $|a - b| < |a - b|$ geführt und somit die Eindeutigkeit des Grenzwerts gezeigt. $\square$

Bevor wir uns weiterer Eigenschaften von Folgen zuwenden, definieren wir zunächst was wir unter einer beschränkten und was unter einer Nullfolge verstehen.

Definition 3.6. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$.

a) Wir bezeichnen (a_n) als **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, es also ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq s$. Für reellen Folgen können wir zudem von von oben und von von unten beschränkten Folgen sprechen.

b) Wir nennen (a_n) eine **Nullfolge**, wenn (a_n) gegen 0 konvergiert.

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt noch einmal die Folgen aus Beispiel 3.3, so fällt uns auf, dass sämtliche von uns betrachteten Beispiele beschränkt sind. Dass dies im Fall der konvergenten Folgen kein Zufall war, sondern konvergente Folgen im Allgemeinen beschränkt sind, wollen wir als nächstes zeigen. Umgekehrt haben wir anhand der alternierenden Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber auch gesehen, dass nicht jede beschränkte Folge konvergiert.

Lemma 3.7.

a) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

b) *Das gliedweise Produkt $(a_n b_n)$ einer beschränkten Folge (a_n) und einer Nullfolge (b_n) ist ebenfalls eine Nullfolge.*

Beweis.

a) Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so dass es für $\varepsilon := 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, für das $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt.
Mit der Dreiecksungleichung können wir somit schließen, dass

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| = 1 + |a|$$

für alle $n \geq n_0$. Damit ist die Folge (a_n) beschränkt durch $s := \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$.

b) Für die beschränkte Folge (a_n) wählen wir eine Schranke $s \in \mathbb{R}$, für die gilt $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist, geben wir uns ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor. Für die Nullfolge (b_n) können wir ein n_0 angeben, so dass $|b_n| < \frac{\varepsilon}{s}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit gilt für diese n_0 aber ebenfalls $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < s \cdot \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $(a_n b_n)$ ist somit eine Nullfolge.

□

Kombinieren wir diese beiden Aussagen, ergibt sich, dass der Grenzwert des Produkts zweier konvergenter Folgen gerade das Produkt der Grenzwerte ist, sofern eine der Folgen eine Nullfolge ist. Wir zeigen als nächstes, dass diese Rechenregel nicht auf Nullfolgen und die Multiplikation beschränkt ist.

Satz 3.8 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** *Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$.*

a) *Die Folge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$ und die Folge $(a_n - b_n)$ konvergiert gegen $a - b$.*

b) *Die Folge $(a_n b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.*

c) *Sind $b \neq 0$ und fast alle $b_n \neq 0$, so konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ gegen $\frac{a}{b}$.*

Beweis. Die Beweise der ersten beiden Aussagen sind dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Der Beweis der dritten Aussage lässt sich in jedem Standardwerk über Analysis nachlesen. □

Aufgabe 3.9. Machen Sie sich mit den Rechenregeln aus Satz 3.8 vertraut und beweisen Sie sie:

a) Wenden Sie die Rechenregeln auf die folgenden Beispiele an:

$$\text{i)}\ a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad \text{ii)}\ a_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad \text{und iii)}\ \frac{2n^2+4n+6}{n^2+2n+4} + \frac{5n^3+5}{2n^3+3n^2+2n+1}$$

b) Beweisen Sie die Rechenregeln für Summen und Produkte von konvergenten Folgen.

Aufgabe 3.10. Eine Folge (a_n) nennen wir Cauchyfolge, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

Für den Rest des Abschnitts beschränken wir uns auf reelle Folgen und zeigen für diese ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium.

Definition 3.11 (Monotone Folgen)**.** Eine Folge (a_n) nennen wir **monoton wachsend**, wenn $a_n \geq a_m$ für alle $n \geq m$, und **monoton fallend**, wenn $a_n \leq a_m$ für alle $n \geq m$ gilt.

Satz 3.12 (Monotoniekriterium). *Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ sind konvergent.*

Beweis. Wir betrachten die Menge der Folgenglieder $M := \{a_0, a_1, a_2, ...\} \subset \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist M beschränkt, so dass nach Supremumsaxiom das Supremum $a := \sup M$ existiert. Wir wollen nun zeigen, dass (a_n) gegen dieses a konvergiert.
Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. a ist nach Definition eine obere Schranke von M, so dass

$$a_n \leq a \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Außerdem ist a die kleinste obere Schranke, so dass $a - \varepsilon$ keine obere Schranke ist, es also ein a_{n_0} gibt, so dass $a_{n_0} > a - \varepsilon$ ist. Damit gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| \overset{(*)}{=} a - a_n \leq a - a_{n_0} < a - (a - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Wobei wir im zweiten Schritt die Monotonie $a_n \geq a_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$ ausgenutzt haben. □

Damit folgt natürlich auch direkt, dass monoton fallende und nach unten beschränkte Folgen (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergent sind. Um dies zu sehen, betrachten wir $(-a_n)$. Diese ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, so dass sie nach dem Monotoniekriterium konvergiert. Das Produkt $(a_n) = \big(-(-a_n)\big)$ aus der konstanten Folge $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$ und der konvergenten Folge $(-a_n)$ konvergiert nach den zuvor bewiesenen Rechenregeln somit ebenfalls.

Beispiel 3.13. Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Wir definieren eine reelle Folge (a_n) durch „Anfangswert" $a_0 := 1$ und die rekursive Vorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen nun das Monotoniekriterium benutzen um zu zeigen, dass (a_n) konvergiert.

a) Wir beginnen damit die Beschränkheit zu zeigen, dafür stellen wir fest, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 = a_n^2 - 2c + \frac{c^2}{a_n^2} \\ \implies\ 4c &\leq a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2} = \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 \\ \implies \sqrt{c} &\leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = a_{n+1} \end{aligned}$$

Somit ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nach unten durch die Quadratwurzel von c beschränkt.

b) Wir benutzen jetzt die Beschränkheit von (a_n) um die Monotonie der Folge zu zeigen. Aus a) wissen wir, dass für $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} c \leq a_n^2 \implies\ & \frac{c}{a_n} \leq a_n \\ \implies\ & a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \end{aligned}$$

Somit ist Folge (a_n) nach dem Monotoniekriterium konvergent. Um den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ zu bestimmen, nutzen wir die Rekursionsvorschrift und die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen aus Satz 3.8 und erhalten die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right).$$

Diese hat die beiden Lösungen $\pm\sqrt{c}$. Betrachten wir den positiven Startwert $a_0 = 1$ und die rekursive Definition können wir den negativen Wert ausschließen. Somit konvergiert die Folge (a_n) gegen $\sqrt{c}$ und wir haben eine einfache Möglichkeit gefunden mit Hilfe der Körperoperationen näherungsweise Wurzeln zu berechnen.

Aufgabe 3.14. Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ wenn $n \to \infty$.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge (a_n) mit $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Formen Sie diese Gleichung um und versuchen Sie a_n abzuschätzen.

3.2 Reihen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels haben wir uns allgemein mit Folgen beschäftigt und einige Beispiele gesehen in denen sich das n-te Folgenglied einer Folge (a_n) einfach als Funktion von n schreiben lässt. Ein weiteres wichtiges Beispiel stellen Folgen dar, deren Folgenglieder

$$(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, ...)$$

sich in „angenehmer Form" als Summen einer zunehmenden Anzahl von Summanden schreiben lassen. Der Grenzwert einer solchen Folge stellt also gewissermaßen eine „unendliche Summe" dar. Einige bekannte Funktionen, wie die Exponentialfunktion exp und die trigonometrischen Funktionen sin und cos, lassen sich als „unendliche Summen" darstellen. Bevor wir diese allerdings formal definieren, beschäftigen wir uns mit der zugrunde liegenden Theorie.

Definition 3.15 (Reihen)**.** Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir nennen die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_N$$

die Folge der **Partialsummen** von (a_n) oder die zu (a_n) gehörige **Reihe**.
Den Grenzwert $\lim_{N\to\infty} s_N$ einer Reihe (s_N) schreiben wir als

$$\sum_{N=0}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

und bezeichnen ihn ebenfalls als Reihe.

Mit dieser Definition ist jede Reihe eine Folge und somit übertragen sich die Definitionen von Konvergenz, Divergenz, Grenzwert und Beschränktheit für Folgen direkt auf Reihen. Andersherum können wir auch eine Folge (a_n) als Reihe der Inkremente $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, ...)$ auffassen.
Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen aus Satz 3.8 übertragen sich somit auf diese spezielle Art von Folgen im folgenden Umfang:

Lemma 3.16 (Rechenregeln für Reihen)**.** *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$.*

a) *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)$ konvergiert gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

b) *Für eine Konstante $c \in \mathbb{K}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Beweis. Für die Partialsummen folgt a) aus der Kommutativität und b) aus dem Distributivgesetz, aus Satz 3.8 folgen damit die Aussagen für die Grenzwerte. □

Betrachten wir exemplarisch $(a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1 \neq a_0 b_0 + a_1 b_1$, so ist klar, dass eine entsprechende Aussage für Produkte von Reihen keine vergleichbar einfache Form haben kann. Solche Produkte von Reihen werden als *Cauchy-Produkte* bezeichnet und im Rahmen weiterführender Veranstaltungen behandelt. Bevor wir uns anschließend einigen Beispielen zuwenden, betrachten wir zunächst eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe.

Lemma 3.17 (Trivialkriterium)**.** *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.*

Beweis. Sei (s_N) die Folge der Partialsumme von (a_n) und $s = \lim_{N\to\infty} s_N$ ihr Grenzwert, dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\right) = \lim_{N\to\infty}(s_N - s_{N-1}) = \lim_{N\to\infty} s_N - \lim_{N\to\infty} s_{N-1} = s - s = 0.$$

□

Beispiel 3.18.

a) (**Unendliche geometrische Reihe**) Als erstes betrachten wir die unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $q \in \mathbb{K}$. Bevor wir unser Ergebnis aus Satz 2.13 zur endlichen geometrischen Reihe nutzen, stellen wir zunächst fest, dass für $|q| \geq 1$ die zughörige Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist und die geometrische Reihe somit divergiert. Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ wissen wir dagegen, dass

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Der Grenzwert für $N \to \infty$ ergibt sich nun indem wir für $|q| < 1$ zeigen, dass $q^N \to 0$, dazu stellen wir fest, dass es für $|q| < 1$ ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $q = \frac{1}{1+x}$. Damit können wir die Bernoullische Ungleichung nutzen um

$$|q^N - 0| = |q|^N = \frac{1}{(1+x)^N} \leq \frac{1}{1+Nx} < \frac{1}{Nx}$$

zu zeigen. Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir $N_0 \in \mathbb{N}$ nun so wählen, dass $\frac{1}{Nx} < \varepsilon$ für alle $N \geq N_0$.
Damit haben wir gezeigt, dass für $|q| < 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

annimmt.

b) (Teleskopreihen) Als zweites Beispiel betrachten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Im Fall dieser Reihe können wir zum Berechnen des Grenzwerts ausnutzen, dass sich der Summand zu $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ umschreiben lässt. Dies ermöglicht es uns die Partialsummen als

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

zu schreiben. Der Grenzwert der Reihe ergibt sich somit zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

c) (**Harmonische Reihe**) In unserem dritten Beispiel betrachten wir die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ von der wir zeigen wollen, dass sie divergiert. Um das zu sehen, betrachten wir die Partialsumme zum Index $N = 2^k$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)\\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\\ &= 1 + \frac{k}{2}\end{aligned}$$

Da $1+\frac{k}{2}$ unbeschränkt wächst, ist die harmonische Reihe divergent. In Beispiel 3.3 hatten wir gesehen, dass die zugegörige Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist. Das Trivialkriterium ist somit notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe.

Aufgabe 3.19 (Partialbruchzerlegung)**.** Zur Berechnung des Grenzwerts der Teleskopreihe haben wir den Bruch $\frac{1}{n(n+1)}$ in die Summe aus den zwei Brüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{-1}{n+1}$ zerlegt. Dieses Vorgehen bezeichnen wir als Partialbruchzerlegung. Die zugrundeliegende Idee der Partialbruchzerlegung ist dabei, den Nenner in seine Linearfaktoren zu zerlegen. Jeder dieser Linearfaktoren stellt den Nenner eines Summanden dar. Die Zähler können durch das Aufstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.
Verwenden Sie die Partialbruchzerlegung um die folgenden Brüche in eine Summe aus zwei Brüchen umzuschreiben.

$$\text{a) } \frac{2x}{x^2-1} \qquad \text{b) } \frac{2x+1}{x^2+x} \qquad \text{und c) } \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

Als nächstes wollen wir mit dem Quotientenkriterium ein weiteres Konvergenzkriterium betrachten. Von diesem existieren zwei leicht verschiedene Versionen, die wir der vollständigkeithalber beide angeben. Auf einen formalen Beweis verzichten wir an dieser Stelle, um uns die dazu erforderliche Vorarbeit zu sparen.

