Eine kurze Einführung in die Mathematik für Physiker

von

Sören Sanders

Inhaltsverzeichnis

1	**Eine kurze Einführung in die Mengenlehre**	**3**
2	**Abbildungen zwischen Mengen**	**7**
3	**Gruppen – Struktur hinter den Zahlsystemen**	**11**
4	**Vollständige Induktion**	**15**
5	**Die komplexen Zahlen**	**19**
6	**Spezielle Funktionen der Physik**	**25**
7	**Differentialrechnung**	**31**
8	**Integralrechnung**	**39**
9	**Differentialgleichungen**	**47**

Eine kurze Einführung in die Mengenlehre

Die Mathematik stellt die formale Sprache der Physik dar, so dass wir uns zum Studium der Physik zunächst intensiv mit der nötigen Mathematik auseinandersetzen müssen. Für unsere Einführung in die Mathematik wiederholen wir viele der aus der Schule bekannten Grundlagen und ergänzen diese um einige wichtige Konzepte. Dabei bedienen wir uns durchgängig der formalen Notation der Mathematik.
Die moderne Mathematik, wie sie seit Anfang des 20. Jahrhunderts betrieben wird, fußt auf der Mengenlehre, so dass wir uns in diesem ersten Kapitel mit dem Begriff der Menge beschäftigen und eine kurze Einführung in die Mengenlehre geben. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einer Menge verstehen. Wir greifen dazu auf die sehr verbreitete Charakterisierung einer Menge von Georg Cantor (1845-1918) zurück:

> „Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte bezeichnen wir als ihre **Elemente**.

Um ein grundlegendes Verständnis auszubauen, betrachten wir im Folgenden einige Beispiel und führen dabei die gängige Notation für Mengen ein. Wir werden uns in diesen Beispielen und im Folgenden auf Mengen von Zahlen beschränken. „Wohlunterscheidbare Objekte unsere Anschauung“ lassen natürlich auch Mengen, deren Elemente keine Zahlen sind, zu. Insbesondere Mengen von Mengen spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle und werden in weiterführenden Vorlesungen intensiv behandelt werden.

Notation 1.1.

a) Endliche Mengen lassen sich immer dadurch angeben, dass wir in geschweiften Klammern ihre Elemente auflisten, wobei die Reihenfolge und Mehrfachnennungen keine Rolle spielen. Eine Menge, die die Zahlen 1, 2 und 3 umfasst, können wir also als $\{1,2,3\}$ schreiben, völlig gleichwertig ist aber auch $\{2,1,3,2\}$.

b) Wir können Mengen ebenfalls durch eine beschreibende Eigenschaft angeben: $\{x;A(x)\}$ bezeichnet die Menge aller Objekte, die eine Aussage $A(x)$ erfüllen. So können wir zum Beispiel, die Menge der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ deren Quadrat $x^2 = 1$ ist, schreiben als
$$\{x \in \mathbb{R}; x^2 = 1\} = \{-1,1\}.$$

c) Die Menge $\{\}$ ohne Elemente nennen wir die **leere Menge** und bezeichnen sie mit $\emptyset$

d) Ist x Element einer Menge M, schreiben wir $x \in M$, andernfalls $x \notin M$.

e) Wenn für zwei Mengen M und N jedes Element von M auch in N enthalten ist, so nennen wir M eine **Teilmenge** von N und schreiben $M \subset N$. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass M und N gleich sind. Wollen wir ausdrücken, dass es sich um eine **echte Teilmenge** handelt, das heißt, dass $M \subset N$ und $M \neq N$, so schreiben wir stattdessen $M \subsetneq N$.

Wir haben im obigen Beispiel b) von reellen Zahlen gesprochen und für diese das Symbol $\mathbb{R}$ benutzt. Neben den reellen Zahlen sind die verbreitesten Zahlsysteme die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wir wollen diese kurz im folgenden Beispiel einführen, wobei die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ über die Peano-Axiome definiert werden und die weiteren daraus hervorgehen und zunehmend mehr „Struktur“ haben. Dabei werden wir auf eine formale Definition verzichten, da dies den Umfang der Veranstaltung überschreiten würde.

Beispiel 1.2.

a) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{0,1,2,\dots\}$ sind durch die Peano-Axiome definiert, diese drücken im wesentlichen aus, dass es ein „kleinstes“ Element 0 gibt und für jedes Element n auch ein Element $n+1$ existiert.

b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ gehen aus den natürlichen Zahlen hervor indem man zu jedem Element sein „Negatives“ hinzunimmt.

c) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0\}$ umfassen alle Brüche ganzer Zahlen.

d) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stellen eine „Vervollständigung“ der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dar. Es werden gewissermaßen Lücken in den rationalen Zahlen geschlossen. Mit den für uns wichtigsten Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir uns in späteren Kapiteln auseinandersetzen.

Die hier verwendeten Beschreibung lässt sich mathematisch formal durchführen und dies wird in Teilen in den Grundlagenvorlesungen geschehen. Die Begriffe wie „kleinstes“, „Negatives“ und auch „Bruch“, die wir hier in einem anschaulichen Sinne verwendet haben, werden dort definiert. Für den Rahmen dieser Veranstaltung beschränken wir uns auf unser anschauliches Verständnis und ergänzen dieses in Beispielen, wann immer es sich anbietet.

Anschließend wollen wir uns damit beschäftigen, wie wir aus Mengen neue Mengen erzeugen können.

Definition 1.3. Sind M und N Mengen, so lassen sich daraus wie folgt neue bilden:

a) $M \cap N := \{x; x \in M \text{ und } x \in N\}$ bezeichnen wir als die **Schnittmenge** von M und N; wenn M und N keine gemeinsamen Elemente enthalten, das heißt $M \cap N = \emptyset$, nennen wir M und N **disjunkt**.

b) $M \cup N := \{x; x \in M \text{ oder } x \in N\}$ bezeichnen wir als die **Vereinigungsmenge** bzw. **Vereinigung** von M und N.

c) $M \setminus N := \{x; x \in M \text{ und } x \notin N\}$ bezeichnen wir als die **Differenzmenge** von M und N.

d) $M \times N := \{(x,y); x \in M, y \in N\}$ bezeichnen wir als die **Produktmenge** bzw. das Produkt von M und N. Dabei bezeichnen wir mit (x,y) ein **geordnetes Paar** zweier Elemente von M bzw. N. Ist $M = N$, so schreiben wir statt $M \times N = M \times M$ auch M^2.

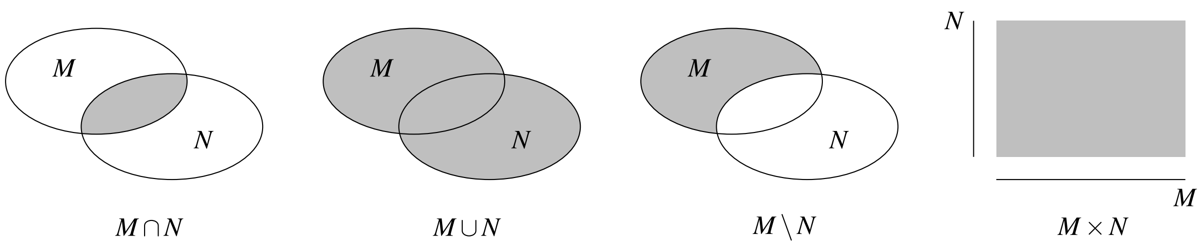


Abbildung 1.1: Darstellung der in Definition 1.3 definierten zusammengesetzten Mengen $M \cap N$, $M \cup N$, $M \setminus N$ und $M \times N$.

Aufgabe 1.4. Bestimmen Sie für die Mengen $A := \{a,b,c\}$, $B := \{1,2,3\}$ und $C := \{a,c,2\}$, die folgenden Mengen

a) $A \cap C$, b) $A \cup B$ und c) $B \setminus C$.

Aufgabe 1.5. Skizzieren Sie für zwei Mengen $A, B \subset M$ die *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := \{x;\ \text{entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

die alle Elemente enthält, die in genau einer der Mengen A oder B liegen und schreiben Sie diese um in Form der oben eingeführten zusammengesetzten Mengen.

Eine weitere Möglichkeit aus einer Menge N eine weitere zu erzeugen, ist es alle Elemente zu betrachten, die *nicht* in dieser Menge N liegen. Diese Menge bezeichnen wir als das Komplement von N. Um das Komplement zu bilden, müssen wir natürlich zunächst festlegen, was wir unter *alle* Elemente verstehen. Wir legen dazu eine Menge fest, in der das Komplement gebildet wird.

Definition 1.6 (Komplement)**.** In einer Menge M ist das **Komplement** von $N \subset M$ definiert als

$$N^{\mathrm{C}} := M \setminus N.$$

Wir haben nun einige Mengenoperationen kennengelernt. Daran anschließend wollen wir, wie in der Mathematik üblich, einige der Eigeschaften dieser Mengenoperationen betrachten.

Bemerkung 1.7. Seien $A, B, C \subset M$ Mengen.

a) Das Komplement des Komplements einer Menge entspricht dieser Menge: $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = A$

b) Das Komplement einer Schnittmenge ist die Vereinigung der Komplemente dieser Mengen:
$$(A \cap B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$$

c) Das Komplement einer Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente dieser Mengen:
$$(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$$

d) Die Teilmengenrelation ist Transitivität, das heißt aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$.

Die Aussagen c) und b) werden als *de Morgansche Gesetze* bezeichnet.
Wir werden uns im Rahmen dieser Einführung nicht immer mit den Details von Beweisen für die betrachteten Aussagen beschäftigen. An dieser Stelle zeigen wir exemplarisch die Aussage in b) und nutzen dazu eine sogenannte Wahrheitstabelle. In dieser werden für alle möglichen Kombinationen der elementaren Aussagen $x \in A$, $x \notin A$, $x \in B$ und $x \notin B$ die abgeleiteten Aussagen $x \in (A \cap B)^{\mathrm{C}}$ und $x \in A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$ betrachtet.

$x \in A$	$x \in B$	$x \notin A$	$x \notin B$	$x \in A \cap B$	$x \in (A \cap B)^{\mathrm{C}}$	$x \in A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$
falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	wahr
wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch

Wir sehen, dass x genau dann ein Element von $(A \cap B)^{\mathrm{C}}$ ist, wenn es auch ein Element von $A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$ ist. Somit ist jedes Element von $(A \cap B)^{\mathrm{C}}$ in $A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$ enthalten und andersherum und wir haben die Gleichheit der beiden Menge gezeigt.

Aufgabe 1.8. Skizzieren Sie für zwei Mengen $A, B \subset M$ die de Morganschen Gesetze aus Bemerkung 1.7 b) und c).

Aufgabe 1.9. Betrachten Sie noch einmal, wie in Bemerkung 1.7 eine Wahrheitstabelle genutzt wurde um die Aussage b) zu beweisen.

a) Zeigen Sie analog die Identität $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$ für Mengen $A, B \subset M$.

b) Zeigen Sie anschließend die Identität $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = A$ für eine Menge $A \subset M$.

c) Zeigen Sie die de Morganschen Gesetze für drei Mengen $A, B, C \subset M$
$$(A \cap B \cap C)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}} \cup C^{\mathrm{C}}$$
$$(A \cup B \cup C)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}} \cap C^{\mathrm{C}}$$
indem Sie die Wahrheitstabelle entsprechend anpassen.
Hinweis: Die de Morganschen Gesetze für drei Mengen können Sie auch zeigen, indem Sie jeweils das entsprechenden de Morgansche Gesetz für zwei Mengen geschickt anwenden.

Abbildungen zwischen Mengen

In der Physik hängen Messgrößen häufig von anderen Größen ab. So könnten wir zum Beispiel zu einem gegebenen Zeitpunkt t angeben wollen, an welcher Stelle im Raum $x(t)$ sich ein Teilchen befindet, oder für einen Ort r im Raum untersuchen, wie groß ein Kraftfeld $F(r)$ an dieser Stelle ist. In der Sprache der Mathematik handelt es sich bei dieser Zuordnung um eine Abbildung oder Funktion. Im Laufe dieses Kapitels definieren wir, was wir mathematisch unter einer Abbildung verstehen, und betrachten einige wichtige Eigenschaften von Abbildungen.

Definition 2.1 (Abbildungen)**.** Es seinen M und N Mengen.

a) Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von M nach N ist eine Zuordnung, die *jedem* Element aus M *genau ein* Element aus N „zuweist“. Wird dem Element $x \in M$ das Element $y \in N$ zugewiesen, so schreiben wir $f(x) = y$ und nennen y das **Bild** von x unter f bzw. den **Wert** von f an der Stelle x.

b) Die Menge M einer Abbildung f von M nach N nennen wir **Definitionsmenge**, **Startmenge** oder **Startraum** der Abbildung. Die Menge N bezeichnen wir als **Wertemenge**, **Zielmenge** oder **Zielraum** von f. Wenn wir betonen wollen, was Definitions- und Wertemenge sind, schreiben wir statt f auch $f : M \to N$.

Bemerkung 2.2. Wir haben hier etwas salopp von einer Zuordnung gesprochen, formal lässt sich eine Abbildung f von M nach N als Teilmenge der Produktmenge $f \subset M \times N$ definieren, wobei es für jedes Element $x \in M$ genau ein Element $(x, y) \in f$ gibt. Mit der Notation aus Definition 2.1 lässt sich diese Menge schreiben als $f = \{(x, f(x)); x \in M\}$, entspricht also gerade dem **Graphen** der Abbildung f.