Satz 3.20 (**Quotientenkriterium**, 1. Version)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.*

a) *Gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$, so dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.*

b) *Ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe divergent.*

Satz 3.21 (**Quotientenkriterium**, 2. Version)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.*

a) *Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ und ist kleiner als 1, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.*

b) *Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ und ist größer als 1, so ist die Reihe divergent.*

Vergleichen wir die beiden Versionen des Quotientenkriteriums, so fällt auf, dass die erste Version etwas allgemeiner, nämlich auch dann wenn $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ nicht konvergiert, anwendbar ist. In vielen Fällen existiert der Grenzwert allerdings und dann ist es einfacher die zweite Version anzuwenden.

Aufgabe 3.22. Wenden Sie das Quotientenkriterium auf die drei Reihen aus Beispiel 3.18 an.

Aufgabe 3.23 (Wurzelkriterium)**.** Neben dem Quotienkriterium gibt es ein weiteres Kriterium für die Konvergenz von Reihen, das sogenannte **Wurzelkriterium**: Die zu einer Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ gehörige Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$ gibt, so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

Wie für das Quotientenkriterium gibt es außerdem eine zweite Version: Existiert der Grenzwert

$$a := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

so ist, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn $a < 1$ und divergent wenn $a > 1$.
Wenden Sie das Wurzelkriterium an um die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$$

zu zeigen.

Das nächste Beispiel fungiert zugleich als Definition einer der wichtigsten Funktionen in der Mathematik, der Exponentialfunktion exp.

Beispiel 3.24. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots.$$

Der Quotient aus der zweiten Version des Quotientenkriteriums

$$|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}| = \frac{|z|}{n+1}$$

konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0, so dass die Reihe für beliebiges $z \in \mathbb{K}$ konvergiert. Wir können also eine wohldefinierte Abbildung

$$\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

definieren, die wir als **Exponentialfunktion** bezeichnen.
Wir werden uns im nächsten Kapitel weiter mit der Exponentialfunktion beschäftigen und einige ihrer Eigenschaften formal herleiten. Zu den wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion gehört die *Funktionalgleichung*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \text{ für } x, y \in \mathbb{K}.$$

Um diese herzuleiten müssten wir das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialfunktionen ausmultiplizieren, da wir dieses im Rahmen dieser Vorlesung nicht eingeführt haben, verweisen wir für einen formalen Beweise der Funktionalgleichung auf die Mathematikvorlesungen des ersten Semesters.

Bevor wir uns der Definition der trigonometrischen Funktionen sin und cos zuwenden und zeigen, dass unsere vorläufige Definition der komplexen Exponentialfunktion aus Abschnitt 2.2 in Einklang mit der Definition als Reihe ist, beschäftigen wir uns zunächst allgemein etwas mit der Theorie von Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für gewisse $a_n \in \mathbb{K}$.

Definition 3.25 (Potenzreihen)**.** Für eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ und $z \in \mathbb{K}$ bezeichnen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ als **Potenzreihe** in z.

So wie wir das für die Exponentialfunktion getan haben, können wir eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\mathbb{K}$ in ihrem **Konvergenzbereich** $D := \{z \in \mathbb{K}; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}$ als Funktion $D \to \mathbb{K}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auffassen. Als nächstes wollen wir uns mit der Form des Konvergenzbereichs beschäftigen und stellen fest, dass unabhängig von der Form der Potenzreihe 0 im Konvergenzbereich liegt.

Lemma 3.26. *Konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\mathbb{K}$ für ein gegebenes $z = z_0$, so konvergiert sie ebenfalls für jedes $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| < |z_0|$.*

Der Konvergenzbereich hat in $\mathbb{C}$ somit die Form eines Kreises dessen Radius als Konvergenzradius bezeichnet wird.

Definition 3.27 (Konvergenzradius)**.** Für einen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\mathbb{K}$ nennen wir

$$r := \sup\{|z|; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}$$

den **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Der Konvergenzradius trennt $\mathbb{K}$ dabei gerade in den Bereich in dem die Potenzreihe konvergiert und den im dem sie divergiert.

Satz 3.28. *Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius r konvergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| < r$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| > r$.*

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r und $z \in \mathbb{K}$. Wir betrachten zunächst den Fall $|z| < r$. Aufgrund der Definition des Supremums ist $|z|$ somit keine obere Schranke von $\{|z|; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}$, so dass es ein $z_0 \in \mathbb{K}$ mit $|z| < |z_0|$ gibt, für das die Potenzreihe konvergiert. Nach Lemma 3.26 konvergiert die Potenzreihe somit in z.
Als zweites betrachten wir nun den Fall $|z| > r$. Nach Definition des Supremums ist $|z|$ somit nicht Element der Menge $\{|z|; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}$, so dass die Potenzreihe in z divergiert. □

Durch das Theorem wird keine Aussage über die Konvergenz auf dem Konvergenzradius gemacht und die Potenzreihe kann in einigen Punkten auf dem Rand des Konvergenzbereichs konvergieren und in anderen divergieren. Der Konvergenzradius lässt sich mit der zweiten Version des Quotientenkriteriums einfach berechnen.

Satz 3.29 (Berechnung des Konvergenzradius)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$. Wenn der Grenzwert der Quotienten $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gegeben durch:*

$$r = \begin{cases} \infty & \textit{falls der Grenzwert 0 beträgt} \\ \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und r definiert wie in der Behauptung des Satzes. Nach dem Quotientenkriterium aus Satz 3.21 konvergiert die Reihe, wenn

$$1 > \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n} \right| = |z| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{r}.$$

Die Potenzreihe konvergiert demnach wenn $|z| < r$. Aus dem Kriterium für die Divergenz einer Reihe erhalten wir außerdem, dass die Potenzreihe divergert, wenn $|z| > r$. Damit ist das in der Behauptung definierte r gerade der Konvergenzradius. □

Aufgabe 3.30. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n \qquad \text{und c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2+n}}{2^n} z^n$$

Nach dieser allgemeinen Betrachtung von Potenzreihen wollen wir jetzt die trigonometrischen Funktionen Sinus sin und Cosinus cos definieren. Wir betrachten dazu die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass beide für alle $z \in \mathbb{K}$ konvergieren. Dazu stellen wir fest, dass sich beide Reihe mit der Reihe der Exponentialfunktion umschreiben lassen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k + (-i)^k}{k!} z^k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} \right) = \frac{1}{2} (\exp(iz) + \exp(-iz))$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k - (-i)^k}{k!} z^k = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} \right) = \frac{1}{2i} (\exp(iz) - \exp(-iz))$$

Da die Reihe der Exponentialfunktion für alle $z \in \mathbb{K}$ konvergiert, tut das die Summe bzw. Differenz zweier Exponentialfunktionen ebenfalls und beide Reihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{K}$. Damit können wir die beiden Funktionen **Sinus** und **Cosinus**

$$\cos : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sin : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

definieren und halten die von uns gefundenen Identitäten fest.

Lemma 3.31 (Alternative Darstellung von Sinus und Cosinus)**.** *Für alle $z \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (\exp(iz) + \exp(-iz)) \qquad \textit{und} \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i} (\exp(iz) - \exp(-iz)).$$

Anderherum können wir diese alternative Darstellung nutzen um die komplexe Exponentialfunktion als Summe aus Sinus- und Cosinus-Funktion dazustellen, wie wir das in Abschnitt 2.2 getan hatten.

$$\cos(z) + i \cdot \sin(z) = \frac{1}{2} (\exp(iz) + \exp(-iz)) + \frac{1}{2} (\exp(iz) - \exp(-iz)) = \exp(iz)$$

Unsere Untersuchung der drei Funktionen exp, cos und sin setzen wir am Ende des nächsten Kapitels fort, nachdem wir uns mit einer weiteren wichtigen Eigenschaft von Funktionen, der Stetigkeit beschäftigt haben, und von diesen drei Beispielen gezeigt haben, dass sie stetig sind.

4 Stetigkeit

Wir haben Folgen als Funktionen auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kennen gelernt und Grenzwerte für $n \to \infty$ untersucht. Es ist nun naheliegend diese Theorie auf beliebige Funktionen einer reellen oder komplexen Variable übertragen zu wollen. Wir sind in diesem Fall nicht auf den Grenzwert für $n \to \infty$ beschränkt, sondern können das Verhalten einer Funktion f in einer Variable $x \in \mathbb{K}$ untersuchen, wenn sich x einem gegebenen Wert $a \in \mathbb{K}$ annähert. Dabei lassen wir zu, dass a selbst nicht im Definitionsbereich der Funktion f liegt, sofern es zumindest möglich ist, sich im Definitionsbereich a beliebig dicht anzunähern.

Definition 4.1 (Berührpunkte)**.** Für eine Menge $D \subset \mathbb{K}$ nennen wir eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ **Berührpunkt** von D, wenn es in jeder ε-Umgebung von a mindestens einen Punkt aus D gibt. Die Menge aller Berührpunkte von D nennen wir den **Abschluss** von D und bezeichnen ihn mit $\overline{D}$.

Beispiel 4.2.

a) Für eine Menge $D \subset \mathbb{K}$ ist jedes Element $a \in D$ ein Berührpunkt von D, so dass $D \subset \overline{D}$.

b) Für ein offenes reelles Intervall $D = (a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ ist $\overline{D} = [a,b]$. Randpunkte offener Intervalle sind also Berührpunkte, die selbst nicht in der Menge liegen.

Wie zum Beginn des Kapitels geschrieben, können wir Grenzwerte von Funktionen für solche Berührpunkte definieren.

Definition 4.3 (Grenzwerte von Funktionen)**.** Für eine Menge $D \subset \mathbb{K}$ und einen ihrer Berührpunkte $a \in \overline{D}$ bezeichnen wir einen Wert $c \in \mathbb{K}$ als den Grenzwert einer Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ in a, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon.$$

Für Folgen hatten wir gesehen, dass Grenzwerte eindeutig sind, wir werden unsere Definition eines Grenzwerts einer Funktion f in a auf unsere Definition von Grenzwerten von Folgen zurückführen und so zeigen, dass insbesondere der Grenzwert einer Funktion eindeutig ist, entsprechend schreiben wir

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = c$$

oder auch $f(x) \to c$ für $x \to a$, und sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen c **konvergiert**.

Bemerkung 4.4. Liegt der in Definition 4.3 betrachtete Berührpunkt a im Definitionsbereich von f und existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$, so muss dieser den Wert $f(a)$ haben, da a in jeder ε-Umgebung von a liegt und somit $|f(a)-c| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 4.5. Nutzen Sie die Definition um die folgenden Grenzwerte nachzuweisen

$$\text{a) } \lim_{x\to 2} 2x-1 = 3, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1 \qquad \text{und c) } \lim_{x\to 1} 3x^2-4 = -1.$$

Hinweis: Verwenden Sie für Teil c) die binomische Formel $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$.

Definition 4.6 (Stetigkeit)**.** Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine auf $D \subset \mathbb{K}$ definierte Funktion.

a) Wir nennen f **stetig** in $a \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert, d.h. wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

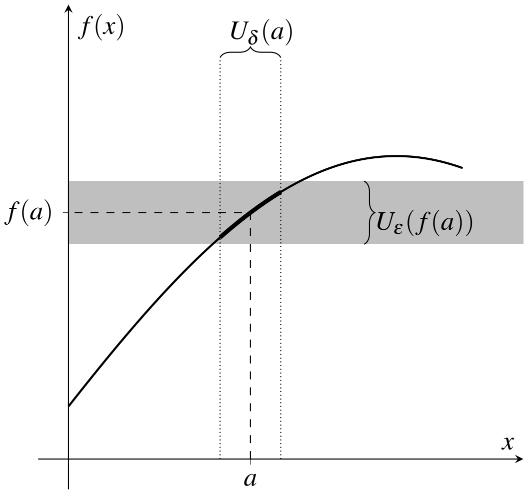
b) Wir nennen f **stetig** (auf D), wenn f stetig in jedem Punkt $a \in D$ ist.

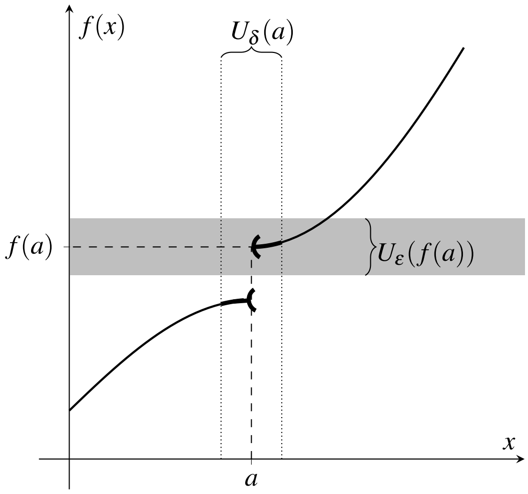
c) Für einen Punkt $a \in \overline{D} \setminus D$ nennen wir f **stetig fortsetzbar** nach a, wenn der Grenzwert $c = \lim_{x\to a} f(x)$ existiert. In diesem Fall ist

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{K}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D, \\ c & \text{falls } x = a, \end{cases}$$

eine in a stetige Funktion, die wir als stetige Fortsetzung von f nach a bezeichnen.

Bemerkung 4.7. Als nächstes wollen wir versuchen die anschauliche Bedeutung des Grenzwertbegriffs für Funktionen herauszuarbeiten. Nach der Definition ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ genau dann stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn es zu jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(f(a))$ von $f(a)$ eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ von a gibt, innerhalb derer alle Punkte von D nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden. Betrachten wir eine in a stetige reelle Funktion (links), so lässt sich also zu jedem noch so schmal gewählten grauen horizontalen Streifen um $f(a)$ eine Einschränkung von f auf eine hinreichend kleine Umgebung von a dazu führt, dass alle Funktionswerte dort in dem gewählten grauen Streifen liegen. Macht die reelle Funktion dagegen einen Sprung in a (rechts), so ist sie in diesem Punkt nicht stetig. *Anschaulich gesprochen bedeutet Stetigkeit, dass kleine Änderungen von x um a auch nur zu kleinen Änderungen von $f(x)$ um $f(a)$ führen.*





Wir betrachten nun einige Beispiele für stetige Funktionen.

Beispiel 4.8.

a) Die Identität $f(x) = x$ ist auf jeder Definitionmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetig. Um dies zu sehen betrachten wir ein beliebiges $a \in D$ und ein $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \varepsilon$, dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

b) Als nächstes betrachten wir die Wurzelfunktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Um zu zeigen, dass g stetig ist, unterscheiden wir die beiden Fälle $a = 0$ und $a < 0$.

- Für $a = 0$ setzen wir $\delta := \varepsilon^2$, dann gilt für alle $x \geq 0$ mit $|x - 0| < \delta$

$$|g(x) - g(0)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

- Für $a > 0$ setzen wir $\delta := \varepsilon \cdot \sqrt{a}$, dann gilt für alle $x \geq 0$ mit $|x - a| < \delta$

$$|g(x) - g(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Wir haben somit für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Stetigkeitsbedingung nachgewiesen.

c) Als drittes betrachten wir die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, x + i \cdot y \mapsto x - i \cdot y$. Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Setzen wir $\delta := \varepsilon$, so gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < \delta$

$$|\overline{z} - \overline{a}| = |\overline{z - a}| = |z - a| < \delta = \varepsilon.$$

d) Abschließend betrachten wir mit

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

ein Beispiel für eine in 0 unstetige Funktion. Um nachzuweisen, dass h unstetig ist, müssen wir die Negation der Stetigkeitsbedingung zeigen, d.h.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \, \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0} \, \exists x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen dazu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und für $\delta > 0$ definieren wir $x = \frac{\delta}{2}$, dann gilt

$$|x - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x) - f(0)| = |0-1| = 1 > \varepsilon.$$

Damit ist die Funktion h nicht stetig.

Aufgabe 4.9. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihre Stetigkeit.

a) $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto c$ für ein $c \in \mathbb{C}$

b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$

c) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

d) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Wir wollen als nächstes unsere Grenzwertdefinition für Funktionen mit der für Folgen in Verbindung setzen und so einige der Aussagen, die wir für Folgen gezeigt haben auf Funktionen übertragen.

Satz 4.10 (**Folgenkriterium** für Grenzwerte von Funktionen)**.** *Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ mit Definitonsbereich $D \subset \mathbb{K}$ und einen Berührpunkt $a \in \overline{D}$ konvergiert $f(z)$ gegen ein $c \in \mathbb{K}$ für $z \to a$, genau dann wenn für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \to a$ die Folge der Funktionswerte $f(a_n)$ gegen c konvergiert.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen des Beweises getrennt.

„$\Rightarrow$“ Wir setzen voraus, dass $f(z)$ für $z \to a$ gegen c konvergiert. Für eine gegen a konvergierende Folge (a_n) in D, betrachten wir die Folge $f(a_n)$ und wollen von ihr zeigen, dass sie gegen c konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Konvergenz der Funktion f gibt es somit ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - a| < \delta$ gilt $|f(z) - c| < \varepsilon$. Wegen der Konvergenz der Folge (a_n) gibt es für diese $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \delta$, für solche a_n gilt entsprechend $|f(a_n) - c| < \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|f(a_n) - c| < \varepsilon$, d.h. die Konvergenz der Folge $(f(a_n))$ gegen c.

„$\Leftarrow$“ Wir zeigen die zweite Richtung mit einem Widerspruchsbeweis, dazu nehmen wir an, dass es keinen Grenzwert c von $f(x)$ für $x \to a$ gibt, d.h. für alle $c \in \mathbb{K}$ gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists z \in D : |z - a| < \delta \text{ und } |f(z) - c| \geq \varepsilon.$$

Für ein solches $\varepsilon > 0$ können wir also eine Folge (a_n) mit $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(a_n) - c| \geq \varepsilon$ konstruieren. Damit ist (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert, deren Funktionswert $f(a_n)$ nicht konvergieren. Dies ist der gesuchte Widerspruch zur Vorausetzung.

□

Bemerkung 4.11. Wenden wir das Folgenkriterium auf die Stetigkeitsdefinition einer Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ an, so wissen wir, dass f genau dann in $a \in D$ stetig ist, wenn für jede gegen a konvergierende Folge (a_n) in D die Folge $(f(a_n))$ gegen $f(a)$ konvergiert. Damit gilt für jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ und jede Folge (a_n) mit Grenzwert in D

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n),$$

das heißt „stetige Funktionen vertauschen mit Grenzwerten von Folgen“.
Diese Aussage wird auch als **Folgenkriterium für Stetigkeit** bezeichnet und in manchen Lehrbüchern zur *Definition* der Stetigkeit benutzt.

Wie angekündigt nutzen wir das Folgenkriterium nun um einige unserer Ergebnisse über Grenzwerte von Folgen auf Grenzwerte von Funktionen zu übertragen.

Lemma 4.12 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen)**.** *Seien $f,g : D \to \mathbb{K}$ zwei auf $D \subset \mathbb{K}$ definierte Funktionen. Für einen Berührpunkt $a \in \overline{D}$, für den beide Grenzwerte $\lim_{z\to a} f(z)$ und $\lim_{z\to a} g(z)$ existieren, gilt dann*

$$\lim_{z\to a}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z),$$

sowie die analogen Aussagen für die Differenz $f(z)-g(z)$, das Produkt $f(z)\cdot g(z)$ und den Quotienten $\frac{f(z)}{g(z)}$, falls $\lim_{z\to a} g(z) \neq 0$ zweier Funktionen.
Insbesondere sind somit für in $a \in D$ stetige Funktionen f und g auch deren Summe $f+g$, ihre Differenz $f-g$, ihr Produkt $f\cdot g$ und, falls $g(a)\neq 0$, ihr Quotient $\frac{f}{g}$ in a stetige Funktionen.

Beweis. Mit dem Folgenkriterium aus Satz 4.10 übertragen sich die Rechenregeln aus Satz 3.8 direkt, wir zeigen dies exemplarisch an der Addition:
Um den Grenzwert von $f(z)+g(z)$ für $z\to a$ zu bestimmen, betrachten wir eine beliebige gegen a konvergierende Folge (a_n), für diese wissen wir, dass die Folgen der Funktionswerte $(f(a_n))$ gegen $\lim_{z\to a} f(z)$ und $(g(a_n))$ gegen $\lim_{z\to a} g(z)$ konvergieren. Nach den Rechenregeln für Folgen konvergiert somit die Summe beider Folgen gegen $\lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z)$. Wir haben also gezeigt, dass für eine beliebige gegen a konvergierende Folge (a_n) die Folge der Funktionswerte $(f+g)(a_n)$ gegen $\lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z)$ konvergiert. Durch erneute Anwendung des Folgenkriteriums wissen wir, dass der Grenzwert $\lim_{z\to a}(f(z)+g(z))$ existiert und gerade $\lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z)$ beträgt. □

Beispiel 4.13. Wir hatten gesehen, dass die konstante Funktion und die Identität stetige Funktionen sind. Aus diesen lassen sich durch Addition und Multiplikation sämtliche Polynome zusammensetzen, so dass auch Polynome stetig sind. Außerdem sind sogenannte *rationale Funktionen*, das sind Quotienten $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ zweier Polynome p und q stetig auf ihrer Definitionsmenge $D := \{z \in \mathbb{K}; q(z) \neq 0\}$.

Als nächstes zeigen wir, dass die Verkettung $g \circ f$ von stetigen Funktionen f und g ihrerseits stetig ist.

Lemma 4.14. *Die Verkettung $g\circ f$ zweier Funktionen $f : D \to \mathbb{K}$ und $g : D \to \mathbb{K}$ mit Definitionsbereichen $D \subset \mathbb{K}$ und $D' \subset \mathbb{K}$, so dass $f(D) \subset D'$, ist stetig in einem a, wenn f in a und g in $f(a)$ stetig sind.*

Beweis. Wir wollen das Folgenkriterium aus Satz 4.10 verwenden, dafür betrachten wir eine Folge (a_n) die gegen a konvergiert. Damit wissen wir nach dem Folgenkriterium, dass die Folge $(f(a_n))$ gegen $f(a)$ konvergiert, durch eine zweite Anwendung des Folgenkriterium auf diese Folge und die in $f(a)$ stetige Funktion g gilt demnach, dass die Folge $(g(f(a_n)))$ gegen $g(f(a))$ konvergiert. Wir haben somit gezeigt, dass für eine beliebige gegen a konvergierende Folge (a_n) die Folge $(g\circ f)(a_n)$ gegen $g(f(a))$ konvergiert, nach dem Folgenkriterium ist $g\circ f$ somit stetig in a. □

Nachdem wir uns nun damit beschäftigt haben, wann eine Funktion stetig ist, wollen wir uns jetzt mit Eigenschaften stetiger Funktionen beschäftigen. Für's erste beschränken wir uns auf reelle Funktionen und zeigen, dass eine Abschätzung $f(a) < c$ für a im Definitionsbereich und eine $c \in \mathbb{R}$ sich auf eine Umgebung von a überträgt.

Lemma 4.15. *Ist eine stetige reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{K}$ in einer Stelle $a \in D$ kleiner (größer) als ein Wert $c \in \mathbb{R}$, so ist sie das auch in einer ganzen Umgebung von a.*

Beweis. Wir betrachten ein $a \in D$ und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) < c$. Dann wissen wir aufgrund der Stetigkeit von f, dass es für $\varepsilon := c - f(a) > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, insbesondere gilt somit $f(x) < f(a) + \varepsilon = f(a) + c - f(a) = c$. □

Wir wollen diese Aussage jetzt nutzen um zu zeigen, dass eine stetige reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf dem Rand des Intervalls die Werte $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, auf diesem Intervall $[a,b]$ auch alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, dass eine stetige Funktion also keine Sprung machen kann, sondern jeden solchen „Zwischenwert" annimmt.

Satz 4.16 (Zwischenwertsatz). *Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b]$ mit den Grenzen $a < b \in \mathbb{R}$ nimmt auf $[a,b]$ auch jeden Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $f(a) \leq f(b)$, und betrachten für einen Wert $c \in [f(a), f(b)]$ die Menge $M := \{x \in [a,b]; f(x) \leq c\}$. Aufgrund ihrer Definition ist M nach oben durch b beschränkt und nicht leer, da $a \in M$ liegt. Somit existiert das Supremum $s := \sup M$ von M. Dieses ist eine obere Schranke von M, das heißt

$$f(x) \leq c \quad \Rightarrow \quad x \in M \quad \Rightarrow \quad x \leq s \tag{$*$}$$

für alle $x \in [a,b]$. Wir wollen zeigen, dass $f(s) = c$, dass also das Supremum s gerade die von uns gesuchte Stelle ist, an der f den Wert c annimmt. Dazu verwenden wir einen Widerspruchsbeweis und betrachten die beiden Alternativen $f(s) < c$ und $f(s) > c$ getrennt. Nach Lemma 4.15 gibt es jeweils eine δ-Umgebung von s für die diese Ungleichung jeweils ebenfalls gilt.