Bevor wir uns den Eigenschaften von Abbildungen zuwenden, betrachten wir zunächst einige einfache Beispiele.

Beispiel 2.3. Betrachten wir eine Abbildung $f : M \to N$, so müssen wir für jedes Element der Definitionsmenge M festlegen auf welches Element der Wertemenge N es abgebildet wird.

a) Sei M eine beliebige Menge, so ist die **identische Abbildung** definiert als

$$\mathrm{id}_M : M \to M, x \mapsto x,$$

das heißt jedes Element wird auf sich selbst abgebildet.

b) Sei $M := \{1,2,3\}$, dann definiert die Zuordnung $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$ und $3 \mapsto 2$ eine Abbildung von M auf M. Solche Umsortierungen einer endlichen Menge werden als *Permutationen* bezeichnet und spielen in der Mathematik eine große Rolle.

c) Die Zuordnungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{falls } x \geq 0 \\ x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

stellen reelle Funktionen dar. Die quadratische Funktion f bildet nur in die nicht-negative reellen Zahlen ab, so dass wir ihren Wertebereich entsprechend als $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ gewählt haben.

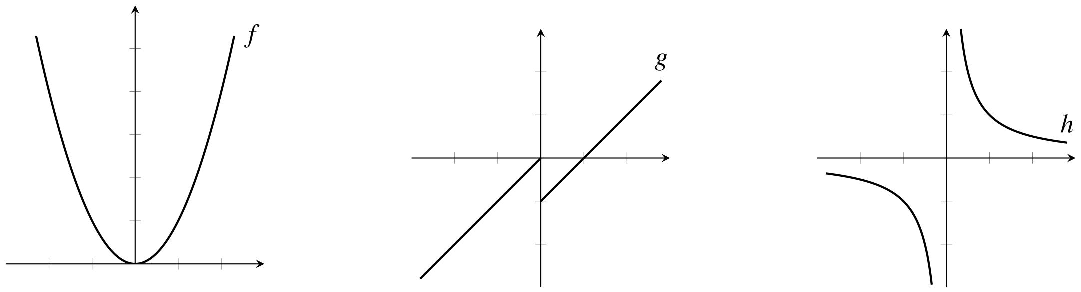


Abbildung 2.1: Darstellung der reellen Funktionen f, g und h aus Beispiel 2.3 c).

d) Sei $f : M \to N$ und $A \subset M$ eine Teilmenge, dann können wir auf A eine Abbildung

$$f|_A : A \to N, x \mapsto f(x)$$

definieren, diese bezeichnen wir als die **Einschränkung** von f auf A.
Nimmt $f : M \to N$ ausschließlich Werte in einer Teilmenge $B \subset N$ an, so lässt sich die Wertemenge von f entsprechend einschränken. Für die so eingeschränkte Abbildung verwenden wir dieselbe Bezeichnung $f : M \to B$.

In Definition 2.1 legen wir nur fest, dass jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Wertemenge zugeordnet wird, anders herum können dabei Elementen der Wertemenge durchaus mehrere Elemente der Definitionsmenge oder auch kein Element der Definitionsmenge zugeordnet werden. Eine besondere Rolle spielen Abbildungen, die jedem Element der Wertemenge *mindestens* ein Element der Definitionsmenge zuordnet, solche Abbildungen nennen wir **surjektiv**, und Abbildungen, die jedem Element der Wertemenge *höchstens* ein Element der Definitionsmenge zuordnen, solche Abbildungen nennen wir **injektiv**. In weiterführenden Vorlesungen wird später intensiver auf surjektive und injektive Abbildungen eingegangen werden. Für uns spielen dagegen in erster Linie bijektive Abbildungen, so nennt man Abbildungen, die sowohl surjektiv als auch injektiv sind, eine besondere Rolle. Eine besondere Rolle spielen diese da gerade für bijektive Abbildungen eine Abbildung existiert, die „alles was die Abbildung tut, gerade umkehrt" und die wir entsprechend Umkehrabbildung nennen. Anstatt diesen Zusammenhang zu zeigen, nutzen wir ihn hier als definierende Eigenschaft bijektiver Abbildungen.

Definition 2.4 (Umkehrabbildungen und bijektive Abbildungen)**.** Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Eine Abbildung $f^{-1} : N \to M$, für die $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle Elemente der Definitionsmenge $x \in M$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle Elemente der Wertemenge $y \in N$ gilt, bezeichnen wir als **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** von f.

b) Existiert eine Umkehrabbildung von f, so bezeichnen wir f als **bijektiv**.

Beispiel 2.5. Betrachten wir nun noch einmal die Abbildungen aus Beispiel 2.3 unter diesem Gesichtspunkt.

a) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_M : x \mapsto x$ auf M bildet jedes Element auf sich selbst ab, so dass ihre Umkehrabbildung „nichts tun" um die Abbildung umzukehren. Die identische Abbildung ist ihre eigene Umkehrfunktion und die identische Abbildung damit ein Beispiel für eine bijektive Abbildung.

b) Für die in Beispiel b) definierte Permutation mit $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$ und $3 \mapsto 2$ können wir alle Zuweisungen umdrehen, also $1 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$ und $2 \mapsto 3$, um die Umkehrabbildung zu erhalten. Somit ist die Permutation aus Beispiel b) ebenfalls eine bijektive Abbildung.

c) Weder g noch h sind bijektiv, so dass wir uns bei unserer Betrachtung auf die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ beschränken: Wir wissen aus der Schule, dass die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion f gerade die Quadratwurzel $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$ ist. Dabei müssen wir allerdings etwas vorsichtig sein. Die quadratische Funktion f bildet sowohl 1 als -1 auf 1 ab; die Umkehrfunktion f^{-1} kann sicherlich nicht beides „umkehren", so dass wir den Definitionsbereich von f entsprechend einschränken müssen. Schränken wir f auf $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ein, so ist die Quadratwurzel $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto \sqrt{y}$ ihre Umkehrfunktion und $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist bijektiv.
Wir haben an dieser Stelle die Existenz der Wurzelfunktion als gegeben vorausgesetzt; um die Existenz formal nachzuweisen, müssten wir deutlich mehr Arbeit investieren und uns zunächst intensiv mit den reellen Zahlen auseinandersetzen.

Aufgabe 2.6. Betrachten Sie die Permutation $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ und $4 \mapsto 1$ auf $M := \{1,2,3,4\}$ und bestimmen Sie deren Umkehrabbildung.

Nachdem wir uns mit bijektiven Abbildungen und deren Umkehrfunktionen beschäftigt haben, wollen wir uns einem weiteren Beispiel einer Funktion zuwenden, welches bereits aus der Schule bekannt ist.

Definition 2.7 (Polynomfunktionen)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ nennen wir eine **Polynomfunktion** vom **Grad** n. Stellen, an denen f den Wert 0 annimmt, das heißt solche $x_0 \in \mathbb{R}$ so dass $f(x_0) = 0$, bezeichnen wir als **Nullstelle** von f.

Nullstellen von Polynomen lassen sich nicht im Allgemeinen explizit angeben. Aus der Schule sollte die sogenannte *pq*-Formel bekannt sein, mit deren Hilfe man die Nullstellen eines Polynoms vom Grad zwei explizit berechnen kann. Ähnliche Formeln existieren ebenfalls für Polynome vom Grad drei und vier, allerdings nicht darüberhinaus. Da die *pq*-Formel in der Physik gelegentlich Anwendung findet, wollen wir sie hier noch einmal in Erinnerung rufen.

Aufgabe 2.8. Um die Nullstellen x_1 und x_2 von Polynome zweiten Grades $f : x \mapsto x^2 + p \cdot x + q$ zu finden, kann die aus der Schule bekannte *pq*-Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ verwendet werden.
Leiten Sie diese her, indem Sie die quadratische Ergänzung $x^2 + p \cdot x = (x + \frac{p}{2})^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ verwenden (machen Sie sich bewusst, wie dies aus der binomischen Formel folgt).

Für ein Polynom f lässt sich, wenn wir eine Nullstelle x_0 kennen, diese „in einem Linearfaktor abspalten“ $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, der Grad des dabei auftauchenden Polynoms g ist um eins kleiner als der von f. Wir werden später im Beweis zu Satz 4.11 zeigen, wie g als Funktion der Koeffizienten von f und der Nullstelle x_0 geschrieben werden kann. Alternativ kann g auch mit der aus der Schule bekannten Polynomdivision bestimmt werden.

Aufgabe 2.9. Das Polynom $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ hat die Nullstelle $x_0 = -1$. Spalten Sie den Linearfaktor $(x - x_0)$ mittels einer Polynomdivision ab und berechnen Sie die anderen beiden Nullstellen mit der in Aufgabe 2.8 bestimmten Gleichung.

Aufgabe 2.10. Betrachten Sie einen Ball, der senkrecht nach oben geworfen wird. Seine Trajektorie als Funktion der Zeit wird durch die Funktion $h : t \mapsto v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ beschrieben. Wir haben in diesem Ausdruck die Anfangsgeschwindigkeit mit v_0 und die Erdbeschleunigung wie üblich mit g bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion, die die Zeit als Funktion der Höhe ausdrückt.

b) Verwenden Sie die Umkehrfunktion, um die Zeit zu bestimmen, nach der der Ball wieder in seiner Ausgangshöhe $h_0 = 0$ ist und setzen Sie für die Erdbeschleunigung $g = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ und für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5\,\mathrm{ms}^{-1}$ ein.

In der Definition der Umkehrabbildung haben wir bereits zwei Abbildungen hintereinander ausgeführt. Wir wollen jetzt dieses „Hintereinanderausführen“ von Abbildungen formalisieren und uns mit einigen wichtigen Eigenschaften beschäftigen.

Definition 2.11 (Verkettung von Abbildungen)**.** Für zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to R$ nennen wir die Abbildung

$$g \circ f : M \to R, x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** von f und g.

Verketten wir mehr als zwei Abbildungen spielt es keine Rolle in welcher Reihenfolge wir die Verkettung auflösen.

Lemma 2.12 (Assoziativität der Verkettung)**.** *Für drei Abbildungen $f : M \to N$, $g : N \to R$ und $h : R \to S$ gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Um zu zeigen, dass zwei Abbildungen gleich sind, müssen wir zeigen, dass beide Abbildungen jedes Element der Definitionsmenge auf den selben Wert in der Wertemenge abbilden. Das heißt, wir müssen zeigen, dass die beiden Verkettungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ sämtliche $x \in M$ auf den selben Wert abbilden. Wir betrachten dazu ein beliebiges $x \in M$, für dieses gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

□

Aufgabe 2.13. In Lemma 2.12 haben wir gesehen, dass die Reihenfolge in welcher wir die Verkettung auflösen keine Rolle spielt. Überlegen Sie sich, ob wir dabei die Reihenfolge auch hätten kommutieren können. Das heißt, gilt für zwei beliebige Abbildungen $f : M \to M$ und $g : M \to M$ auch $f \circ g = g \circ f$?

Lemma 2.14 (Verkettungen bijektiver Abbildungen)**.** *Für zwei bijektive Abbildungen $f : M \to N$ und $g : M \to R$ ist die Verkettung $g \circ f : M \to R$ bijektiv und hat die Umkehrabbildung $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : R \to M$. Hier bezeichnen f^{-1} und g^{-1} die Umkehrabbildung von f beziehungsweise g.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrabbildung von $g \circ f$ ist, müssen wir nachweisen, dass $(f^{-1} \circ g^{-1})((g \circ f)(x)) = x$ für jedes Element der Definitionsmenge $x \in M$ und dass $(g \circ f)((f^{-1} \circ g^{-1})(y)) = y$ für jedes Element der Wertemenge $y \in R$.
Wir betrachten dazu zunächst ein beliebiges Element der Definitionsmenge $x \in M$, für dieses gilt

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})((g \circ f)(x)) &= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))) && \text{(nach Lemma 2.12)} \\
&= f^{-1}(f(x)) && \text{(da } g^{-1} \text{ die Umkehrabbildung von } g \text{ ist)} \\
&= x\,. && \text{(da } f^{-1} \text{ die Umkehrabbildung von } f \text{ ist)}
\end{aligned}$$

Anschließend betrachten wir ein beliebiges Element der Wertemenge $y \in R$, für dieses gilt

$$\begin{aligned}
(g \circ f)((f^{-1} \circ g^{-1})(y)) &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(y))) && \text{(nach Lemma 2.12)} \\
&= g(g^{-1}(y)) && \text{(da } f^{-1} \text{ die Umkehrabbildung von } f \text{ ist)} \\
&= y\,. && \text{(da } g^{-1} \text{ die Umkehrabbildung von } g \text{ ist)}
\end{aligned}$$

Damit haben wir die beiden definierenden Eigenschaften der Umkehrabbildung nachgewiesen. □

Wir schließen dieses Kapitel ab, indem wir die **Betragsfunktion** formal definieren und ihre wichtigsten Eigenschaften zeigen.

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Für diese gelten dann einige wichtige Eigenschaften.