- Für $f(s) < c$ ist somit $x := s + \frac{\delta}{2} > s$ und $f(x) < c$ im Widerspruch dazu, dass das Supremum s eine obere Schranke von M ist.
- Für $f(s) > c$ liegen alle $x \in M$ außerhalb der δ-Umgebung von s. Nach $(*)$ wissen wir außerdem, dass $x \leq s$ gilt, so dass sogar $x \leq s - \delta$ im Widerspruch dazu, dass das Supremum s die kleinste obere Schranke ist.

□

Aufgabe 4.17 (Knobelaufgabe)**.** Zeigen Sie:

a) Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ auf einem Intervall $[a,b]$ hat mindestens einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [a,b]$, so dass $f(x) = x$.

b) Für eine periodische, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Stelle $a \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) = f(a + \frac{1}{2})$. (Betrachten wir zum Beispiel die Temperatur T am Äquator als Funktion der geographischen Länge, so können wir aus dieser Aussage ableiten, dass es zwei gegenüberliegende Punkte gibt an denen die selbe Temperatur herrscht.)

Hinweis: Betrachten Sie in Teil a) die Funktion $g(x) := f(x) - x$ an den Rändern des Intervalls.

Wir haben im vorherigen Kapitel definiert, was wir unter einer beschränkten Folge $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ verstehen, wir wollen diese Definition nun auf Funktionen $D \to \mathbb{K}$ mit einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{K}$ in den reellen oder komplexen Zahlen übertragen.

Definition 4.18. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{K}$ nennen wir **beschränkt**, wenn das Bild $f(D) \subset \mathbb{K}$ von D unter f beschränkt ist. Für reellwertige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ können wir dabei außerdem zwischen von unten und von oben beschränkt unterscheiden.

Lemma 4.19. *Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b]$ mit den Grenzen $a < b \in \mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Wir skizzieren an dieser Stelle nur die Beweisidee: nehmen wir an, dass $f([a,b])$ unbeschränkt ist, so können wir eine Folge (x_n) so konstruieren, dass $f(x_n) \geq n$. Aus dieser Folge (x_n) auf dem Intervall $[a,b]$ lässt sich jetzt eine „Teilfolge" auswählen, die gegen ein $x \in [a,b]$ konvergiert. Nach dem Folgenkriterium konvergieren damit die Funktionswerte dieser „Teilfolge" $f(x_n)$ gegen $f(x)$, was im Widerspruch zur Konstruktion von (x_n) steht. Die Existenz einer solchen „Teilfolge" ist die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß mit dem wir uns im vorherigen Kapitel nicht beschäftigt haben.

Bemerkung 4.20. Für nicht-abgeschlossene Intervalle ist dies nicht richtig, wie wir an $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $(0,1]$ sehen können.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass das Bild $f([a,b])$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a,b]$ unter einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht nur beschränkt ist und damit sein Supremum und sein Infimum existieren, sondern diese sogar auf $[a,b]$ von f angenommen werden. Somit ist das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion selbst wieder ein Intervall.

Satz 4.21. *Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b]$ mit den Grenzen $a < b \in \mathbb{R}$ nimmt Maximum und Minimum an.*

Die Beweisidee ist erneut geschickt eine Folge (x_n) auf dem Intervall $[a,b]$ zu konstruieren, deren Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $\sup f([a,b])$ konvergieren und zu zeigen, dass aus dieser eine „Teilfolge" ausgewählt werden kann deren Grenzwert x in $[a,b]$ liegt, der Grenzwert der Funktionswerte dieser „Teilfolge" ist $\sup f([a,b])$, so dass das Supremum von f angenommen wird.

Definition 4.22 (Monotonie)**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ nennen wir **monoton wachsend** (bzw. **monoton fallend**), wenn für alle $x_1 < x_2 \in D$ gilt, dass $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$). Gilt sogar die strikte Ungleichung $<$ (bzw. $>$) so sprechen wir von **streng monoton wachsend** (bzw. **streng monoton fallend**).

Satz 4.23 (Existenz und Stetigkeit von Umkehrfunktionen)**.** *Eine streng monoton wachsende, stetige Funktion $f : [a,b] \to [c,d]$ auf dem Intervall $[a,b]$ mit den Grenzen $a < b \in \mathbb{R}$ und $f(a) = c$ sowie $f(b) = d$ ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.*

4.1 Stetigkeit von Potenzreihen

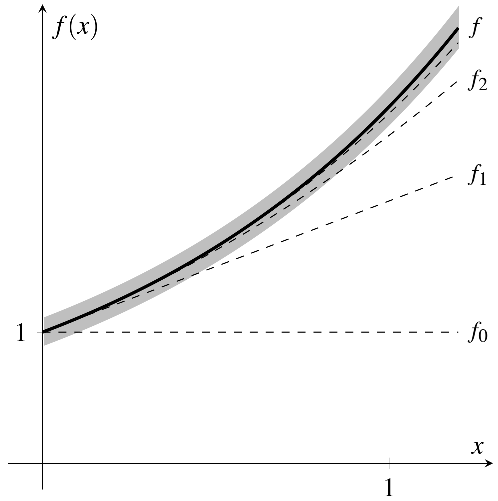
Als nächstes widmen wir uns wieder Funktionen, die als Grenzwert einer Potenzreihe definiert sind. Wir stellen zunächst fest, dass Partialsummen einer Potenzreihe Polynome und damit stetige Funktionen sind. Wir wollen nun untersuchen unter welchen Bedingungen sich die Stetigkeit der Partialsummen auf den Grenzwert überträgt. Allgemein formuliert betrachten wir eine Folge (f_n) von stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ mit der gemeinsamen Definitionsmenge $D \subset \mathbb{K}$, so dass für alle $x \in D$ der Grenzwert

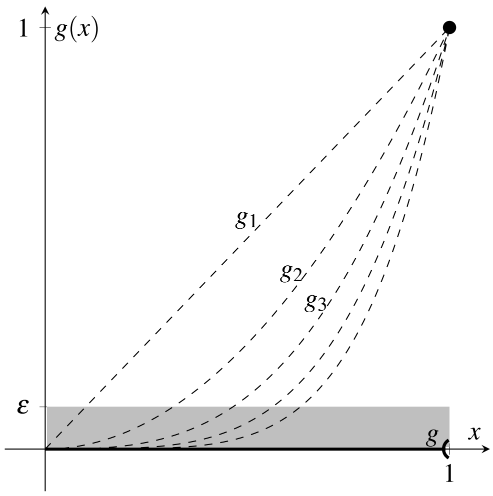
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert und fragen uns, ob die so definierte Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ stetig ist.
Zunächst stellen wir fest, dass die Folge (f_n) mit $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ den stetigen Grenzwert $f(x) = \exp(x)$ besitzt, an dieser Stelle greifen wir auf unser Schulwissen zurück; einen formalen Beweis für die Stetigkeit der Exponentialfunktion liefern wir direkt im Anschluss an diese Betrachtung. Unsere Hoffnung, dass zumindest einige Potenzreihen stetig sind, scheint also berechtigt. Andererseits hat die konvergente Folge (g_n) mit $g_n(x) := x^n$ den Grenzwert

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

von dem wir direkt sehen, dass dieser unstetig ist. Es scheinen also nicht alle Folgen stetiger Funktionen auch einen stetigen Grenzwert zu haben.





Der Unterschied zwischen den beiden Funktionenfolgen lässt sich mit der folgenden Definition formal fassen.

Definition 4.24 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ mit der gemeinsamen Definitionsmenge $D \subset \mathbb{K}$ nennen wir **Funktionenfolge**.
Wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ für alle $x \in D$ existiert, d.h.

$$\forall x \in D \, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

nennen wir die Funktionenfolge (f_n) **punktweise konvergent** gegen f. Das n_0 kann dabei abhängig vom betrachteten Punkt x gewählt werden. Lässt sich n_0 sogar unabhängig von der betrachteten Stelle wählen, d.h.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall x \in D \, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

so nennen wir die Funktionenfolge (f_n) **gleichmäßig konvergent** gegen f.

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt die dargestellen Funktionenfolgen (f_n) und (g_n), so können wir feststellen, dass die Partialsummen der Exponentialfunktion gleichmäßig konvergieren, wir zeigen dies im nächsten Satz. Dagegen konvergiert die Funktionenfolge (g_n) zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig. Anschaulich gesprochen ist das Problem, dass die Funktionenfolge (g_n) zu 1 hin immer steiler wird, so dass wir kein gemeinsames n_0 für alle $x \in [0,1]$ angeben können. An dieser Stelle belassen wir es bei dieser anschaulichen Erklärung.

Aufgabe 4.25. Betrachte Sie die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ und zeigen Sie, dass diese gleichmäßig gegen Betragsfunktion $f : x \mapsto |x|$ konvergiert.

Satz 4.26 (Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen)**.** *Ein Potenzreihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r ist gleichmäßig konvergent auf jeder Menge der Form*

$$K_R := \{x \in \mathbb{K}; |x| \leq R\} \qquad \text{für } 0 \leq R < r.$$

Der zentrale Satz dieses Abschnitts ist nun der folgende:

Satz 4.27. *Der Grenzwert $f : D \to \mathbb{K}$ einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge (f_n) stetiger Funktionen auf $D \subset \mathbb{K}$ ist stetig.*

Beweis. Wir zeigen die Stetigkeit von f, indem wir die Bedingung aus Definition 4.6 nachweisen. Wir nutzen dabei aus, dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert und, dass jedes Folgenglied f_n stetig ist. Seien $\varepsilon > 0$ und $a \in D$ beliebig. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gibt es somit ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D. \tag{1}$$

Außerdem ist f_n stetig, so dass es ein $\delta > 0$ gibt, für das für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

gilt. Insgesamt gilt demnach für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (2)}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Damit folgt indirekt, dass die Folge (g_n) mit $g_n(x) := x^n$ nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ konvergieren kann, da ihr Grenzwert nicht stetig ist. Andererseits wissen wir mit diesen beiden Theoremen für die Exponentialfunktion, dass sie als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge stetiger Funktionen stetig ist. Verbinden wir die beiden Theoreme so können wir allgemein für Potenzreihen festhalten:

Satz 4.28 (Stetigkeit von Potenzreihen)**.** *Eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r ist auf $M = \{x \in \mathbb{K}; |x| < r\}$ stetig.*

Beweis. Sei $a \in M$ beliebig. Da $|a| < r$ gibt es ein $R \in \mathbb{R}$, so dass $|a| < R < r$. Für dieses R ist die Potenzreihe auf $K_R = \{x \in \mathbb{K}; |x| < R\}$ der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Partialsummen und damit nach Satz 4.27 stetig. □

4.2 Spezielle Funktionen

Wir hatten am Ende des letzten Kapitels angefangen einige spezielle Potenzreihen, wie die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen näher zu untersuchen, wir greifen dies nun mit unserer neugewonnen Kenntnis zur Stetigkeit von Potenzreihen wieder auf. Wir beginnen mit einer ausführlicheren Betrachtung der Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \text{ für } z \in \mathbb{K}.$$

Wir halten zunächst einige Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$ fest, bevor wir uns später der komplexen Exponentialfunktion zuwenden.

Satz 4.29 (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion)**.** *Für die reelle Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gilt:*

a) *Die reelle Exponentialfunktion ist positiv, d.h.* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

b) *Die reelle Exponentialfunktion* exp *ist streng monoton wachsend mit den Grenzwerten* $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ *und* $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$*; insbesondere ist das Bild der reellen Exponentialfunktion* $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$.

c) *Für $x \to \infty$ wächst die Exponentialfunktion schneller als jede Potenz, d.h.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und verschwindet schneller als jede Potenz für $x \to -\infty$, d.h.

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

a) Für $x \geq 0$ folgt direkt aus der Definition, dass die Exponentialfunktion positiv ist. Für $x < 0$ erhalten wir mit Hilfe der Funktionalgleichung $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1$, so dass

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

Aus $x < 0$ folgt sofort $-x > 0$, so dass mit dem ersten Teil unserer Begründung $\exp(-x) > 0$ ist und damit ebenfalls $\exp(x)$.

b) Auch die Monotonie folgt direkt aus der Funktionalgleichung. Um dies zu sehen, betrachten wir zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $x < y$, dann gilt

$$\exp(y) = \exp(x - x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y - x) = \exp(x) \cdot (1 + (x - y) + \frac{(x-y)^2}{2!} + \cdots) > \exp(x).$$

Wir leiten die Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ nicht extra her, diese folgen als Spezialfälle der nächsten Aussage für $n = 0$.

c) Wir betrachten zunächst den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für $x \geq 0$ folgt aus der Reihendarstellung

$$\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ und damit } \frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}.$$

So dass wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!}$ auch $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n}$ gilt. Durch den Übergang von x zu $-x$ erhalten wir daraus

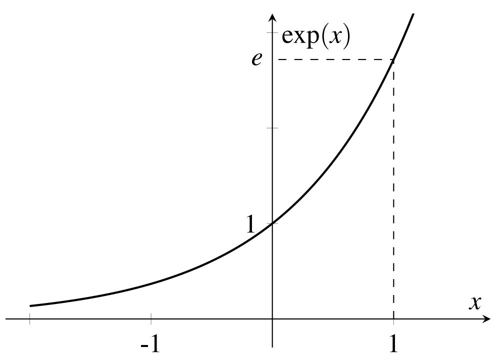
$$\lim_{n\to-\infty} x^n \exp(x) = \lim_{x\to\infty} (-x)^n \exp(-x) = (-1)^n \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \frac{(-1)^n}{\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n}}_{=\infty}} = 0.$$

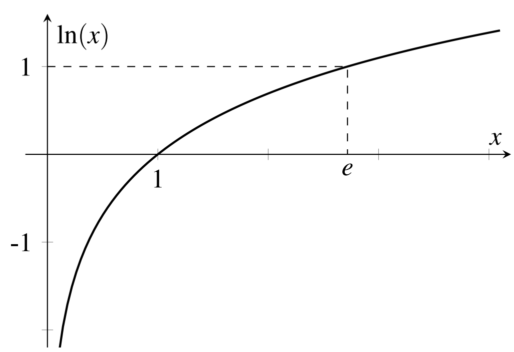
□

Damit haben wir von der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gezeigt, dass sie stetig und streng monoton wachsend ist. Nach Satz 4.23 existiert damit auf jedem Intervall eine stetige und streng monoton steigende Umkehrfunktion.

Definition 4.30 (Logarithmus)**.** Wir bezeichnen die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ als (natürliche) **Logarithmusfunktion**

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x).$$





Wir können aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion direkt einige Eigenschaften der Logarithmusfunktion herleiten.

Bemerkung 4.31 (Eigenschaften der Logarithmusfunktion).

a) ln ist stetig und streng monoton wachsend nach Satz 4.23.

b) $\ln(1) = 0$

c) Wenden wir die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ auf die Logarithmusfunktion an, so erhalten wir

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y$$

und können durch Logarithmieren eine **Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion**

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}.$$

herleiten.

d) Aus den Grenzwerten aus Satz 4.29 erhalten wir durch Vertauschen von Definitions- und Wertemenge die Grenzwerte der Logarithmusfunktion $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ und $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

e) Wir können zudem aus den Grenzwerten der Exponentialfunktion in Satz 4.29 ableiten, dass für $x \to \infty$ und $x \to 0$ die Logarithmusfunktion langsamer wächst als jede Potenz, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$\text{und } \lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir können jetzt mit Hilfe der Logarithmusfunktion allgemeine Potenzen definieren.

Definition 4.32 (Allgemeine Potenzen)**.** Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Potenz**

$$x^a := \exp(a \ln(x)).$$

Wir bezeichnen x als die **Basis** und a als den **Exponenten** der Potenz x^a.

Wir können diese Definition mit der folgenden Rechnung motivieren. Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aus der Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion

$$\ln(x^n) = \ln(x \cdot \cdots \cdot x) = \ln(x) + \cdots \ln(x) = n \ln(x).$$

Setzen wir auch für reelle Exponenten $a \in \mathbb{R}$ diese Beziehung $\ln(x^a) = a \ln(x)$ voraus, so ergibt sich die zur Definition von x^a genutzte Beziehung

$$x^a = \exp(\ln(x^a)) = \exp(a \ln(x)).$$

Aus dieser Definition können wir jetzt die bekannten Rechenregeln für Potenzen herleiten.

Lemma 4.33 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.*

a) $x^0 = 1$ *und* $x^1 = x$.

b) $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$ *und* $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.

c) $x^{ab} = (x^a)^b$ *und* $(xy)^a = x^a \cdot y^a$.

Beweis.

a) $x^0 = \exp(0 \ln(x)) = \exp(0) = 1$ und $x^1 = \exp(1 \ln(x)) = \exp(\ln(x)) = x$.

b) Durch Anwenden der Funktionalgleichung erhalten wir

$$x^{a+b} = \exp((a+b) \ln(x)) = \exp(a \ln(x) + b \ln(x)) = \exp(a \ln(x)) \cdot \exp(b \ln(x)) = x^a \cdot x^b.$$

Setzen wir $b = -a$ in diesem Ausdruck ein, so ergibt sich $1 = x^0 = x^a \cdot x^{-a}$ und damit $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.

c) Betrachten $(x^a)^b$ und setzen zweimal die Definition der Potenz ein, so ergibt sich

$$(x^a)^b = \exp(b\ln(x^a)) = \exp(b\ln(\exp(a\ln(x))) = \exp(ab\ln(x)) = x^{ab}.$$

Durch Anwenden beider Funktionalgleichungen, die der Exponentialfunktion und die der Logarithmusfunktion, erhalten wir

$$(xy)^a = \exp(a\ln(xy)) = \exp(a(\ln(x)+\ln(y))) = \exp(a\ln(x))\cdot\exp(a\ln(y)) = x^a\cdot y^a.$$

$\square$

Bemerkung 4.34.

a) Insbesondere folgt aus den Rechenregeln in Lemma 4.33 für $n \in \mathbb{N}$

$$x^n = x^{1+\cdots+1} = \underbrace{x\cdot\cdots\cdot x}_{n-\text{mal}} \text{ und } x^{-n} = x^{-1-\cdots-1} = \underbrace{\frac{1}{x}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x}}_{n-\text{mal}}$$

so dass unsere „alte“ Definition der Potenz aus Notation 2.10 mit der neuen übereinstimmt.
Außerdem können wir aus den Rechenregeln herleiten, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^n$ ist. Damit ist $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ gerade die in Kapitel 2 eingeführte Wurzelfunktion.

b) Wir definieren die **Eulersche Zahl** $e := \exp(1) = 2{,}718281828459\ldots$ als den Wert, den die Exponentialfunktion an der Stelle 1 annimmt. Mit dieser können wir die Exponentialfunktion wie folgt umschreiben

$$e^a = \exp(a\ln(e)) = \exp(a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

In der Physik wird in aller Regel diese Notation für die Exponentialfunktion verwendet und wir werden das ab dieser Stelle ebenfalls tun.

c) Die Potenzfunktion x^a ist als Funktion von x, d.h. $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$, und als Funktion von a, d.h. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto x^a \exp(a\ln(x))$ stetig, da nach Lemma 4.14 die Verkettung der stetigen Exponentialfunktion und der stetigen Logarithmusfunktion bzw. der stetigen linearen Funktion ebenfalls stetig ist.

d) Da die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion streng monoton wachsend sind, gilt:
   - Die Potenzfunktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^a$ ist für $a > 0$ streng monoton wachsend und für $a < 0$ streng monoton fallend.
   - Die Potenzfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto x^a$ ist für $x > 1$ streng monoton wachsend und für $x < 1$ streng monoton fallend.

Aufgabe 4.35. Benutzen Sie die Definition der allgemeinen Potenzfunktion um den Grenzwert der Funktion $f : x \mapsto x^x$ für $x \to 0$ zu bestimmen.

Aufgabe 4.36. Benutzen Sie die Definition der allgemeinen Potenzfunktion um den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) := \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zu berechnen. Ist diese Folge auch gleichmäßig konvergent?

Nach unserer Betrachtung der reellen Exponentialfunktion wenden wir uns jetzt der komplexen Exponentialfunktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ zu und leiten einige wichtige Eigenschaften aus der Definition her.

Lemma 4.37 (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion)**.**

a) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

b) $|e^{i\alpha}| = 1$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis.

a) Für die Partialsummen $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ der Exponentialfunktion folgt sofort $f_n(\bar{z}) = \overline{f_n(z)}$ durch fortgesetztes Anwenden von Lemma 2.47. Wir können jetzt das Folgenkriterium für Stetigkeit aus Bemerkung 4.11 verwenden um zu zeigen

$$e^{\bar{z}} = \lim_{n\to\infty} f_n(\bar{z}) = \lim_{n\to\infty} \overline{f_n(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} f_n(z)} = \overline{e^z}.$$

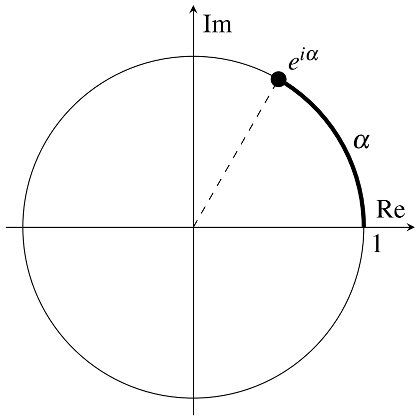
b) Mit der alternativen Darstellung des Betrags $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ und a) ergibt sich direkt

$$|e^{i\alpha}| = \sqrt{e^{i\alpha} \cdot \overline{e^{i\alpha}}} = \sqrt{e^{i\alpha} \cdot e^{\overline{i\alpha}}} = \sqrt{e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha}} = \sqrt{e^{i\alpha - i\alpha}} = \sqrt{e^0} = 1$$

□

Bemerkung 4.38. Nach Lemma 4.37 b) liegt $e^{i\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem komplexen Einheitskreis. Multiplizieren wir zwei solche Zahlen $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ miteinander, so ergibt sich aus der Funktionalgleichung

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

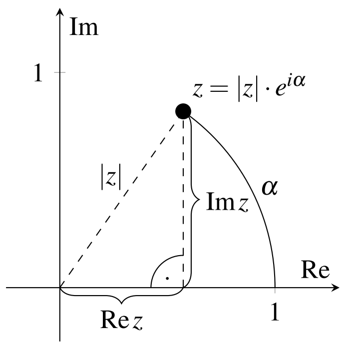


Bei einer Multiplikation der beiden Zahlen addieren sich also die Argumente der Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument. Wir können damit nachträglich unsere erste durch „Schulmathematik“ motivierte Definition der Polardarstellung einer komplexen Zahl

$$z = |z| \cdot e^{i\alpha}$$

für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ formal rechtfertigen.
Dieser Winkel ist gerade die in der Abbildung dick eingezeichnete Länge des Kreisbogens, den wir als **Bogenmaß** bezeichnen. Im Rahmen dieser Vorlesung verzichten wir auf einen formalen Beweis und verweisen auf weiterführende Mathematikvorlesungen. Als nächstes wollen wir zeigen, dass aus der Definition der trigonometrischen Funktionen Cosinus cos und Sinus sin als Potenzreihen die aus der Schule bekannten Zusammenhänge für rechtwinklige Dreiecke folgen:

$$\text{„}\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\text{“}$$
$$\text{und „}\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\text{“}$$



Aus unserer Darstellung einer komplexen Zahl $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$ in Polarkoordinaten entnehmen wir, dass die Länge der Ankathete des Winkels α gerade $\operatorname{Re} z$, die Länge der Gegenkathete gerade $\operatorname{Im} z$ und die Länge der Hypotenuse $|z|$ ist. Die Seitenverhältnisse von Ankathete zu Hypotenuse bzw. Gegenkathete zu Hypotenuse sind damit

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(|z| \cdot e^{i\alpha})}{|z|} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) = \cos(\alpha)$$
$$\text{bzw. } \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(|z| \cdot e^{i\alpha})}{|z|} = \operatorname{Im} e^{i\alpha} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = \sin(\alpha).$$

Wobei wir im letzten Schritt unsere alternative Darstellung von Sinus und Cosinus aus Lemma 3.31

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

genutzt haben. Für reelle Argumente $\alpha \in \mathbb{R}$ können wir diese wie oben genutzt auch schreiben als

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) = \operatorname{Re} e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = \operatorname{Im} e^{i\alpha}. \tag{$*$}$$

Nachdem wir nachgewiesen haben, dass die Potenzreihen, die wir als Sinus und Cosinus definiert haben, diese wesentliche Eigenschaft haben, wollen wir uns jetzt mit einige weiteren ihrer Eigenschaften beschäftigen.