Lemma 2.15 (Eigenschaften der Betragsfunktion)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen.*

a) *Es gilt $|xy| = |x| \cdot |y|$.*

b) *(Dreiecksungleichung) Es gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Wir betrachten die vier Kombinationen der Vorzeichen von x und y getrennt. Für positives x und positives y ist die Gleichung trivial. Ist dagegen x positiv und y negativ, so ist das Produkt aus x und y negativ und wir erhalten $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Die zwei verbleibenden Fälle folgen völlig analog.

b) Zunächst stellen wir fest, dass $x \leq |x|$, denn nach Definition gilt für $x \geq 0$ die Identität $x = |x|$, wogegen für negatives x gilt $x < 0 < -x = |x|$. Entsprechend gilt auch $y \leq |y|$ und wir können die folgende Abschätzung machen
$$x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|.$$
Wie oben können wir auch zeigen, dass $-x \leq |x|$ gilt und damit
$$-x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|.$$
zeigen. Abschließend nutzen wir, dass $|x + y|$ entweder $x + y$ oder $-x - y$ ist.

□

Aufgabe 2.16. Zeigen Sie für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|x + y| \geq |x| - |y|.$$

Gruppen – Struktur hinter den Zahlsystemen

Im ersten Kapitel haben wir bei der Vorstellung der Zahlsysteme von „Struktur“ gesprochen ohne zu spezifizieren, was wir damit meinen. Ziel dieses Kapitels ist es dies nachzuholen und uns weiter mit der mathematischen Notation für viele aus der Schule bekannte Sachverhalte vertraut zu machen.
In Beispiel 1.2 haben wir einige Zahlsysteme als Beispiele für Mengen kennengelernt. Aus der Schule wissen wir natürlich bereits mehr über diese Zahlsysteme. So ist zum Beispiel bekannt, dass die Summe zweier ganzer Zahlen x und $y \in \mathbb{Z}$ selbst auch wieder eine ganze Zahl $x+y \in \mathbb{Z}$ ist. Wir sagen dazu, dass die ganzen Zahlen abgeschlossen unter der Addition sind. Außerdem ist uns klar, dass bei der Addition dreier ganzer Zahlen x, y und $z \in \mathbb{Z}$ „Klammern keine Rolle spielen“, das also $(x+y)+z = x+(y+z)$ gilt. Weiterhin ist uns bewusst, dass wir zu jeder beliebigen ganzen Zahl $x \in \mathbb{Z}$ null addieren können, ohne dass diese sich ändert $(x+0 = x)$, und dass es zu jeder Zahl $x \in \mathbb{Z}$ eine negative Zahl $-x \in \mathbb{Z}$ gibt, deren Summe $x+(-x) = 0$ gerade null ergibt. Genauso gut hätten wir uns natürlich auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ansehen können.
Ein Bestreben in der Mathematik ist es, Aussagen so allgemein wie möglich zu zeigen und nicht, wie wir das hier getan haben, für jede Menge von Zahlen einzeln. Anstatt also Aussagen für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ jeweils einzeln zu zeigen, wollen wir eine Menge, die zusammen mit einer Verknüpfung die oben aufgezählten Eigenschaften erfüllt, als *Gruppe* bezeichnen und Eigenschaften von Gruppen allgemein untersuchen und sie so direkt für alle Beispiele zeigen.

Definition 3.1 (Gruppe)**.** Eine **Gruppe** $(G, *)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung

$$* : G \times G \to G, (x, y) \mapsto x * y,$$

die die folgenden Gruppenaxiome erfüllen

a) (Assoziativgesetz) Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$.

b) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e \in G$, für das $e * x = x * e = x$ für alle $x \in G$ gilt. Dieses Element bezeichnen wir als **neutrales Element**.

c) (Existenz von inversen Elementen) Für alle $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$, so dass $x' * x = x * x' = e$. Das Element x' nennen wir das **inverse Element** zu x.

Gilt außerdem

d) (Kommutatitivität) $x * y = y * x$ für alle $x, y \in G$

so bezeichnen wir $(G, *)$ als **kommutative** oder **abelsche Gruppe**.

Bemerkung 3.2.

a) Für die Definition einer Gruppe würde es ausreichen zu verlangen, dass $e * x = x$ in b) und $x' * x = e$ in c), aus den weitere Eigenschaften folgt dann direkt, dass auch $x * e = x$ und $x * x' = e$.

b) Außerdem ist das neutrale Element e aus b) eindeutig und zu jedem Element $x \in G$ einer Gruppe gibt es ein eindeutiges inverses Element $x' \in G$.

Beispiel 3.3. Als Beispiele für Gruppen wenden wir uns hier noch einmal den Zahlsystemen aus Beispiel 1.2 zu und betrachten diese zusammen mit der Addition beziehungsweise der Multiplikation.

a) Betrachten wir als erstes die ganzen Zahlen mit der Multiplikation $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$. Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl, das heißt die ganzen Zahlen sind abgeschlossen unter der Multiplikation.

   - Die Multiplikation ist assoziativ, das heißt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

- $1 \in \mathbb{Z}$ ist ein neutrales Element, denn $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.
- Für kein Element mit Ausnahme der 1 und -1 gibt es ein inverses Element.
- Die Multiplikation ist kommutativ, das heißt $x \cdot y = y \cdot x$.

Bei $(\mathbb{Z}, \cdot)$ handelt es sich somit nicht um eine Gruppe. Die Bezeichnung für eine Menge, die alle Gruppenaxiome bis auf die Existenz der Inversenelemente erfüllt, bezeichnen wir als *Monoid*.

b) Mit den ganzen Zahlen wiederum können wir die rationalen Zahlen definieren. Wir beschäftigen uns hier nicht weiter mit der formalen Definition der rationalen Zahlen als Quotientenkörper der ganzen Zahlen, dies ist Teil weiterführender Algebra-Vorlesungen.
Entsprechend verzichten wir ebenfalls auf eine formalen Herleitung der folgenden Aussagen und setzen diese im Rahmen dieser Vorlesung axiomatisch voraus:

- Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +)$ mit der Addition sind eine abelsche Gruppe.
- Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit der Multiplikation sind eine abelsche Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

c) Als drittes Beispiel betrachten wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die ihrerseits die rationalen Zahlen erweitern. Später werden wir uns noch weitergehend mit ihren Eigenschaften beschäftigen, fürs erste wollen wir, wie für die reellen Zahlen, festlegen:

- Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +)$ mit der Addition sind eine abelsche Gruppe.
- Die reellen Zahlen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit der Multiplikation sind eine abelsche Gruppe.
- Es gilt das Distributivgesetz $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dieses Beispiel verdeutlicht, was im ersten Kapitel gemeint war, als wir vage von „zunehmend mehr Struktur“ gesprochen haben.

Aufgabe 3.4. Nachdem wir im Beispiel 3.3 die rationalen Zahlen kennen gelernt haben, wollen wir noch einmal unser Schulwissen zum Rechnen mit Brüchen auffrischen.

a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$\text{i) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \qquad \text{ii) } \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \qquad \text{iii) } \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{7} \qquad \text{iv) } \frac{5}{2} : \frac{7}{4}$$

b) Welche der folgenden Zahlen ist die Größte?

$$\text{i) } \frac{3}{2} \qquad \text{ii) } \qquad \frac{7}{5} \qquad \text{iii) } \frac{11}{6}$$

c) Kürzen Sie die Darstellung $\frac{124}{74}$ und geben Sie das inverse Element an.

d) Lösen Sie die Gleichung $\frac{x}{3} + \frac{2 \cdot x}{11} = \frac{7}{17}$ und bestimmen Sie so den Wert von x.

In der Aufgabe verwenden wir durchgängig die Notation, die schon aus der Schule bekannt sein sollte und die wir in Notation 3.8 einführen werden.

Aufgabe 3.5. Im Beispiel 3.3 haben wir das Distributivgesetz für die rationalen Zahlen axiomatisch vorausgesetzt. Wir wollen hier anhand einiger Beispiele die Gültigkeit testen, berechnen Sie dazu beide Seiten der folgenden Gleichungen getennt.

$$\text{i) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 6 \qquad \text{ii) } \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{11} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{11}$$

Wir wollen uns als nächstes ein etwas abstrakteres Beispiel für eine Gruppe ansehen: Am Ende des letzten Kapitels hatten wir definiert, dass die Verkettung zweier Abbildungen selbst wieder eine Abbildung ist und gesehen, dass diese Verknüpfung assoziativ ist. Die Menge der Abbildungen $f : M \to M$ auf einer Menge M scheint also zumindest einige der Eigenschaften einer Gruppe zu erfüllen. Anstatt diese Menge aller Abbildungen zu betrachten (von der wir zeigen könnten, dass sie zusammen mit der Verkettung keine Gruppe darstellt), beschränken wir uns an dieser Stelle auf die Menge der linearer Abbildungen

$$L := \{x \mapsto a \cdot x + b; a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0\}$$

in den reellen Zahlen zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen.
Wir halten dazu zunächst fest, dass die Verkettung zweier linearer Funktionen $f : x \mapsto a \cdot x + b$ und $g : x \mapsto a' \cdot x + b'$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a \cdot x + b) = a' \cdot (a \cdot x + b) + b' = a'a \cdot x + (a'b + b')$$

selbst wieder eine lineare Abbildung ist, so dass die Verknüpfung von zwei Elementen der Menge L wieder ein Element der Menge L ergibt. Die Assoziativität folgt direkt aus Lemma 2.12. Als nächstes müssen wir zeigen, dass es ein Element e gibt, für das gilt, dass die Verkettung mit einer beliebigen linearen Funktion f diese erhält, d.h. $e \circ f = f$. Diese gesuchte Abbildung ist gerade die Identität auf den reellen Zahlen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$, die eine lineare Abbildung ist. Um dies zu sehen betrachten wir für eine beliebige lineare Abbildung $f : x \mapsto a \cdot x + b$ die Verkettung

$$(\mathrm{id} \circ f)(x) = \mathrm{id}(f(x)) = \mathrm{id}(a \cdot x + b) = a \cdot x + b = f(x).$$

Abschließend bleibt zu zeigen, dass es zu jeder linearen Abbildung f eine inverse Abbildung f' gibt, so dass deren Verkettung $f' \circ f = \mathrm{id}$ gerade das neutrale Element id ergibt. Wir betrachten dazu erneut eine beliebige lineare Abbildung $f : x \mapsto a \cdot x + b$ und die lineare Abbildung $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a}$, da $a \neq 0$ existieren die auftretenden Brüche. Die Verkettung dieser beiden Abbildungen ist

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a \cdot x + b) = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x + b) - \frac{b}{a} = x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = x = \mathrm{id}(x).$$

Damit haben wir alle Gruppenaxiome nachgewiesen, die Menge der linearen Abbildungen L zusammen mit der Verkettung $\circ$ ist demnach eine Gruppe. Abschließend wollen wir noch zeigen, dass sie nicht abelsch ist, d.h. dass lineare Abbildungen im Allgemeinen nicht kommutieren. Dazu betrachten wir die Verkettungen der Abbildungen $f : x \mapsto x + 1$ und $g : x \mapsto 2x$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 \\ \text{und } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 1) = 2x + 2. \end{aligned}$$

Wir haben damit die Verneinung ($\exists f, g \in L : f \circ g \neq g \circ f$) des vierten Gruppenaxioms über die Kommutativität gezeigt.

Bemerkung 3.6 (Körper). Mengen, die wie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, eine Gruppe der Addition sind, eine Gruppe der Multiplikation und das Distributivgesetz aus Beispiel b) erfüllen, spielen in der Mathematik eine sehr große Rolle und werden als *Körper* bezeichnet. Wir wollen für diese Einführung nicht weiter mit allgemeinen Körpern auseinandersetzen und betrachten im folgenden immer die reellen Zahlen als Beispiel. Für den Rest dieses Kapitels greifen wir dabei ausschließlich auf Eigenschaften allgemeiner Körper zurück, so dass die gezeigten Beweise völlig identisch zu denen für allgemeine Körper sind.

Wir beginnen damit einige, einfache Rechenregeln, die wir bereits aus der Schule kennen, herzuleiten.

Lemma 3.7 (Rechenregeln für die reellen Zahlen)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen.*

a) $-(-x) = x$ *und* $-(x + y) = (-x) + (-y)$.
b) *Sind* $x, y \neq 0$, *so gilt* $(x^{-1})^{-1} = x$ *und* $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.
c) $0 \cdot x = 0$.
d) *Ist* $x \cdot y = 0$, *so ist* $x = 0$ *oder* $y = 0$
e) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
f) $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

Beweis. Wir beweisen an dieser Stelle exemplarisch drei Aussagen und überlassen dem Leser die restlichen als Übungsaufgabe.

a) $-x$ ist das additive Inverse zu x, so dass gilt $0 = x + (-x) = (-x) + x$, somit ist x seinerseits das additive Inverse zu $-x$, welches wir unserer Konvention folgend als $-(-x)$ schreiben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 && \text{additives Neutrales} \\ &= x + (-x) + y + (-y) && \text{additives Neutrales} \\ &= x + y + (-x) + (-y) && \text{Kommutativität der Addition} \end{aligned}$$

b) Der Beweis verläuft völlig analog zu a) und ist dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

c) Es gilt $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, auf Grund der Eindeutigkeit des additiven Neutralen ist demnacht $0 \cdot x = 0$.

d) Angenommen $x \neq 0$, dann existiert das multiplikative Inverse x^{-1}. Durch Multiplikation mit diesem auf beiden Seiten erhalten wir $y = x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 = 0$. Die erste Identität ist dabei gerade die Definition des Inversen und die dritte folgt aus der Aussage c).

e)-f) Die Beweise sind dem Leser als Übungsaufgaben überlassen.

□

In den zuvorbetrachteten Rechenregeln haben wir die etwas umständliche Notation $x + (-y)$ verwendet um auszudrücken, dass wir die Summe aus x und dem additiven Inversen von y bilden wollen. Um uns im folgenden die Schreibarbeit zu vereinfachen führen wir die folgenden, aus der Schule bekannten Konventionen ein.

Notation 3.8. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reellen Zahlen.

a) Wir schreiben $x - y := x + (-y)$ und wenn $y \neq 0$, so definieren wir $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$.

b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ nennen wir das n-fache Produkt von x die n-te **Potenz** von x und schreiben

$$x^n := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-mal}}.$$

Für $n = 0$ interpretieren wir den Ausdruck als das „leere Produkt“ und setzen $x^0 := 1$. Wenn $x \neq 0$ können wir völlig analog auch negative ganze Zahlen als Exponenten verwenden $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

c) Für Summen mehrerer Summanden führen wir zudem folgenden Kurzschreibweise ein, das dabei verwendete Summenzeichen Σ entspricht dem großen griechischen Buchstaben Sigma.
Seien $m \leq n \in \mathbb{Z}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{m, m+1, ..., n-1, n\}$, dann schreiben wir

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

Völlig analog schreiben wir für das Produkt mehrerer Faktoren

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n,$$

das dabei verwendete Produktzeichen entspricht dem großen griechischen Pi.

Aufgabe 3.9. Wir wollen uns etwas vertraut mit der gerade eingeführten Konvention für das Schreiben von Summen machen.

a) Schreiben Sie den Ausdruck $\sum_{i=1}^{3} \frac{i^2}{i+1}$ aus und berechnen Sie den Wert.

b) Schreiben Sie die Summe aller ungeraden Zahlen bis einschließlich 131 kompakt auf indem Sie die Summennotation verwenden.

c) Vereinfachen Sie das Produkt $\prod_{i=1}^{100} \frac{i}{i+1}$.

Aufgabe 3.10 (Potenzgesetze)**.** Mit der Konvention für Potenzen aus Notation 3.8 können wir die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten herleiten.

a) Für $x \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{m\text{-mal}} = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n+m\text{-mal}} = x^{n+m}.$$

Nutzen Sie dieses Potenzgesetz um $5^2 \cdot 5^4$ und $(-2)^3 \cdot (-2)^5$ zu vereinfachen.
Berechnen Sie $\frac{p}{q} = \frac{3^5}{3^3}$, indem Sie den Zähler p und den Nenner q getrennt berechnen und anschließend teilen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit $3^{5-3} = 3^2$.

b) Berechnen Sie $(3^2)^2$ und $(2^3)^2$ und stellen Sie eine Vermutung an, wie das Potenzgesetz für Potenzen der Form $(x^n)^m$ für ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ aussieht.

Vollständige Induktion

In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem wichtigen Beweisverfahren der *vollständigen Induktion* beschäftigen, das weit über die Anwendungen in diesem Kapitel Bedeutung hat. Die Idee ist dabei, dass, wenn wir eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zeigen wollen, wir damit anfangen können, $A(0)$ zu zeigen und anschließend, aus der Gültigkeit von $A(n)$ direkt die $A(n+1)$ zu folgern.

Bemerkung 4.1 (**Vollständige Induktion**). Seien $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ Aussagen. Wollen wir zeigen, dass diese wahr sind, so können wir wie folgt vorgehen:

a) (**Induktionsanfang**) Wir zeigen, dass $A(0)$ wahr ist.

b) (**Induktionsschritt**) Unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt (**Induktionsvoraussetzung**), zeigen wir, dass auch $A(n+1)$ gilt.

Das heißt, dass aus dem Induktionsanfang $A(0)$ mit dem Induktionsschritt $A(1)$ folgt, daraus folgt wiederum $A(2)$ und so weiter, so dass letztlich $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Aufgabe 4.2. Überlegen Sie sich, wie Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anpassen könnten um Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ zu zeigen.

Um unser Verständnis dieser wichtigen Methode zu verbessern, betrachten wir einige Beispiele. Als erstes untersuchen wir die endliche **geometrische Reihe**, die zugleich ein Beispiel für die im letzten Kapitel eingeführte Summennotation darstellt.

Satz 4.3 (Endliche geometrische Reihe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für die endliche geometrische Reihe*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Hilfe einer vollständiger Induktion über n.
Induktionsanfang $n = 0$: Durch Einsetzen von $n = 0$ ergibt sich direkt

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Daraus wollen wir nun die entsprechende Aussage für $n+1$ herleiten. Dazu betrachten wir die linke Seite der Gleichung für $n+1$ und versuchen diese in die entsprechende Form der rechten Seite umzuformen.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{1-q}{1-q} \cdot q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

Somit sind Induktionsanfang und Induktionsschritt gezeigt und damit die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe 4.4 (Zusatzaufgabe: Zeno Paradoxon)**.** Im antiken Griechenland treten Achilles und eine Schildkröte zu einem Wettlauf an. Um der Schildkröte eine faire Chance einzuräumen, gewährt Achilles der Schildkröte einen Vorsprung von 100 m. Achilles, als schneller Läufer, braucht 10 s um diese Distanz zu überbrücken. In dieser Zeit gelingt es der Schildkröte ihrerseits 20 m zurückzulegen.
Wir können diese Überlegung beliebig wiederholen: In der Zeit, die Achilles braucht um an den Ort zu gelangen, an der die Schildkröte gerade eben war, gelingt es der Schildkröte wieder etwas weiter vor Achilles davon zu laufen. Dies wiederholt sich unendlich häufig und Achilles scheint nicht in der Lage zu sein, die Schildkröte jemals einzuholen.

a) Argumentieren Sie, warum es Achilles dennoch gelingt, die Schildkröte zu überholen.

b) Berechnen Sie die Zeit, die Achilles benötigt, bis er die Schildkröte überholt.

Hinweis: Es gibt zwei Möglichkeiten, die Zeit in Schritt b) zu bestimmen. Zum einen in dem man das ganze Rennen aus Sicht der Schildkröte betrachtet und zum anderen in dem man die Formel für die endliche geometrisch Reihe aus Satz 4.3 geschickt verwendet.

Als zweites Beispiel für eine vollständige Induktion wollen wir uns die die Summe der ersten n-natürlichen Zahlen ansehen. Diese lässt sich mit der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

berechnen. Zwar ist diese seit der Antike bekannt, da aber Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) diese einer Anekdote nach als neunjähriger Schüler wiedergefunden haben soll, wird sie heute als *Gaußsche Summenformel* bezeichnet.

Aufgabe 4.5 (Gaußsche Summenformel)**.** Zeigen Sie die Gaußsche Summenformel mit einer vollständigen Induktion.

Als drittes Beispiel sehen wir uns die Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten „ersten binomischen Formel“ $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ auf beliebige Exponenten $n \in \mathbb{N}$ an. Für die Herleitung dieser allgemeinen **binomischen Formel** (4.1) benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 4.6 (Fakultät und Binomialkoeffizienten)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir das Produkt der Zahlen von 1 bis n als $n$te-**Fakultät** und schreiben dafür

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n.$$

Entsprechend ist $0! = 1$ als „leeres Produkt“.
Mit dieser Notation definieren wir für zwei Zahlen $n \geq k \in \mathbb{N}$ den **Binomialkoeffizienten von** n **über** k als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot 1}.$$

Bevor wir die binomische Formel beweisen, wollen wir zunächst zeigen, dass sich die Binomialkoeffizienten rekursiv durch

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \text{ für } n,k \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k-1$$

berechnen lassen.

Beweis. Anhand der Definition der Binomialkoeffizienten können wir direkt nachrechnen

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\cdots\cdot n}{1\cdots k} + \frac{(n-k+2)\cdot(n-k+3)\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot\cdots\cdot(k-1)} \\
&= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\cdots\cdot n + k\cdot(n-k+2)(n-k+3)\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot\cdots\cdot k} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(n-k+2)\cdot\cdots\cdot n}{1\cdot\cdots\cdot k} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgrund dieser Rekursionsformel werden sie gelegentlich in Form des sogenannten **Pascalschen Dreiecks** angeordnet, in dem eine Zahl die Summe der beiden über ihr stehenden Zahlen ist.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\iddots & & & & & & \ddots \\
 & & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \\
 & & & \binom{n+1}{k} & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Satz 4.7 (Binomische Formel)**.** *Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{4.1}$$

Beweis. Induktionsanfang $n = 0$: Durch Einsetzen von $n = 0$ ergibt sich direkt

$$(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Daraus wollen wir nun die entsprechende Aussage für $n+1$ herleiten. Dazu betrachten wir die linke Seite der Gleichung für $n+1$ und versuchen diese in die entsprechende Form der rechten Seite umzuformen.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n \\
&\overset{\text{IV}}{=} (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

Im mit $(*)$ markierten Schritt haben wir den Index in der ersten Summe um eins verschoben und später die zuvor gezeigte Identität $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ genutzt. □

Aufgabe 4.8. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Zahl $n^2 + n$ gerade ist.

Aufgabe 4.9. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Summe aller ungeraden Zahlen bis $2 \cdot n - 1$gegeben ist durch

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2\cdot n - 1 = \sum_{k=1}^{n} (2\cdot k - 1) = n^2$$

Aufgabe 4.10. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$ und c) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$.

Abschließend wenden wir uns noch einmal Polynomfunktionen zu und zeigen, dass wir Nullstellen von Polynomen „abspalten" können und damit die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms abschätzen können.

Satz 4.11 (Abspalten von Nullstellen). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad n.*

a) *Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, so gibt es eine Polynomfunktion g vom Grad $n-1$ mit*

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

b) *f hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

a) Zunächst stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned}(x - x_0) \cdot \sum_{l=0}^{k-1} x_0^l x^{k-1-l} &= (x - x_0) \cdot (x^{k-1} + x_0 x^{k-2} + \cdots + x_0^{k-1}) \\ &= (x^k + x_0 x^{k-1} + \cdots + x_0^{k-1} x) - (x_0 x^{k-1} + x_0^2 x^{k-2} + \cdots + x_0^k) \\ &= x^k - x_0^k\end{aligned} \tag{$*$}$$

Sei $x_0 \in K$ eine Nullstelle von f, dann gilt somit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - x_0^k) \\ &\overset{(*)}{=} (x - x_0) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} x_0^l x^{k-1-l}}_{=:g(x)} \end{aligned}$$

Die Funktion g ist nach ihrer Definition ein Polynom von Grad $n-1$.

b) Der zweite Teil lässt sich mittels einer Induktion über den Grad des Polynoms zeigen und ist den Leser als Übungsaufgabe überlassen.

□

Aufgabe 4.12. Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion über den Grad, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat.

Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind in vielen Bereichen die ideale Basis für die mathematischen Beschreibungen physikalischer Phänomen und zumeist liegt einer theoretischen Untersuchung in der Physik die Annahme zu Grunde, dass die Variablen reelle Werte annehmen. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, den sogenannten komplexen Zahlen, die an verschiedenen Stellen der Physik aufgrund ihrer Eigenschaften der reellen Zahlen vorzuziehen sind.
Um die komplexen Zahlen zu motivieren, beschäftigen wir uns zunächst noch einmal mit Polynomfunktionen. Bisher haben wir nur Aussagen darüber gemacht, was gilt, *falls* eine Polynomfunktion eine Nullstelle hat. Wie solche im Allgemeinen gefunden werden können und ob es auch eine untere Schranke für die Anzahl für die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms gibt, haben wir bisher nicht betrachtet. Dass die entsprechenden Antworten in den reellen Zahlen weit weniger zufriedenstellend sind, wollen wir an dem folgenden einfachen Beispiel zeigen und uns darüber der Definition der komplexen Zahlen annähern.
Untersuchen wir das Polynom $f(x) = x^2 + 1$, so stellen wir fest, dass $f(x) = x^2 + 1 > x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Polynom f hat demnach keine Nullstellen. Im ersten Moment gibt es zwar keinen zwingenden Grund, warum jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle haben sollte, allerdings hat es sich gezeigt, dass dies einfach zu erreichen ist, indem die reellen Zahlen geschickt erweitert werden. Die zugrundeliegende Idee ist, es der Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ eine Bezeichnung zu geben und diese zu den reellen Zahlen zu „adjungieren". Die dabei entstehende Struktur ist den reellen Zahlen sehr ähnlich, verfügt aber darüber hinaus über einige angenehme Eigenschaften, mit denen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen wollen.
Anders als wir es für die rationalen und reellen Zahlen getan haben, können wir die komplexen Zahlen formal definieren und ihre Eigenschaften aus den Eigenschaften der reellen Zahlen herleiten. Dazu führen wir die **imaginäre Einheit** i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ ein. Für die imaginäre Einheit gilt somit $0 = i^2 + 1 = f(i)$, für das Polynom $f(x) = x^2 + 1$, für welches wir gerade festgestellt hatten, dass es keine Nullstelle in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ hat. „Ergänzen" wir also die reellen Zahlen formal um die imaginäre Einheit i, so hat das Polynom zweiten Grades f die beiden Nullstellen i und $-i$. Wir haben demnach die reellen Zahlen so erweitert, dass die Nullstellen des Polynoms f in dieser Übermenge aus den reellen Zahlen „ergänzt" um die imaginäre Einheit i liegen. Dabei handelt es sich nicht um eine Besonderheit des Polynoms f, sondern gilt für sämtliche reelle Polynome. Bevor wir uns allerdings dieser und weiterer charakteristischer Eigenschaften dieser „Ergänzung" der reellen Zahlen zuwenden, definieren wir diese zunächst und führen einige entsprechende Begriffe ein.