Satz 4.39 (Eigenschaften von Sinus und Cosinus)**.** *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ *und* $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$*, „der Graph von Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung“ und „der Graph von Cosinus ist achsensymmetrisch zur Abszisse“.*

b) $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$, *so dass insbesondere* $\sin(\alpha) \leq 1$ *und* $\cos(\alpha) \leq 1$.

c) **(Additionstheoreme)**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Beweis.

a) Wir können mit der Darstellung der Sinusfunktion für reelle Argumente direkt nachrechnen

$$\sin(-\alpha) = \frac{1}{2i}\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = -\sin(\alpha).$$

Die Aussage für die Cosinusfunktion cos folgt völlig analog.

b) Dies ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 4.37.

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 \overset{(*)}{=} (\operatorname{Im} e^{i\alpha})^2 + (\operatorname{Re} e^{i\alpha})^2 = |e^{i\alpha}|^2 = 1.$$

c) Um die Additionstheoreme nachzuweisen nutzen wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \\ &= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right).\end{aligned}$$

Die Additionstheoreme für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ ergeben sich jetzt gerade durch Vergleich der Real- und Imaginärteile. Die entsprechenden Aussagen für $\cos(\alpha-\beta)$ und $\sin(\alpha-\beta)$ erhalten wir indem wir β durch $-\beta$ ersetzen und die Symmetrieeigenschaften aus a) verwenden.

$\square$

Die weiteren aus der Schule bekannten Eigenschaften, wie $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und die Periodizität von Sinus und Cosinus, wollen wir jetzt formal herleiten. Dazu halten wir zunächst fest $\cos(0) = \operatorname{Re} e^{i\cdot 0} = 1 > 0$. Unsere Idee ist es nun zu zeigen, dass $\cos(\alpha) < 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, so dass es nach dem Zwischenwertsatz eine Stelle gibt, an der die Cosinusfunktion 0 wird. Wir betrachten $\alpha = 2$, für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{\alpha^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} = \frac{\alpha^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{\alpha^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)} \leq \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{2^2}{3\cdot 4} < \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}. \tag{$*$}$$

Damit können wir die Reihe für $\alpha = 2$ wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \left(\frac{\alpha^6}{6!} - \frac{\alpha^8}{8!}\right) - \left(\frac{\alpha^{10}}{10!} - \frac{\alpha^{12}}{12!}\right) + \cdots \\ &\overset{(*)}{<} 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \\ &= 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} \\ &= -\frac{1}{3} < 0\end{aligned}$$

Nach Zwischenwertsatz existiert damit eine Stelle $\xi \in [0,2]$ für die $\cos(\xi) = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass diese eindeutig ist. Dazu verwenden wir, dass $\sin(\alpha) > 0$ für $\alpha \in (0,2]$, dies lässt sich analog zu unser Betrachtung von Cosinus zeigen und ist dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Aufgabe 4.40. Zeigen Sie, dass $\sin(\alpha) > 0$ für $\alpha \in (0,2]$.

Um zu zeigen, dass die Nullstelle ξ des Cosinus auf $(0,2)$ eindeutig ist, zeigen wir, dass die Cosinusfunktion $\alpha \mapsto \cos(\alpha)$ auf diesem Intervall streng monoton fallend ist. Wir betrachten dazu $\alpha < \beta \in [0,2]$ und verwenden die Additionstheorem für die Cosinusfunktion

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) \\
&= \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) - \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
&= \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) - 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
&= \cos(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) - 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
&= \cos(\beta) - 2\sin(\underbrace{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\in(0,2)})\sin(\underbrace{\frac{\alpha-\beta}{2}}_{\in(0,2)}) \\
&< \cos(\beta)
\end{aligned}$$

Damit ist die Nullstelle des Cosinus auf $(0,2)$ eindeutig und wir können die Zahl π damit wie folgt *definieren*.

Definition 4.41. Wir definieren π als das Doppelte der (eindeutigen) Nullstelle der Cosinusfunktion $\alpha \mapsto \cos(\alpha)$ im Intervall $(0,2)$.

Wir jetzt in der Lage die in der folgenden Tabelle gegebenen Werte für Sinus und Cosinus zu bestimmen.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(\alpha)$	1	0	-1	0	1
$\sin(\alpha)$	0	1	0	-1	0

Aus $1 = e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i\sin(0)$ hatten wir bereits abgelesen, dass $\cos(0) = 1$ gilt. Durch Vergleich der Imaginärteile erhalten wir ebenfalls direkt $\sin(0) = 0$. Mit der Definition von π folgt außerdem

$$(\sin(\frac{\pi}{2}))^2 = 1 - (\cos(\frac{\pi}{2}))^2 = 1 - 0 = 1,$$

so dass mit $\frac{\pi}{2} \in (0,2)$ und $\sin(\alpha) > 0$ für $\alpha \in (0,2]$ die Wurzel gerade $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ liefert. Die weiteren Werte können wir exemplarisch für $\sin(\frac{\pi}{2})$ und $\cos(\pi)$ gezeigt berechnen

$$\cos(\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1.$$

Aufgabe 4.42. Machen Sie sich mit dem Additionstheoremen vertraut indem Sie die die Werte aus der angegebenen Tabelle für $\sin(\pi)$ und $\cos(\frac{3\pi}{2})$ nachrechnen.

Aus der Schule ist ebenfalls bekannt, dass Sinus und Cosinus 2π-periodisch sind, mit der Tabelle sind wir in der Lage dies einfach zu zeigen.

Satz 4.43 (Periodizität von Sinus und Cosinus)**.** *Sinus und Cosinus sind* 2π*-periodisch, d.h. es gilt* $\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha)$ *und* $\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Aus der Tabelle entnehmen wir die Werte $\cos(2\pi) = 1$ und $\sin(2\pi) = 0$. Mit den Additionstheoremen ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+2\pi) &= \cos(\alpha)\cos(2\pi) - \sin(\alpha)\sin(2\pi) = \cos(\alpha)\cdot 1 - \sin(\alpha)\cdot 0 = \cos(\alpha) \\
\text{und } \sin(\alpha+2\pi) &= \sin(\alpha)\cos(2\pi) + \sin(\alpha)\cos(2\pi) = \sin(\alpha)\cdot 1 + \cos(\alpha)\cdot 0 = \sin(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.44. *Für* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist* $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$ *und* $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$.

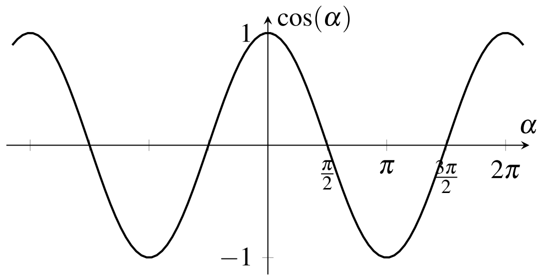
Beweis. Aus der Tabelle entnehmen wir die Werte $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Mit den Additionstheoremen ergibt sich somit

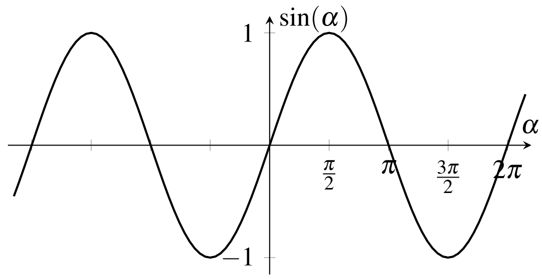
$$\begin{aligned}
\cos(\pi-\alpha) &= \cos(\pi)\cos(\alpha) + \sin(\pi)\sin(\alpha) = -1\cdot\cos(\alpha) - 0\cdot\sin(\alpha) = -\cos(\alpha) \\
\text{und } \sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) &= \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\alpha) \pm \cos(\frac{\pi}{2})\sin(\alpha) = 1\cdot\cos(\alpha) + 0\cdot\sin(\alpha) = \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.45. Benutzen Sie $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ um $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ zu zeigen und den Wert, den die beiden trigonometrischen Funktionen an dieser Stelle haben, zu berechnen.

Mit unserer Vorarbeit zu den trigonometrischen Funktionen sin und cos können wir diese jetzt einmal darstellen.





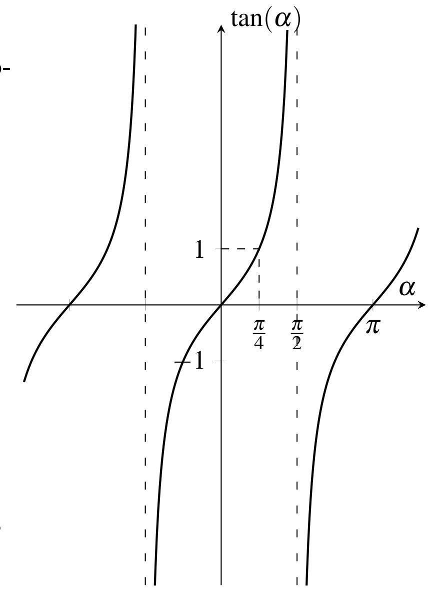
Entsprechend können wir, wie es in der Schule getan wird, den Tangens definieren.

Definition 4.46. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\alpha) \neq 0$, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$, nennen wir

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

den **Tangens** von α.

Bemerkung 4.47 (Eigenschaften des Tangens). Die wesentlichen Eigenschaften des Tangens ergeben sich unmittelbar aus denen von Sinus und Cosinus.



a) Im Definitionsbereich ist der Tangens als Quotient stetiger Funktionen seinerseits stetig.

b) Der Tangens ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha),$$

und π-periodisch

$$\tan(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \tan(\alpha),$$

c) Wir können die folgenden Werte des Tangens

$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0, \tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = 1 \text{ und } \lim_{\substack{\alpha \to \frac{\pi}{2} \\ \alpha < \frac{\pi}{2}}} \tan(\alpha) = \infty$$

bestimmen.

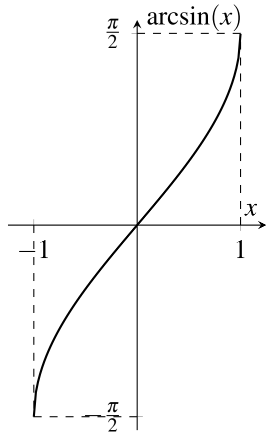
Abschließend führen wir die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen ein. Wir können diese auf jeden Intervall, in dem die betrachtete Funktion streng monoton und damit injektiv ist, definieren. Wir haben hier jeweils die Intervalle, welche die 0 enthalten, gewählt.

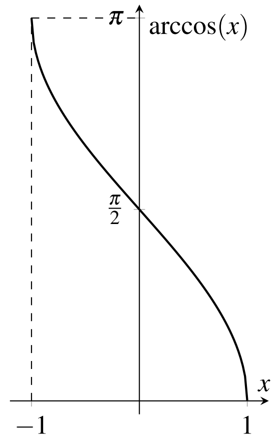
Definition 4.48 (Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen)**.**

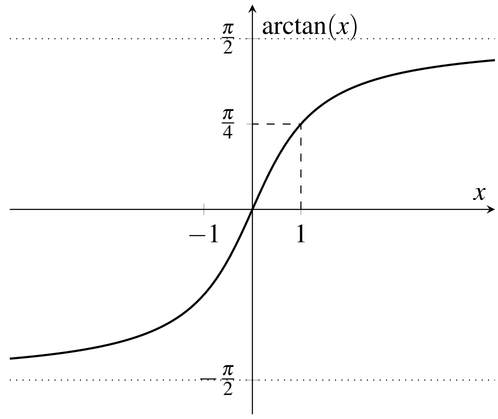
a) Die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ nennen wir **Arkussinus** $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$ nennen wir **Arkuscosinus** $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$.

c) Die Umkehrfunktion von $\tan : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ nennen wir **Arkustangens** $\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.







Aufgabe 4.49. Neben den trigonometrischen Funktionen spielen auch die hyperbolischen Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

eine wichtige Rolle. Machen Sie sich mit diesen beiden Funktionen vertraut indem Sie die folgenden Eigenschaften zeigen.

a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ und $\cosh(-x) = \cosh(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, „der Graph vom reellen Sinus Hyperbolicus ist punktsymmetrisch zum Ursprung“ und „der Graph vom reellen Cosinus Hyperbolicus ist achsensymmetrisch zur Abszisse“.

b) $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

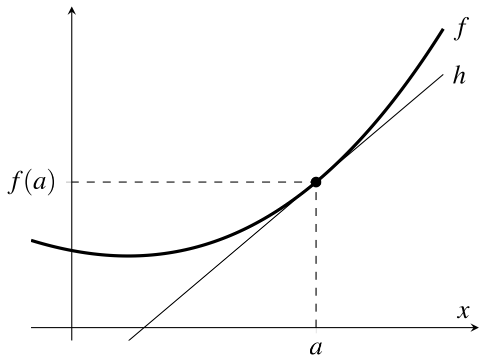
c) (Additionstheoreme) Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cosh(z \pm z') = \sinh(z)\cosh(z') \pm \cosh(z)\sinh(z')$$
$$\cosh(z \pm z') = \cosh(z)\cosh(z') \pm \sinh(z)\sinh(z').$$

d) Die reelle Sinus Hyperbolicus Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sinh(x)$ ist streng monoton wachsend.

5 Differentialrechnung

Als nächstes kommen wir zu einem der wichtigsten Themen der Analysis, der sogenannten Differentialrechnung. Ziel der Differentialrechnung ist es eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ lokal, das heißt in einer Umgebung um einen Punkt $a \in D$, zu untersuchen. Dazu *approximieren* wir die Funktion f im Punkt a *linear*, das heißt wir versuchen eine Grade zu finden, die f in einer kleinen Umgebung von a möglichst gut annähert. Dies ist in der Praxis immer dann wünschenswert, wenn wir die Funktion f nur in der Nähe von a benötigen, dann lässt sich im Allgemeinen die lineare Näherung sehr viel leichter untersuchen als die ursprüngliche Funktion f.



Bevor wir die formalen Definition einführen, wollen wir diese zunächst motivieren, dazu stellen wir zunächst fest, dass die Grade h aus der Abbildung durch den Punkt $(a, f(a))$ verläuft und muss damit von der Form $h(x) = f(a) + c(x-a)$ mit der *Steigung* $c \in \mathbb{R}$ sein. Um die Steigung c zu bestimmen nutzen wir, dass h in einer Umgebung von a ungefähr f entspricht, wir schreiben dies als

$$f(x) \approx h(x) = f(a) + c(x-a).$$

Die Steigung c können wir demnach durch

$$c \approx \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

approximieren. Die „Qualität" der Approximation $f(x) \approx h(x)$ ist in der „Nähe" von a sicherlich besser als weiter davon entfernt und wird im Grenzwert $\lim_{x\to a} h(x) = f(a)$ sogar exakt, entsprechend definieren wir die „Steigung" einer Funktion wie folgt.

Definition 5.1. Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine auf $D \subset \mathbb{K}$ definierte Funktion.

a) Wir nennen f **differenzierbar** in $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

in $\mathbb{K}$ existiert. Wir bezeichnen $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ als **Differenzenquotienten** und den Grenzwert $f'(a)$ als **Differentialquotient** oder **Ableitung** von f in a.

b) Wir nennen f differenzierbar (auf D), wenn f differenzierbar in jedem Punkt $a \in D$ ist. In diesem Fall können wir eine Funktion $f' : D \to \mathbb{K}, x \mapsto f'(x)$ definieren. Wir bezeichnen diese als Ableitungsfunktion oder kurz Ableitung.

Bevor wir uns mit einigen Eigenschaften des Differentialquotienten beschäftigen, errechnen wir diesen zunächst für einige Beispiele.

Beispiel 5.2.

a) Betrachten wir zunächst die konstante Funktion $f : D \to \mathbb{K}, x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{K}$. Für ein beliebiges $a \in D$ erhalten wir den Differentialquotienten

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = 0.$$

Damit ist die konstante Funktion differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$.

b) Genauso können wir zeigen, dass die Identität $g : D \to \mathbb{K}, x \mapsto x$ differenzierbar ist und dass der Differentialquotient
$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1.$$
ebenfalls unabhängig von $a \in D$ ist.

c) Als drittes Beispiel betrachten wir die Wurzelfunktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{K}, x \mapsto \sqrt{x}$ ansehen. Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erhalten wir
$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} & \text{falls } a > 0 \\ \infty & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$
Demnach ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit der Ableitung $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und nicht differenzierbar in 0.

Aufgabe 5.3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihre Differenzierbarkeit, betrachten Sie dazu den Grenzwert aus der Definition.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ und c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

Hinweis: Verwenden Sie eine Polynomdivision um den Grenzwert in c) zu bestimmen.

Alle Funktionen, die wir uns in Beispiel 5.2 und Aufgabe 5.3 angesehen haben, sind Beispiele für stetige Funktionen. Wir wollen als nächstes zeigen, dass dies kein Zufall war, sondern die Stetigkeit eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion ist.

Lemma 5.4. *Jede in einem Punkt differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.*

Beweis. Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine auf $D \subset \mathbb{K}$ definierte und in $a \in D$ differenzierbare Funktion. Wir wollen nachweisen, dass für $a \in D$ der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ gerade $f(a)$ ist. Dazu berechnen wir den Grenzwert
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \big(f(x)-f(a)+f(a)\big) = \lim_{x\to a} \Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\to 0} + f(a)\Big) = f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a).$$
□

Anschließend wollen wir zeigen, dass sich genau wie für Stetigkeit auch die Differenzierbarkeit von Funktionen auf deren Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten überträgt.

Satz 5.5 (Rechenregeln für Ableitungen)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{K}$ zwei auf $D \subset \mathbb{K}$ definierte und in $a \in D$ differenzierbare Funktionen.*

a) *Die Funktion $f \pm g$ ist differenzierbar in a mit Ableitung $(f \pm g)'(a) = (f' \pm g')(a)$.*

b) **(Produktregel)** *Die Funktion fg ist differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$.*

c) **(Quotientenregel)** *Ist $g(a) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)(a)$.*

Beweis. Wir verwenden in allen Teilen die Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.12.

a) Für den Differentialquotienten der Summe bzw. Differenz zweier Funktionen f und g erhalten wir
$$(f \pm g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) \pm g(x) - (f(a) \pm g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \pm \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} = (f' \pm g')(a).$$

b) Aus Lemma 5.4 wissen wir, dass die in a differenzierbare Funktion g auch stetig in a ist, so dass der Grenzwert $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ ist, damit können wir den Differentialquotienten bestimmen
$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(a)} + f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \\
&= (f'g + fg')(a).
\end{aligned}$$

c) Wir nutzen wie in b) die Stetigkeit von g in a und $g(a) \neq 0$ um den Differentialquotienten zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{1}{g(x)g(a)}}_{\to(g(a))^2} \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \\
&= \left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)(a)
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.6. Mit den Rechenregeln für Produkte und Quotienten können wir jetzt die Ableitung beliebiger Potenzfunktion $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ bestimmen. Aus der Schule ist dafür die Regel $f'(z) = nz^{n-1}$ bekannt. Wir wollen diese mit vollständiger Induktion beweisen.
Induktionsanfang $n = 0$: Wir hatten in Beispiel 5.2 gesehen, dass die Ableitung der konstanten Funktion 0 ist.
Induktionsschritt: Wir wissen nach Induktionsvoraussetzung, dass für ein $n \in \mathbb{Z}$ die Ableitung von $x \mapsto x^n$ durch $x \mapsto nx^{n-1}$ gegeben ist.
$n \to n+1$: Für die Ableitung von $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ erhalten wir mit der Produktregel

$$f'(x) = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

$n \to n-1$: Für die Ableitung von $f(x) = x^{n-1} = \frac{x^n}{x}$ erhalten wir mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(x^n)' \cdot x - x^n \cdot x'}{x^2} = \frac{nx^{n-1} \cdot x - x^n \cdot 1}{x^2} = (n-1)x^{n-2}.$$

Aufgabe 5.7. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$

b) $f(x) = (x^2-1)\cdot(x+3)$

c) $f(x) = (x-1)^4$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{4x^2+2x}{3x+1}$

f) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

Nachdem wir Summe, Differenzen, Produkte und Quotienten von Funktionen untersucht haben, wollen wir als nächstes festhalten, dass die Verkettung von differenzierbaren Funktionen ebenfalls differenzierbar ist.

Satz 5.8 (Kettenregel)**.** *Die Verkettung $g \circ f$ zweier Funktionen $f : D \to \mathbb{K}$ und $g : D \to \mathbb{K}$ mit Definitionsbereichen $D \subset \mathbb{K}$ und $D' \subset \mathbb{K}$, so dass $f(D) \subset D'$, ist differenzierbar in einem a, wenn f in a und g in $f(a)$ differenzierbar sind, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Als letzte Regel für das Berechnen von Ableitungen wollen wir eine Formel zur Berechnung der Ableitung der Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion angeben.

Satz 5.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine auf $D \subset \mathbb{K}$ definierte bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$. Wenn f differenzierbar in $x \in D$ und f^{-1} stetig in $y := f(x)$ ist, dann ist f^{-1} ebenfalls differenzierbar in y mit der Ableitung*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beweis. Um den Grenzwert des Differenzenquotienten von f^{-1} zu berechnen verwenden wir das Folgenkriterium und betrachten für ein beliebiges $y \in f(D)$ eine Folge (y_n) in $f(D)$ mit $y_n \to y$. Wir können uns die Folge (x_n) der Funktionswerte unter f^{-1} mit $x_n := f^{-1}(y_n)$ ansehen. Da f^{-1} stetig ist, konvergiert diese gegen $x := f^{-1}(y)$. Für den Grenzwert können wir damit berechnen

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

□

Um uns mit diesen Ableitungsregeln vertraut zu machen, wollen wir erneut einige Beispiele betrachten.

Beispiel 5.10.

a) Die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ können wir mit Hilfe der Kettenregel aus Satz 5.8 einfach berechnen. Wir stellen dazu zunächst fest, dass $h = g \circ f$ die Verkettung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto x^2+1$ und $g : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist. Wir haben die Ableitungen von f und g bereits berechnet, so dass wir durch Einsetzen dieser in die Kettenregel

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

erhalten.

b) Außerdem können wir mit der Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Ableitung ihrer Umkehrfunktion, der n-ten Wurzelfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$ berechnen. Aus der Formel in Satz 5.9 erhalten wir

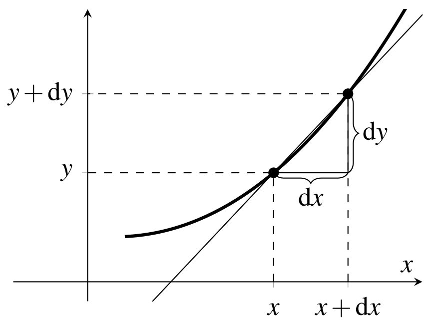
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n(f^{-1}(y))^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Aufgabe 5.11. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x+1)$

Notation 5.12 (Differentialschreibweise)**.** Wir wollen nun die in der Mathematik und Physik verbreitete Schreibweise $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ für die Ableitung f' einer Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ einführen, wobei wir y für den Funktionswert $f(x)$ verwenden. Die Ausdrücke dx und dy bezeichnen wir als „Differentiale" und können sie als (unendlich kleine) Differenzen in den x- bzw. y-Werten verstehen.
Bei dieser Notation handelt es sich eigentlich nur um eine formale Schreibweise, in der Physik ist es aber, auch wenn dies mathematisch nicht einwandfrei ist, verbreitet mit den Differentialen zu rechnen, als ob es sich dabei um einen Bruch handeln würde.



Zunächst wollen zeigen, wie sich wir die Formeln der Kettenregel und der Ableitung der Umkehrfunktion direkt aus dieser Notation ablesen lassen.

a) (Kettenregel) Wir verwenden für die Verkettung $h \circ f$ die Notationen $u = f(x)$, $y = g(u)$ und damit $y = h(x)$. Die Kettenregel ließt sich in unserer Differentialschreibweise dann $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Wir können also die rechte Seite als mit du erweitert interpretieren.

b) (Umkehrfunktion) Mit der Notation $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ ist in unserer Differentialschreibweise die Ableitung von f^{-1} gerade $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, so dass wir die Ableitung der Umkehrfunktion $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}$ als Bilden des Kehrwerts interpretieren können.

Besonders im Umgang mit Differentialgleichungen, das sind Gleichungen in denen die Ableitung f' und die Funktion f auftreten, ist die Differentialschreibweise sehr verbreitet.

Nachdem wir uns ausführlich damit auseinandergesetzt haben, wie wir die Ableitung einer Funktion bestimmen können, wollen wir uns jetzt damit beschäftigen, welche Informationen wir aus der Ableitung ziehen können. In der Schule wird in sogenannten Kurvendiskussionen die Ableitung genutzt um „Extrema" der Funktion zu finden. Um diese Aussagen formal zu zeigen, definieren wir zunächst was wir unter den Extrema einer Funktion verstehen.

Definition 5.13 (Extrema)**.** Sei $f : D \to \mathbb{K}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $a \in D$.

a) Wir bezeichnen a als **(globales) Maximum** von f, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$. Gilt sogar $f(a) > f(x)$ für alle $x \in D$ mit $x \neq a$, so nennen wir das **(globale) Maximum** a **isoliert**.

b) Wir bezeichnen a als **lokales Maximum** von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \varepsilon$. Gilt die Ungleichung sogar strikt, d.h. $f(a) > f(x)$, so sprechen wir von einem isolierten lokalen Maximum.