Definition 5.1 (Komplexe Zahlen)**.** Wir definieren die Menge der **komplexen Zahlen** als

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[i] := \{x + i \cdot y; x, y \in \mathbb{R}\}$$

zusammen mit einer komponentenweisen Addition

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (x + i \cdot y, x' + i \cdot y') \mapsto (x + x') + i \cdot (y + y')$$

und einer Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (x + i \cdot y, x' + i \cdot y') \mapsto (xx' - yy') + i \cdot (xy' + x'y).$$

Sei $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nennen $\mathrm{Re}\, z := x \in \mathbb{R}$ den **Realteil** und $\mathrm{Im}\, z := y \in \mathbb{R}$ den **Imaginärteil** von z. Weiterhin definieren wir die **komplex konjugierte Zahl** $\bar{z} := x - i \cdot y$ und den **Betrag** $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir wollen zunächst ein Gefühl für die definierten Größen Realteil, Imaginärteil und komplex konjugierte Zahl erhalten, indem wir einige Beispiele betrachten.

Aufgabe 5.2. Machen Sie sich mit den komplexen Zahlen vertraut, indem Sie die folgenden Ausdrücke berechnen.

a) $\mathrm{Re}(7+2i)$	b) $\mathrm{Im}(1+9i)$	c) $\overline{(2-4i)}$	d) $(2+i)+(2-3i)$
e) $(1+i)\cdot i$	f) $(1+4i)\cdot(1+2i)$	g) $\mathrm{Im}(\sqrt{-4})$	h) $\overline{\overline{(1+2i)}+(4+i)}$

Als erstes wollen wir zeigen, wie sich der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl mit Hilfe der komplexen Konjugation schreiben lässt.

Lemma 5.3. *Für eine komplexe Zahl $z = x+i\cdot y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$

c) $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$

Beweis. Sei $z = x+i\cdot y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine beliebige komplexe Zahl.

a) Für das komplex Konjugierte des komplex Konjugierten gilt $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(x+i\cdot y)}} = \overline{(x-i\cdot y)} = x-(-i\cdot y) = x+i\cdot y$.

b) Um die Gleichung zu zeigen, betrachten wir die rechte Seite und formen diese wie folgt um:
$$\frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}\Big((x+i\cdot y)+\overline{(x+i\cdot y)}\Big) = \frac{1}{2}((x+i\cdot y)+(x-i\cdot y)) = \frac{1}{2}(2x) = x = \mathrm{Re}(z).$$

c) Völlig analog zu b) erhalten wir für die rechte Seite der Gleichung
$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}\Big((x+i\cdot y)-\overline{(x+i\cdot y)}\Big) = \frac{1}{2i}((x+i\cdot y)-(x-i\cdot y)) = \frac{1}{2i}(2i\cdot y) = y = \mathrm{Im}(z).$$

□

Die etwas seltsam anmutende Definition der Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann einfach verstanden werden, indem wir in der folgenden Pseudorechnung i wie eine reelle Variable behandeln und im letzten Schritt $i^2 = -1$ ausnutzen.
$$\begin{aligned}(x+i\cdot y)\cdot(x'+i\cdot y') &= xx'+x\cdot i\cdot y'+i\cdot y\cdot x'+i\cdot y\cdot i\cdot y' \\ &= xx'+i^2yy'+i\cdot(xy'+x'y) \\ &= (xx'-yy')+i\cdot(xy'+x'y)\end{aligned}$$

Aus der Definition der Addition und Multiplikation ist direkt klar, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ unter diesen beiden Operationen abgeschlossen sind. Außerdem folgt durch einfaches Nachrechnen, dass sich die Assoziativität und Kommutativität der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen übertragen. Das additive Neutrale ist, wie in den reellen Zahlen, $0 = 0+i\cdot 0$, und das additive Inverse $-(x+i\cdot y) = -x-i\cdot y$ einer komplexen Zahl $x+i\cdot y \in \mathbb{C}$ können wir einfach angeben, so dass die komplexen Zahlen zusammen mit der Addition $(\mathbb{C},+)$ eine abelsche Gruppe sind. Analog ist das neutrale Element der Multiplikation $1 = 1+i\cdot 0$ und mit der Definition der komplex konjugierten Zahl ist es einfach zu sehen, dass das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ gerade $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ ist, so dass auch $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind also ebenfalls ein *Körper*, verfügen also über die selbe „Struktur“ wie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Um ein wenig Übung im Umgang mit komplexen Zahlen zu erhalten betrachten wir zunächst einige Beispiele:

Beispiel 5.4.

a) Wir betrachten die komplexe Zahl $z = \frac{1+2i}{3+4i}$ und wollen den Real- und Imaginärteil von z bestimmen. Dazu rufen wir uns in Erinnerung was wir über das Inverse von komplexen Zahlen in unserer Ausführung zum multiplikativen Inversen geschrieben hatten: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{3+4i} &= (1+2i)\cdot\frac{\overline{3+4i}}{(3+4i)\overline{(3+4i)}} \\ &= (1+2i)\cdot\frac{3-4i}{(3+4i)\cdot(3-4i)} \\ &= \frac{3+8+i\cdot(-4+6)}{9+16} \\ &= \frac{11}{25}+i\cdot\frac{2}{25}\end{aligned}$$

b) Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung $2z^2 + 2i \cdot z = 5$. Wir beginnen damit die Gleichung umzuformen.

$$\frac{5}{2} = z^2 + i \cdot z = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Subtrahieren wir $\frac{1}{4}$ von beiden Seiten, so lässt sich einfach die Wurzel ziehen.

$$z + \frac{i}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

Demnach sind die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{i+3}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{i-3}{2}.$$

Aufgabe 5.5. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ dar (außer f)).

a) $z = \overline{(3+2i)} + 4i$ b) $z = (1+2i) \cdot (2+i)$ c) $z = (1+i) \cdot (1-i)$ d) $z = \dfrac{1}{3+5i}$

e) $z = (1+i)^4$ f) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{2+3i}\right)$ g) $z = \dfrac{7+2i}{1+5i}$ h) $z = \dfrac{1+i}{1-i} \cdot (2+3i)$

Aufgabe 5.6. Berechnen Sie in den folgenden Ausdrücken die komplexe Zahl $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ und geben Sie sie in dieser Form als Summe aus Realteil und Imaginärteil an.

a) $z = \dfrac{i}{1+i} - \dfrac{1+i}{2i}$, b) $z(1+i) + \dfrac{\overline{z}}{i} = 5i \cdot (1+2i)$ und c) $z^2 = -3 - 4i$

Bemerkung 5.7 (Geometrische Interpretation von $\mathbb{C}$). Wir haben die reellen Zahlen als „vollständigen Zahlenstrahl“ bezeichnet, entsprechend können wir die komplexen Zahlen geometrisch als eine zweidimensionales Ebene interpretieren, diese bezeichnen wir als **komplexe Zahlenebene**. Wir tragen dabei den Realteil der komplexen Zahl als Ordinate und dem Imaginärteil als Abszisse auf, dies ist in der folgenden Abbildung für eine komplexe Zahl z und ihre komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ getan. Daneben haben wir die Addition zweier komplexer Zahlen dargestellt.

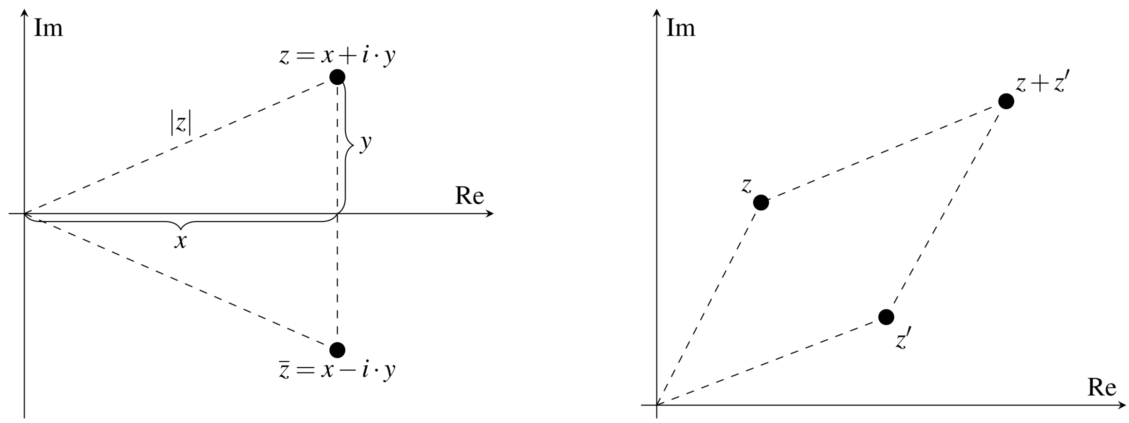


Abbildung 5.1: Darstellung einer komplexen Zahl z sowie ihrer komplex konjugierten Zahl $\overline{z}$ und der Addition zweier komplexer Zahlen z und z' in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 5.8. Skizzieren Sie die komplexe Zahlenebene und zeichnen Sie in diese die folgendenen komplexen Zahlen ein.

a) Die komplexen Zahlen $z = 2 + i$, $z' = 1 + 5i$ und deren Summe $z + z'$.

b) Die komplexe Zahl $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ und ihre Potenzen z^2 und z^3.

c) Die komplexen Zahlen $z = (2+i)$, $z' = (1+3i)$ und ihr Produkt $z \cdot z'$.

Bemerkung 5.7 (Fortsetzung). Interessanter ist die grafische Darstellung der komplexen Multiplikation. Wir betrachten zwei komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y$ und $z' = x' + i \cdot y'$. Das Produkt der Zahlen z und z' ist entsprechend seiner Definition gegeben durch $z \cdot z' = z \cdot x' + z \cdot i \cdot y'$. In der folgenden Abbildung sind exemplarisch zwei komplexe Zahlen in der komplexen Ebene visualisiert, zusätzlich zu den Beträgen, den Real- und Imaginärteilen haben wir ebenfalls die Winkel α und β zwischen Realteil und Betrag eingezeichnet. Wir zerlegen das Produkt von z und z' in die Summe aus $z \cdot x' = xx' + i \cdot yx'$ und $z \cdot i \cdot y' = -yy' + i \cdot xy'$. Diese Summe können wir wie in der vorherigen Abbildung skizzieren. Betrachten wir das dabei entstehende Dreieck mit den Eckpunkten 0, $z \cdot x'$ und $z \cdot z'$, so stellen wir fest, dass der Winkel in $z \cdot x'$ auf Grund unserer Konstruktion ein rechter Winkel ist. Außerdem kennen wir die Seitenlängen der Katheten $|z| \cdot x'$ bzw. $|z| \cdot y'$. Das Verhältnis dieser entspricht dem der entsprechenden Katheten im zu z' gehörigen Dreieck, so dass diese Dreiecke ähnlich zueinander sind. Der Winkel im Ursprung ist damit β und die Länge der Hypotenuse beträgt $|z| \cdot |z'|$. Wir haben somit gezeigt, dass der Betrag des Produkts zweier komplexer Zahlen $z \cdot z'$ gerade dem Produkt der Beträge entspricht und dass der „Winkel“ des Produkts gerade der Summe der „Winkel“ der Faktoren entspricht.

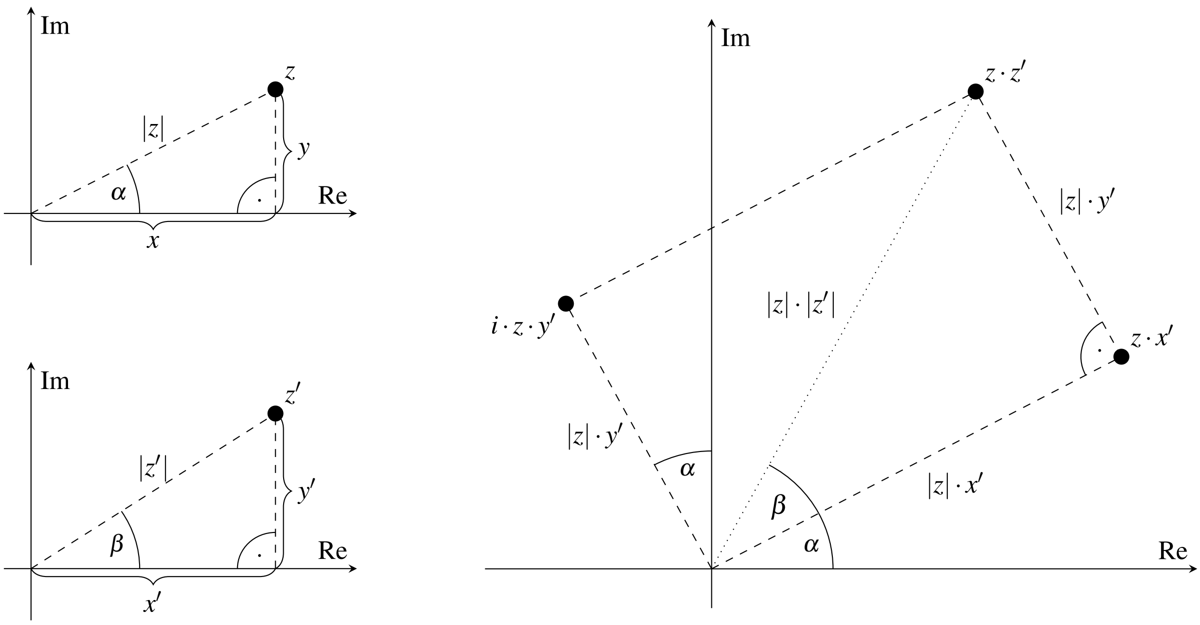


Abbildung 5.2: Darstellung zweier komplexer Zahl z und z' (links) und der geometrischen Interpretation des Produkts $z \cdot z'$ (rechts).

Dies ist Grundlage einer alternativen Schreibweise für komplexe Zahlen. Anstatt über Real- und Imaginärteil können komplexe Zahlen auch mittels ihres Betrags und des oben genutzten Winkels im Ursprung angegeben werden. Eine solche Schreibweise macht die Berechnung des Produkts zweier komplexer Zahlen besonders einfach, allerdings ist die Addition ungleich komplizierter. Welche Schreibweise zu bevorzugen ist, hängt also von der verwendeten Rechenvorschrift ab.

Bisher haben wir nicht formal definiert, wie wir den Winkel nutzen wollen um eine komplexe Zahl anzugeben. Da wir die verwendeten Ausdrücke erst im Laufe des nächsten Kapitels formal einführen, greifen wir an dieser Stelle auf unsere Kenntnis der trigonometrischen Funktionen aus der Schule zurück. In der Darstellung der komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ in Abbildung 5.2 ist $|z|$ die Hypotenuse und x die Ankathete zum Winkel α, so dass mit der Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$$x = |z| \cdot \cos \alpha$$

gilt. Entsprechend ist y die Gegenkathete zum Winkel α und somit gilt mit der Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$$y = |z| \cdot \sin \alpha.$$

Wir können die komplexe Zahl z demnach als $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ schreiben. Anstelle der trigonometrischen Funktionen wird dabei üblicherweise die komplexe Exponentialfunktion genutzt, diese definieren wir an dieser Stelle mit den aus der Schule bekannten trigonometrischen Funktionen als $\exp(i \cdot \alpha) := \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$.

Damit ergibt sich die sogenannten **Polardarstellung** einer komplexen Zahl z mit Hilfe ihres Betrags $|z|$ und ihrer **Phase** α

$$z = |z| \cdot \exp(i \cdot \alpha).$$

Beispiel 5.9. Um die Nützlichkeit der Polardarstellung zu sehen, berechnen wir das Produkt der komplexen Zahlen

$$z = 2 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{8} i\right) \qquad \text{und} \qquad z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \exp\left(\frac{3\pi}{8} i\right).$$

Das Produkt

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= 2 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{8} i\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \exp\left(\frac{3\pi}{8} i\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \exp\left(\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}\right) i\right) \\ &= \sqrt{2} \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} i\right) \end{aligned}$$

erhalten wir durch Multiplikation der Beträge 2 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und Addition der Winkel $\frac{\pi}{8}$ und $\frac{3}{8}$. Wir können diese Zahl anschließend als Summe aus ihrem Realteil und Imaginärteil darstellen, indem wir unsere vorläufige Definition der komplexen Exponentialfunktion $\exp(i \cdot \alpha) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$ einsetzen.

$$z \cdot z' = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\,(0 + i \cdot 1) = \sqrt{2} \cdot i$$

Aufgabe 5.10. Berechnen Sie analog zur Bemerkung 5.9 das Produkt der komplexen Zahlen

$$z = \frac{1}{3} \cdot \exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) \qquad \text{und} \qquad z' = \sqrt{6} \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} i\right).$$

Aufgabe 5.11.

a) Machen Sie sich mit Hilfe Ihres Schulwissens der trigonometrischen Funktionen bewusst, dass

$$|\exp(i \cdot \alpha)| = 1 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) Schreiben Sie sämtliche Nullstellen des komplexen Polynoms $f(z) = z^4 + 1$ in Polardarstellung und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 5.12. Führen Sie die folgenden Rechnung in Polardarstellung aus und geben Sie anschließend die Lösung als Summe $x + i \cdot y$ für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ an.

$$\text{i) } 2\exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) \cdot 5\exp\left(\frac{3\pi}{4} i\right) \qquad \text{ii) } \exp\left(\frac{\pi}{2} i\right) \cdot 3\exp\left(\frac{-\pi}{4} i\right) \qquad \text{iii) } \left(\exp\left(\frac{\pi}{8} i\right)\right)^{16}$$

Lemma 5.13 (Eigenschaften der komplexen Konjugation und der Betragsfunktion)**.** *Seien $z, z' \in \mathbb{C}$.*

a) *Es gelten $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ und $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.*

b) *Es gilt $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.*

c) *Es gilt $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (**Dreiecksungleichung**).*

Beweis. Seien $z = x + i \cdot y$ und $z' = x' + i \cdot y' \in \mathbb{C}$.

a) Die beiden Aussagen über die komplexe Konjugation ergeben sich durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} & \overline{z + z'} = \overline{x + x' + i \cdot (y + y')} = x + x' - i \cdot (y + y') = x - i \cdot y + x' - i \cdot y' = \overline{z} + \overline{z'} \\ \text{und} \quad & \overline{z \cdot z'} = \overline{xx' - yy' + i \cdot (xy' + yx')} = xx' - yy' - i \cdot (xy' + yx') = (x - i \cdot y) \cdot (x' - i \cdot y') = \overline{z} \cdot \overline{z'} \end{aligned}$$

b) Wir haben diese Aussage bereits geometrisch in Bemerkung 5.7 gesehen, alternativ lässt es sich mit der Definition des Betrags und der ersten Aussage einfach nachrechnen:

$$|z \cdot z'| = \sqrt{zz' \cdot \overline{zz'}} \overset{\text{a)}}{=} \sqrt{zz' \cdot \overline{z} \cdot \overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}} \cdot \sqrt{z'\overline{z'}} = |z| \cdot |z'|$$

c) Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, betrachten wir die Quadrate der beiden Seiten getrennt:

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} \overset{\text{a)}}{=} z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{\overline{z'}z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad (|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z|\cdot|z'|$$

Somit bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\cdot z'| \overset{\text{b)}}{=} |z|\cdot|z'|$. Sei dazu $\tilde{z} = \tilde{x} + i\cdot\tilde{y}$ eine komplexe Zahl, dann gilt

$$\mathrm{Re}\,\tilde{z} = \tilde{x} \leq \sqrt{\tilde{x}^2} \leq \sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} = |\tilde{z}|.$$

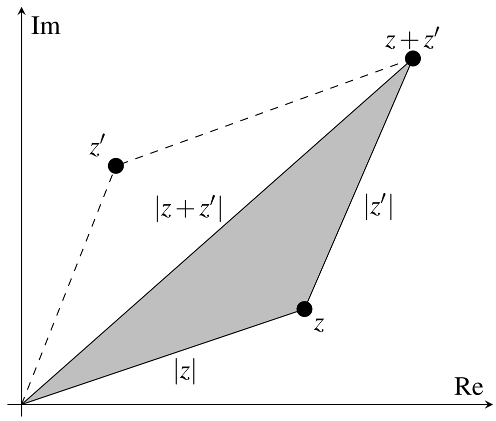
Die gesuchte Abschätzung $\mathrm{Re}\,\tilde{z} \leq |\tilde{z}|$ gilt also sogar für beliebige komplexe Zahlen. Zusammenfassend haben wir somit gezeigt, dass

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z|\cdot|z'|^2 = (|z|+|z'|)^2.$$

Die Dreiecksungleichung folgt durch Wurzelziehen auf beiden Seiten.

□

Bemerkung 5.14. Geometrisch ist die Dreiecksungleichung leicht zu verstehen, wir betrachten dazu in der folgenden Abbildung das graue Dreieck mit den Eckpunkten 0, z und $z+z'$. Die Dreiecksungleichung besagt nun, dass die Summe der Längen zweier Seiten stets zumindest genauso groß ist, wie die Länge der dritten Seite. Ihren Namen erhält die Dreiecksungleichung aus dieser geometrischen Interpretation.



Als Motivation der komplexen Zahlen haben wir das Polynom $f(x) = x^2+1$ betrachtet und festgestellt, dass dieses keine Nullstelle in den reellen Zahlen hat, sehr wohl aber in den komplexen Zahlen die beiden Nullstellen i und $-i$ besitzt. Wir hatten bereits am Anfang unserer Ausführung erwähnt, dass dies nicht nur für das Polynom f gilt, sondern für Polynome im Allgemeinen. Die wichtige Aussage, dass Polynome mit Koeffizienten in den komplexen Zahlen über eine Nullstelle in den komplexen Zahlen verfügen, wird als Hauptsatz oder Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet. Auf einen Beweis werden wir an dieser Stelle verzichten, da dafür eine bessere Kenntnis der Algebra oder der Theorie komplexer Funktionen, der sogenannten Funktionentheorie, nötig ist.

Satz 5.15 (Hauptsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Aufgabe 5.16. Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes, dass ein nicht-konstantes komplexes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat.

Aufgabe 5.17. Bestimmen Sie die Nullstellen, der folgenden komplexen Polynome

a) $z^2-(3+i)\cdot z+(2+i)$ b) $z^2-(4+i)\cdot z+(5+5i)$ c) $(1+i)\cdot z^2-4i\cdot z-3+9i$

Spezielle Funktionen der Physik

Wir wollen uns nun mit einigen für die Physik wichtigen Funktionen beschäftigen. Dazu gehören die Exponentialfunktion exp und ihre Umkehrfunktion der Logarithmus ln. Wir untersuchen diese zunächst ausschließlich in den reellen Zahlen und verallgemeinern mit ihrer Hilfe unsere Definition einer Potenz x^n für nicht-ganzzahlige Exponenten. Anschließend betrachten wir die komplexe Exponentialfunktion und nutzen diese, um die aus der Schule bekannten trigonometrischen Funktionen Cosinus cos, Sinus sin und Tangens tan zu definieren.
Formal ist die Exponentialfunktion als Wert der *Potenzreihe*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

definiert. Wir wollen uns an dieser Stelle nicht mit den mathematischen Details dieser Definition auseinandersetzung und verzichten aus diesem Grund ebenfalls darauf die sogenannte **Funktionalgleichung**

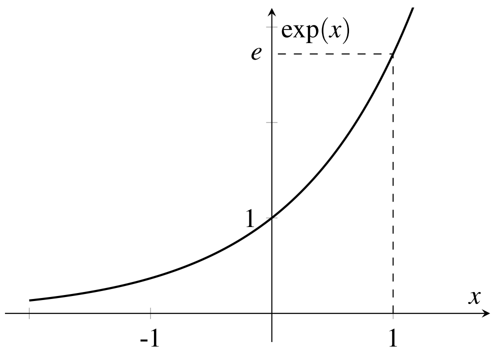
$$\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$$

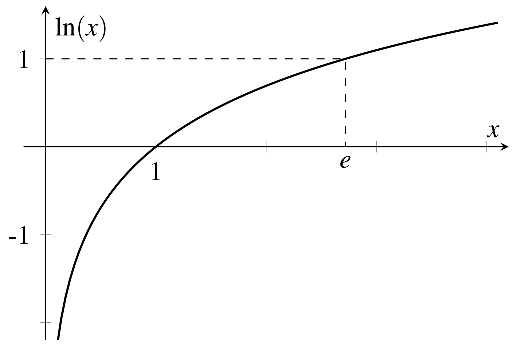
für komplexe Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$ herzuleiten. Die Funktionalgleichung gehört zu den wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion und wir werden sie im Laufe dieses Kapitels an zahlreichen Stellen nutzen.

Schränken wir die Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen ein, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so hat diese eine Umkehrfunktion.

Definition 6.1 (Logarithmus)**.** Wir bezeichnen die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ als (natürliche) **Logarithmusfunktion**

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x).$$





Anhand des *Achsenabschnitts* $\exp(0) = 1$ der Exponentialfunktion können wir den Funktionswert der Logarithmusfunktion $\ln(1) = 0$ an der Stelle 1 angeben. Außerdem können wir mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion eine Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion herleiten. Wir wenden dazu die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ auf die Logarithmusfunktion an und erhalten

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y$$

und können durch Logarithmieren eine **Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion**

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}.$$

herleiten.
Wir können jetzt mit Hilfe der Logarithmusfunktion allgemeine Potenzen definieren.

Definition 6.2 (Allgemeine Potenzen). Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Potenz**

$$x^a := \exp(a \ln(x)).$$

Wir bezeichnen x als die **Basis** und a als den **Exponenten** der Potenz x^a.

Wir können diese Definition mit der folgenden Rechnung motivieren. Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aus der Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion

$$\ln(x^n) = \ln(x \cdot \cdots \cdot x) = \ln(x) + \cdots \ln(x) = n \ln(x).$$

Setzen wir auch für reelle Exponenten $a \in \mathbb{R}$ diese Beziehung $\ln(x^a) = a \ln(x)$ voraus, so ergibt sich die zur Definition von x^a genutzte Beziehung

$$x^a = \exp(\ln(x^a)) = \exp(a \ln(x)).$$

Aus dieser Definition können wir jetzt die bekannten Rechenregeln für Potenzen herleiten.