Völlig analog zu unserer Notation für Maxima definieren wir globale und lokale (isolierte) **Minima**. Außerdem fassen wir sämtliche Maxima und Minima unter dem Begriff Extremum bezeichnen.

Lemma 5.14. *Die Ableitung einer reellen Funktion* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *ist* 0 *in ihren lokalen Extrema.*

Beweis. Wir betrachten ein lokales Maximum $x \in (a,b)$ einer in x differenzierbaren Funktion f; für Minima ist der Beweis völlig analog. Es gibt somit eine ε-Umgebung von x in der $f(x)$ der größte Funktionswert ist. Wir konstruieren uns eine Folge (x_n), die gegen x konvergiert und für die $x_n > x$ gilt. Fast alle Folgenglieder liegen dann in der ε-Umgebung von x und nach dem Folgenkriterium aus Satz 4.10 gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \leq 0,$$

da $f(x_n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ kleiner ist als das lokale Maximum $f(x)$ und $x_n > x$ nach Konstruktion. Betrachten wir dagegen eine Folge (x_n), die gegen x konvergiert und für die $x_n < x$ gilt, so folgt $f'(x) \leq 0$. □

Bemerkung 5.15. Für eine reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervallen $[a,b]$ mit einem lokalen Extremum in $x \in [a,b]$ gibt es die beiden Möglichkeiten:

- Ist $x = a$ oder $x = b$, so muss die Ableitung nicht notwendigerweise 0 sein, solche Extrema am Rand des Definitionsbereichs nennen wir **Randextrema**.
- Ist $x \in (a,b)$ so muss nach Lemma 5.14 $f'(x) = 0$ sein, falls f in x differenzierbar ist.

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass wir in Lemma 5.14 lediglich gezeigt haben, dass die Bedingung $f'(x) = 0$ *notwendig* allerdings nicht, dass sie auch *hinreichend* für ein Extremum ist. Um zu sehen, dass aus dieser Bedingung die Existenz eines Extremums nicht im Allgemeinen folgt, betrachten wir $g(x) = x^3$. Es ist zwar $g'(0) = 0$, aber g hat keine Extremum in $x = 0$. Wir bezeichnen solche Punkte $x \in (a,b)$ für die $f'(x) = 0$, aber in denen f kein Extremum vorliegt als **kritische Punkte**.

Um ein hinreichendes Kriterium für Extrema angeben zu können, müssen wir zunächst etwas Vorarbeit leisten.

Satz 5.16 (Satz von Rolle)**.** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige und auf* (a,b) *differenzierbare Funktion. Nimmt die Funktion an beiden Rändern den selben Wert an, so ist die Ableitung* $f'(x) = 0$ *an einer Stelle* $x \in (a,b)$.

Beweis. Nach Satz 4.21 nimmt die stetige Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ Minimum und Maximum an. Sind diese gleich, so ist die Funktion konstant und wir wissen, dass die Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Andernfalls gibt es ein lokales Maximum und an diesem ist die Ableitung 0. □

Satz 5.17 (Mittelwertsatz)**.** *Für eine stetige und auf* (a,b) *differenzierbare Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *gibt es ein* $x \in (a,b)$*, so dass*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Beweis. Um die Aussage zu zeigen, betrachten wir

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto (f(x) - f(a))(b-a) - (x-a)(f(b) - f(a)).$$

Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der Stetigkeit von f auch h stetig ist. Weiterhin ist h differenzierbar auf (a,b) mit Ableitung

$$h'(x) = f'(x)(b-a) - (f(b) - f(a)).$$

Wir haben die Funktion h gerade so konstruiert, dass $h(a) = (f(a) - f(a))(b-a) - (a-a)(f(b) - f(a)) = 0$ und $h(b) = (f(b) - f(a))(b-a) - (b-a)(f(b) - f(a)) = 0$ gilt und somit den Satz von Rolle anwenden können. Es gibt also ein $x \in (a,b)$ für das

$$0 = h'(x) = f'(x)(b-a) - (f(b) - f(a))$$

gilt und damit die Aussage. □

Mit dem Zwischenwertsatz können wir jetzt die intuitive Aussage zeigen, dass wir anhand der Ableitung entscheiden können, ob eine Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Satz 5.18 (Monotonie differenzierbarer Funktionen)**.** *Eine stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ und streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage über monoton wachsende Funktionen, dazu betrachten wir zwei Stellen $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$. Wenden wir den Mittelwertsatz auf die Einschränkung $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ an, so erhalten wir

$$f(x) = f(y) - f(y) + f(x) = f(y) - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (y - x) = f(y) - \underbrace{f'(z)}_{>0} \cdot \underbrace{(y - x)}_{>0} < f(y)$$

□

Damit können wir ein *hinreichendes* Kriterium für ein (lokales) Extremum angeben: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, dann hat f in c ein lokales Maximum, wenn

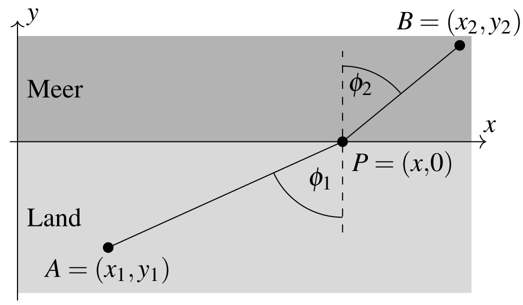
- $f'(c) = 0$ (notwendiges Kriterium aus Lemma 5.14)
- f' hat einen Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ, d.h. $f'(x) > 0$ für alle $x < c$ und $f'(x) < 0$ für alle $x > c$.

In diesem Fall ist f streng monoton wachsend auf $[a,c]$ und streng monoton fallend $[c,b]$, so dass der größte Wert im Intervall $[a,b]$ an der Stelle c angenommen wird. Genauso können wir das folgende hinreichende Kriterium für lokale Minima angeben: f in c ein lokales Minimum, wenn

- $f'(c) = 0$ (notwendiges Kriterium aus Lemma 5.14)
- f' hat einen Vorzeichenwechsel von negativ zu positiv, d.h. $f'(x) < 0$ für alle $x < c$ und $f'(x) > 0$ für alle $x > c$.

Aufgabe 5.19 ("Kürzeste Wege" in unterschiedlich dichten Medien)**.**

Ein Rettungsschwimmer, der sich an Punkt A an Land befindet, möchte schnellstmöglich zu einem Punkt B im Wasser kommen. Dazu läuft er mit Geschwindigkeit v_1 entlang einer geraden Linie zu einem Punkt P am Ufer, und schwimmt mit Geschwindigkeit v_2 von dort aus entlang einer geraden Linie zu Punkt B. Wie muss er den Punkt P wählen, damit er möglichst schnell bei B ist?



a) Stellen Sie die benötigte Zeit t als Funktion von x dar.

b) Zeigen Sie, dass diese genau dann minimal wird, wenn

$$\frac{\sin(\phi_1)}{\sin(\phi_2)} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Dies ist gerade der von Licht genommene Weg bei Brechung am Übergang zwischen optisch unterschiedlich dichten Medien.

Bevor wir uns mit weiteren Konsequenzen der Differenzierbarkeit von Funktionen auseinandersetzen, wollen zunächst festhalten, dass auch die speziellen Funktionen exp, sin und cos differenzierbar sind. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem folgenden Satz über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen, den wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht beweisen werden.

Satz 5.20 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)**.** *Eine reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r ist auf $(-r,r)$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.*

Beispiel 5.21 (Ableitungen spezieller Funktionen)**.**

a) Die Ableitung der (reellen) Exponentialfunktion $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ergibt sich durch gliedweises Differenzieren zu

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Die Exponentialfunktion entspricht somit ihrer Ableitung.

b) Entsprechend können wir die Ableitung der Sinusfunktion $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x).$$

und der Cosinusfunktion $\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (2n)x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x).$$

bestimmen. Wir können außerdem mit der Quotientenregel die Ableitung von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ errechnen

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ aus Satz 4.39 verwendet.

c) Wir können außerdem mit dem Satz 5.9 über die Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung der Logarithmusfunktion $f^{-1}(x) = \ln(x)$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ bestimmen.

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Genauso erhalten wir für die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dabei haben wir erneut die Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ aus Satz 4.39 verwendet. Genauso können wir

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\begin{aligned}\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan(x))+\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

d) Als letzte spezielle Funktion nutzen wir unser Wissen über die Exponentialfunktion um die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = a^x$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ zu bestimmen:

$$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = e^{x\ln(a)} \cdot (x\ln(a))' = a^x \cdot \ln(a)$$

Die Potenzfunktion zu einer Basis a, die nicht der Eulerschen Zahl e entspricht, ist somit die Potenzfunktion multipliziert mit dem Logarithmus der Basis. Da $\ln(e) = 1$ reproduziert der Spezialfall $a = e$ das Ergebnis aus a).

Aufgabe 5.22. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = e^{ax}$

b) $f(x) = e^{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt{1+\sin(x^3)}$

d) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

e) $f(x) = \cos(x^4)$

Aufgabe 5.23. Zeigen Sie für die Umkehrfunktion des Cosinus cos, den Arkuscosinus $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dass die Ableitung gegeben ist durch

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aufgabe 5.24. Bestimmen Sie die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Aufgabe 5.25 (Knobelaufgabe)**.** Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$.
Hinweis: Benutzen Sie die Definition der Potenzfunktion $x^a = \exp(a \ln(x))$.

Abschließend wollen wir uns damit auseinandersetzen, wie wir die in der Einleitung motivierte lineare Approximation weiter verbessern können, wir ersetzen dazu die lineare Funktion durch eine Polynomfunktion höheren Grades

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

Um die Koeffizienten c_k mit $k \in \{0,1,2,...,n\}$ zu bestimmen, beginnen wir damit $x = a$ in den Ausdruck einzusetzen und erhalten

$$f(a) \approx c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots + c_n(a-a)^n = c_0.$$

Wir wählen somit $c_0 = f(a)$, so dass die Approximation in a sogar exakt ist. Differenzieren wir dagegen zunächst beide Seiten und setzen anschließend $x = a$ ein, so erhalten wir

$$f'(a) \approx c_1 + c_2 \cdot 2(a-a) + \cdots + c_n \cdot n(a-a)^{n-1} = c_1.$$

Demnach stimmt der Differentialquotient der Approximation mit dem Differentialquotienten der Funktion f überein, wenn wir $c_1 = f'(a)$ wählen. Differenzieren wir den Differentialquotienten erneut und setzen anschließend $x = a$, so ergibt sich

$$(f')'(a) \approx c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2(a-a) + \cdots + c_n \cdot n \cdot (n-1)(x-a)^{n-2} = 2! \cdot c_2.$$

Der Differentialquotient des Differentialquotienten der Approximation stimmt somit mit dem Differentialquotienten des Differentialquotienten überein, wenn wir $c_2 = \frac{(f')'(a)}{2!}$ wählen. Wir können dies entsprechend fortsetzen und erhalten das sogenannte Taylor-Polynom. Um uns die Notation zu erleichtern führen wir zunächst die folgende Bezeichnung für „höhere“ Ableitungen ein.

Definition 5.26. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir bezeichnen f als n-mal differenzierbar auf D, wenn alle fortgesetzten Ableitungen f', $f^{(2)} := (f')'$,...,$f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ existieren.

Definition 5.27 (Taylor-Polynom)**.** Für eine n-mal differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$, nennen wir

$$T^n_{f,a} : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a.

Taylor-Polynome stellen eine Art dar, Funktionen in einer Umgebung um einen Punkt im Definitionsbereich anzunähern. Durch ihre einfache Anwendbarkeit wird sie gerne in verschiedenen Bereichen der Physik zu nähern um verhältnismäßig komplizierte Funktionen durch Polynome geringen Grades anzunähern. So werden zum Beispiel in der Kleinwinkelnäherung die trigonometrischen Funktionen $\sin(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$ linear genähert.

Beispiel 5.28. Exemplarisch bestimmen wir das Taylor-Polynom der Funktion $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, x\mapsto \ln(1+x)$ am Entwicklungspunkt $x=0$. Die Ableitungen, die wir dazu bestimmen müssen berechnen wir indem wir ausnutzen, dass wie in Beispiel 5.21 gezeigt die erste Ableitung der Logarithmusfunktion durch $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ gegeben ist. Mit der Kettenregel erhalten wir somit die erste Ableitung und können aus dieser die höheren Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

Die angegebene n-te Ableitung lässt sich einfach mittels vollständiger Induktion überprüfen. Insgesamt erhalten wir damit für das n-te Taylor-Polynom

$$\begin{aligned} T^n_{f,0}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \end{aligned}$$