Lemma 6.3 (Rechenregeln für Potenzen). *Seien $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.*

a) $x^0 = 1$ *und* $x^1 = x$.

b) $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$ *und* $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.

c) $x^{ab} = (x^a)^b$ *und* $(xy)^a = x^a \cdot y^a$.

Beweis.

a) $x^0 = \exp(0 \ln(x)) = \exp(0) = 1$ und $x^1 = \exp(1 \ln(x)) = \exp(\ln(x)) = x$.

b) Durch Anwenden der Funktionalgleichung erhalten wir

$$x^{a+b} = \exp((a+b) \ln(x)) = \exp(a \ln(x) + b \ln(x)) = \exp(a \ln(x)) \cdot \exp(b \ln(x)) = x^a \cdot x^b.$$

Setzen wir $b = -a$ in diesem Ausdruck ein, so ergibt sich $1 = x^0 = x^a \cdot x^{-a}$ und damit $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.

c) Betrachten $(x^a)^b$ und setzen zweimal die Definition der Potenz ein, so ergibt sich

$$(x^a)^b = \exp(b \ln(x^a)) = \exp(b \ln(\exp(a \ln(x))) = \exp(ab \ln(x)) = x^{ab}.$$

Durch Anwenden beider Funktionalgleichungen, die der Exponentialfunktion und die der Logarithmusfunktion, erhalten wir

$$(xy)^a = \exp(a \ln(xy)) = \exp(a (\ln(x) + \ln(y))) = \exp(a \ln(x)) \cdot \exp(a \ln(y)) = x^a \cdot y^a.$$

□

Bemerkung 6.4.

a) Insbesondere folgt aus den Rechenregeln in Lemma 6.3 für $n \in \mathbb{N}$

$$x^n = x^{1+\cdots+1} = \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n-\text{mal}} \text{ und } x^{-n} = x^{-1-\cdots-1} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{x}}_{n-\text{mal}}$$

so dass unsere „alte“ Definition der Potenz aus Notation 3.8 mit der neuen übereinstimmt.
Außerdem können wir aus den Rechenregeln herleiten, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^n$ ist. Damit ist $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ gerade die in Kapitel 2 beschriebene Wurzelfunktion.

b) Wir definieren die **Eulersche Zahl** $e := \exp(1) = 2{,}718281828459\ldots$ als den Wert, den die Exponentialfunktion an der Stelle 1 annimmt. Mit dieser können wir die Exponentialfunktion wie folgt umschreiben

$$e^a = \exp(a \ln(e)) = \exp(a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

In der Physik wird in aller Regel diese Notation für die Exponentialfunktion verwendet und wir werden das ab dieser Stelle ebenfalls tun.

Aufgabe 6.5. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie sie in die Form einer einfachen Potenz x^a bringen.

$$\text{i) } \left(2^4\right)^7 \cdot \left(2^3\right)^{11} \cdot \left(2^7\right)^2 \qquad \text{ii) } \left(3^4\right)^6 \cdot \left(\left(2^2\right)^3\right)^2 \qquad \text{iii) } \left(7^3\right)^6 \cdot \left(7^5\right)^{-5} \cdot \left(7^7\right)^2$$

Aufgabe 6.6. In der Physik werden häufig *Vorsätze für Maßeinheiten* wie Milli, Kilo und Mega verwendet. Diese dienen dazu Vielfache oder Teile von Maßeinheiten zu bilden; so entspricht ein Milimeter $1\,\text{mm} = 10^{-3}\,\text{m}$ gerade einem tausendstel Meter. Machen Sie sich mit dieser Konvention vertraut, indem Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Potenzgesetze umschreiben.

a) Schreiben Sie das Volumen eines Würfels mit Kantenlängen von einem Milimeter in Kubikmetern.

b) Schreiben Sie die Fläche eines Quadrats mit Kantenlängen von einem Kilometer in Quadratmetern.

c) Schreiben Sie das Volumen eines Würfels mit Kantenlängen von 10 Zentimetern in Kubikmilimetern.

Nach unserer Betrachtung der reellen Exponentialfunktion wenden wir uns jetzt der komplexen Exponentialfunktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ zu und halten zwei ihrer wichtigen Eigenschaften fest.

Lemma 6.7 (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion)**.**

a) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

b) $|e^{i\alpha}| = 1$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

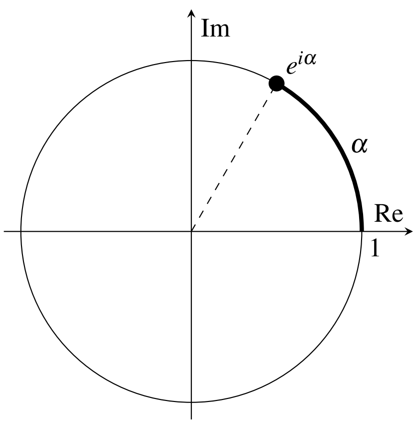
Bemerkung 6.8. Nach Lemma 6.7 b) liegt $e^{i\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem komplexen Einheitskreis. Multiplizieren wir zwei solche Zahlen $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ miteinander, so ergibt sich aus der Funktionalgleichung

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Bei einer Multiplikation der beiden Zahlen addieren sich also die Argumente der Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument. Wir können damit nachträglich unsere erste durch „Schulmathematik“ motivierte Definition der Polardarstellung einer komplexen Zahl

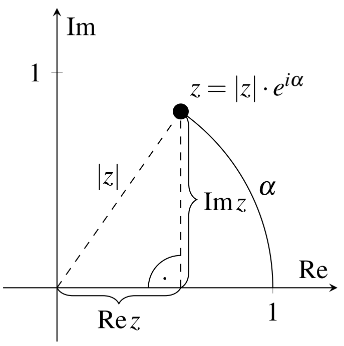
$$z = |z| \cdot e^{i\alpha}$$

für einen Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ formal rechtfertigen.



Dieser Winkel ist gerade die in der Abbildung dick eingezeichnete Länge des Kreisbogens, den wir als **Bogenmaß** bezeichnen. Im Rahmen dieser Vorlesung verzichten wir auf einen formalen Beweis und verweisen auf weiterführende Mathematikvorlesungen.
Als nächstes wollen wir die trigonometrischen Funktionen Cosinus cos und Sinus sin so definieren, dass die aus der Schule bekannten Zusammenhänge für rechtwinklige Dreiecke gelten:

$$\text{„}\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\text{“}$$
$$\text{und „}\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\text{“}$$



Aus unserer Darstellung einer komplexen Zahl $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$ in Polarkoordinaten entnehmen wir, dass die Länge der Ankathete des Winkels α gerade $\operatorname{Re} z$, die Länge der Gegenkathete gerade $\operatorname{Im} z$ und die Länge der Hypotenuse $|z|$ ist. Entsprechend sind die Seitenverhältnisse von Ankathete zu Hypotenuse bzw. Gegenkathete zu Hypotenuse, und damit Cosinus und Sinus,

$$\cos(\alpha) \overset{!}{=} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(|z| \cdot e^{i\alpha})}{|z|} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$$
$$\text{bzw. } \sin(\alpha) \overset{!}{=} \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(|z| \cdot e^{i\alpha})}{|z|} = \operatorname{Im} e^{i\alpha} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right).$$

Wir verwenden diese Gleichungen als Definition für die **Cosinusfunktion**

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \cos(\alpha) := \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$$

und die **Sinusfunktion**

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \sin(\alpha) := \mathrm{Im}\, e^{i\alpha} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$$

Wir wollen uns jetzt mit den weiteren aus der Schule bekannten Eigenschaften von Cosinus und Sinus beschäftigen.

Satz 6.9 (Eigenschaften von Sinus und Cosinus)**.** *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ *und* $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, *„der Graph von Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung“ und „der Graph von Cosinus ist achsensymmetrisch zur Abszisse“.*

b) $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$, *so dass insbesondere* $\sin(\alpha) \leq 1$ *und* $\cos(\alpha) \leq 1$.

c) **(Additionstheoreme)**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\,\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\,\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$$

Beweis.

a) Wir können mit der Darstellung der Sinusfunktion direkt nachrechnen

$$\sin(-\alpha) = \frac{1}{2i}\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = -\sin(\alpha).$$

Die Aussage für die Cosinusfunktion cos folgt völlig analog.

b) Dies ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 6.7.

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = (\mathrm{Im}\, e^{i\alpha})^2 + (\mathrm{Re}\, e^{i\alpha})^2 = |e^{i\alpha}|^2 = 1.$$

c) Um die Additionstheoreme nachzuweisen, nutzen wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \\ &= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\,(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)).\end{aligned}$$

Die Additionstheoreme für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ ergeben sich jetzt gerade durch Vergleich der Real- und Imaginärteile. Die entsprechenden Aussagen für $\cos(\alpha-\beta)$ und $\sin(\alpha-\beta)$ erhalten wir indem wir β durch $-\beta$ ersetzen und die Symmetrieeigenschaften aus a) verwenden.

□

Aus der Schule wissen wir weiterhin, dass die Cosinusfunktion eine Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$ hat. In den weiterführenden Mathematikvorlesungen wird dies formal gezeigt werden, wir werden dies an dieser Stelle voraussetzen und nutzen diese Nullstelle um damit die Kreiszahl π zu definieren.

Definition 6.10. Wir definieren π als das Doppelte der (eindeutigen) Nullstelle der Cosinusfunktion $\alpha \mapsto \cos(\alpha)$ im Intervall $(0,2)$.

Wir jetzt in der Lage die in der folgenden Tabelle gegebenen Werte für Sinus und Cosinus zu bestimmen.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(\alpha)$	1	0	-1	0	1
$\sin(\alpha)$	0	1	0	-1	0

Aus $1 = e^{i\cdot 0} = \cos(0) + i\sin(0)$ hatten wir bereits abgelesen, dass $\cos(0) = 1$ gilt. Durch Vergleich der Imaginärteile erhalten wir ebenfalls direkt $\sin(0) = 0$. Mit der Definition von π folgt außerdem

$$(\sin(\frac{\pi}{2}))^2 = 1 - (\cos(\frac{\pi}{2}))^2 = 1 - 0 = 1,$$

„anhand des Einheitskreises sehen wir, dass wir dabei die positive Wurzel $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ wählen müssen“. Die weiteren Werte können wir, wie exemplarisch für $\sin(\frac{\pi}{2})$ und $\cos(\pi)$ gezeigt, berechnen

$$\cos(\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})\,\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\,\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Aufgabe 6.11. Machen Sie sich mit dem Additionstheoremen vertraut indem Sie die die Werte aus der angegebenen Tabelle für $\sin(\pi)$ und $\cos(\frac{3\pi}{2})$ nachrechnen.

Aus der Schule ist ebenfalls bekannt, dass Sinus und Cosinus 2π-periodisch sind, mit der Tabelle sind wir in der Lage dies einfach zu zeigen.

Satz 6.12 (Periodizität von Sinus und Cosinus)**.** *Sinus und Cosinus sind* 2π*-periodisch, d.h. es gilt* $\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha)$ *und* $\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Aus der Tabelle entnehmen wir die Werte $\cos(2\pi) = 1$ und $\sin(2\pi) = 0$. Mit den Additionstheoremen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+2\pi) &= \cos(\alpha)\cos(2\pi) - \sin(\alpha)\sin(2\pi) = \cos(\alpha)\cdot 1 - \sin(\alpha)\cdot 0 = \cos(\alpha) \\ \text{und } \sin(\alpha+2\pi) &= \sin(\alpha)\cos(2\pi) + \sin(\alpha)\cos(2\pi) = \sin(\alpha)\cdot 1 + \cos(\alpha)\cdot 0 = \sin(\alpha) \end{aligned}$$

□

Lemma 6.13. *Für* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist* $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ *und* $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$.

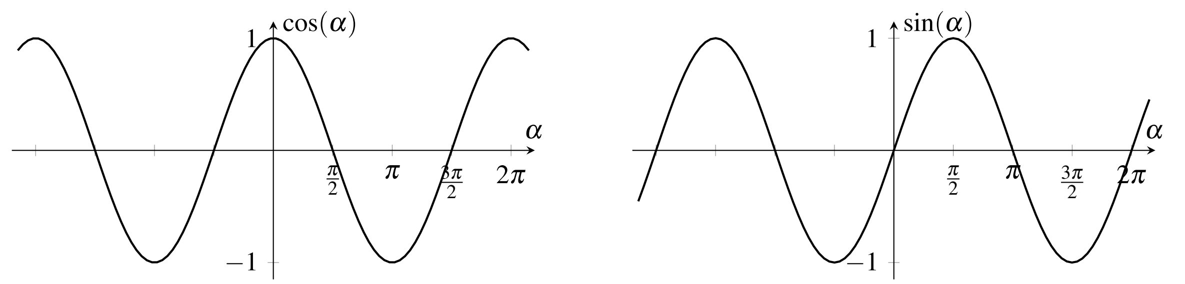
Beweis. Aus der Tabelle entnehmen wir die Werte $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Mit den Additionstheoremen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \cos(\pi-\alpha) &= \cos(\pi)\cos(\alpha) + \sin(\pi)\sin(\alpha) = -1\cdot\cos(\alpha) - 0\cdot\sin(\alpha) = -\cos(\alpha) \\ \text{und } \sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) &= \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\alpha) \pm \cos(\frac{\pi}{2})\sin(\alpha) = 1\cdot\cos(\alpha) + 0\cdot\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.14. Benutzen Sie $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, um $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ zu zeigen und den Wert, den die beiden trigonometrischen Funktionen an dieser Stelle haben, zu berechnen.

Mit unserer Vorarbeit zu den trigonometrischen Funktionen sin und cos können wir diese graphisch darstellen.



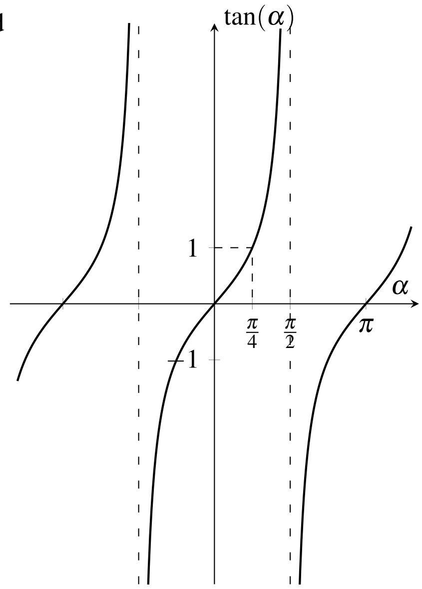
Wir wollen uns als nächstes der Definition des Tangens als Quotient aus Sinus und Cosinus definieren.

Definition 6.15. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\alpha) \neq 0$, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$, nennen wir

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

den **Tangens** von α.

Bemerkung 6.16 (Eigenschaften des Tangens). Die wesentlichen Eigenschaften des Tangens ergeben sich unmittelbar aus denen von Sinus und Cosinus.



a) Der Tangens ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha),$$

und π-periodisch

$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \tan(\alpha),$$

b) Wir können die folgenden Werte des Tangens

$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0, \tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = 1 \text{ und } \lim_{\substack{\alpha\to\frac{\pi}{2} \\ \alpha<\frac{\pi}{2}}} \tan(\alpha) = \infty$$

bestimmen.

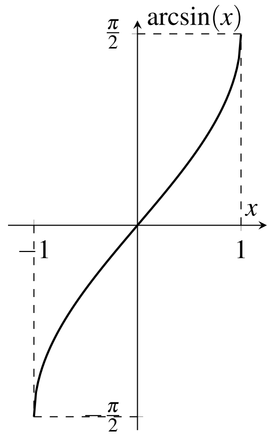
Abschließend führen wir die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen ein. Wir müssen dabei darauf achten, dass diese eindeutig definiert sind, dazu schränken wir die trigonometrischen Funktionen jeweils auf passende Definitionsbereiche ein. Wir haben diese hier jeweils so gewählt, dass sie die 0 enthalten.

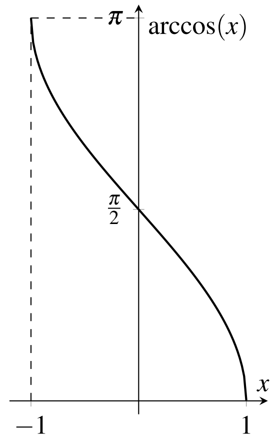
Definition 6.17 (Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen)**.**

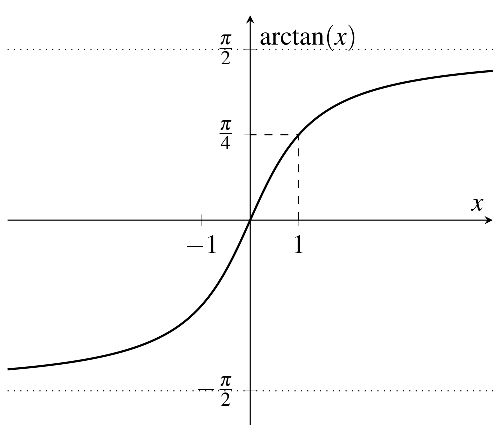
a) Die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ nennen wir **Arkussinus** $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ nennen wir **Arkuscosinus** $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

c) Die Umkehrfunktion von $\tan : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ nennen wir **Arkustangens** $\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.





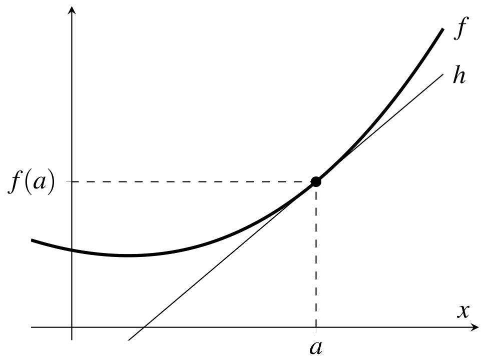


Aufgabe 6.18. Transformieren Sie die folgenden komplexen Zahlen in die im letzen Kapitel eingeführte Polardarstellung.

i) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ii) $z = 4 \cdot i$ iii) $z = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot i$ iv) $z = -2+4 \cdot i$

Differentialrechnung

Als nächstes kommen wir zu einem der wichtigsten Themen der Analysis, der sogenannten Differentialrechnung. Ziel der Differentialrechnung ist es, eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ lokal, das heißt in einer Umgebung um einen Punkt $a \in D$, zu untersuchen. Dazu *approximieren* wir die Funktion f im Punkt a *linear*, das heißt wir versuchen eine Grade zu finden, die f in einer kleinen Umgebung von a möglichst gut annähert. Dies ist in der Praxis immer dann wünschenswert, wenn wir die Funktion f nur in der Nähe von a benötigen, dann lässt sich im Allgemeinen die lineare Näherung sehr viel leichter untersuchen als die ursprüngliche Funktion f.



Bevor wir die formalen Definition einführen, wollen wir diese zunächst motivieren, dazu stellen wir zunächst fest, dass die Grade h aus der Abbildung durch den Punkt $(a, f(a))$ verläuft und muss damit von der Form $h(x) = f(a) + c(x-a)$ mit der *Steigung* $c \in \mathbb{R}$ sein. Um die Steigung c zu bestimmen nutzen wir, dass h in einer Umgebung von a ungefähr f entspricht, wir schreiben dies als

$$f(x) \approx h(x) = f(a) + c(x-a).$$

Die Steigung c können wir demnach durch

$$c \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

approximieren. Die „Qualität“ der Approximation $f(x) \approx h(x)$ ist in der „Nähe“ von a sicherlich besser als weiter davon entfernt und wird im Grenzwert $\lim_{x \to a} h(x) = f(a)$ sogar exakt, entsprechend definieren wir die „Steigung“ einer Funktion wie folgt.

Definition 7.1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion.

a) Wir nennen f **differenzierbar** in $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Wir bezeichnen $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ als **Differenzenquotienten** und den Grenzwert $f'(a)$ als **Differentialquotient** oder Ableitung von f in a.

b) Wir nennen f differenzierbar (auf D), wenn f differenzierbar in jedem Punkt $a \in D$ ist. In diesem Fall können wir eine Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ definieren. Wir bezeichnen diese als Ableitungsfunktion oder kurz **Ableitung**.

Bemerkung 7.2. Wir haben in der Definition von differenzierbar die Bezeichnung *Grenzwert* und für diesen die Schreibweise $\lim_{x \to a}$ verwendet. Wir haben bisher nicht definiert, was wir unter einem solchen Grenzwert mathematisch verstehen. Da diese Definition sehr technisch ist und nicht ohne Übung vernüftig verstanden werden kann, beschränken wir uns hier auf eine anschauliche Interpretation des Grenzwerts.
Der **Grenzwert** $\lim_{x \to a} f(x)$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einer Stelle $a \in D$ ist der Wert, „an den sich $f(x)$ immer mehr annähert, wenn sich x an a annähert“.
In allen Beispielen, die wir uns in diesem Kapitel ansehen, wird sofort klar sein, was der Grenzwert ist.

Bevor wir uns mit einigen Eigenschaften des Differentialquotienten beschäftigen, errechnen wir diesen zunächst für einige Beispiele.

Beispiel 7.3.

a) Betrachten wir zunächst die konstante Funktion $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Für ein beliebiges $a \in D$ erhalten wir den Differentialquotienten

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = 0.$$

Damit ist die konstante Funktion differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$.

b) Genauso können wir zeigen, dass die Identität $g : D \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ differenzierbar ist und dass der Differentialquotient

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1.$$

ebenfalls unabhängig von $a \in D$ ist.

c) Als drittes Beispiel betrachten wir die Wurzelfunktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$. Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erhalten wir

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} & \text{falls } a > 0 \\ \infty & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Demnach ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit der Ableitung $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und nicht differenzierbar in 0.

Als nächsten wollen die aus der Schule bekannten Regeln fürs Differenzieren von Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von Funktionen wiederholen und zeigen, wie wir mit diesen bereits die Ableitungen sehr allgemeiner Funktionen bestimmen können.

Satz 7.4 (Rechenregeln für Ableitungen)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte und in $a \in D$ differenzierbare Funktionen.*

a) *Die Funktion $f \pm g$ ist differenzierbar in a mit Ableitung $(f \pm g)'(a) = (f' \pm g')(a)$.*

b) **(Produktregel)** *Die Funktion fg ist differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$.*

c) **(Quotientenregel)** *Ist $g(a) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)(a)$.*

Aufgabe 7.5. Bestimmen Sie die Ableitung von $f : x \mapsto x^2$, indem Sie die Produktregel und die in Beispiel 7.3 bestimmte Ableitung der Identität $g : x \mapsto x$ verwenden.
Nutzen Sie anschließend dieses Ergebnis und erneut die Produktregel, um die Ableitung von $h : x \mapsto x^3$ zu bestimmen.

Verallgemeinern wir, was wir in Aufgabe 7.5 getan haben, so können wir die aus der Schule bekannte Formel für die Ableitung beliebiger Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ bestimmen.

Beispiel 7.6. Wir betrachten eine beliebige Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ und zeigen mittels einer vollständigen Induktion, dass ihre Ableitung durch $f'(x) = nx^{n-1}$ gegeben ist.
Induktionsanfang $n = 0$: Wir hatten in Beispiel 7.3 gesehen, dass die Ableitung der konstanten Funktion 0 ist.
Induktionsschritt: Um die Aussage für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ zu zeigen, müssen wir, wie in Aufgabe 4.2 untersucht, zwei Induktionsschritte „$n \to n+1$“ und „$n \to n-1$“ zeigen. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir jeweils, dass für ein $n \in \mathbb{Z}$ die Ableitung von $x \mapsto x^n$ durch $x \mapsto nx^{n-1}$ gegeben ist.
„$n \to n+1$“: Für die Ableitung von $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ erhalten wir mit der Produktregel

$$f'(x) = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

„$n \to n-1$“: Für die Ableitung von $f(x) = x^{n-1} = \frac{x^n}{x}$ erhalten wir mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(x^n)' \cdot x - x^n \cdot x'}{x^2} = \frac{nx^{n-1} \cdot x - x^n \cdot 1}{x^2} = (n-1)x^{n-2}.$$

Aufgabe 7.7. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen.

i) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ ii) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x+3)$ iii) $f(x) = (x-1)^4$

iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$ v) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{3x+1}$ vi) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

Nachdem wir Summe, Differenzen, Produkte und Quotienten von Funktionen untersucht haben, wollen wir als nächstes festhalten, dass die Verkettung von differenzierbaren Funktionen ebenfalls differenzierbar ist.

Satz 7.8 (Kettenregel)**.** *Die Verkettung $g \circ f$ zweier Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereichen $D \subset \mathbb{R}$ und $D' \subset \mathbb{R}$, so dass $f(D) \subset D'$, ist differenzierbar in einem a, wenn f in a und g in $f(a)$ differenzierbar sind, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Als letzte Regel für das Berechnen von Ableitungen wollen wir eine Formel zur Berechnung der Ableitung der Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion angeben. Wir müssen dafür voraussetzen, dass die Umkehrfunktion f^{-1} stetig an der Stelle ist, an der wir sie differenzieren wollen. Wir wollen uns hier nicht mit der etwas technischen Definition von Stetigkeit beschäftigen und greifen auf unser Schulwissen zurück, dass die Funktionswerte einer stetigen Funktion sich in einer Umgebung einer Stelle nicht sehr vom Funktionswert an der Stelle unterscheiden.

Satz 7.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$. Wenn f differenzierbar in $x \in D$ und f^{-1} stetig in $y := f(x)$ ist, dann ist f^{-1} ebenfalls differenzierbar in y mit der Ableitung*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Um uns mit diesen Ableitungsregeln vertraut zu machen, wollen wir erneut einige Beispiele betrachten.

Beispiel 7.10.

a) Die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ können wir mit Hilfe der Kettenregel aus Satz 7.8 einfach berechnen. Wir stellen dazu zunächst fest, dass $h = g \circ f$ die Verkettung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto x^2 + 1$ und $g : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist. Wir haben die Ableitungen von f und g bereits berechnet, so dass wir durch Einsetzen dieser in die Kettenregel

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

erhalten.

b) Außerdem können wir mit der Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Ableitung ihrer Umkehrfunktion, der n-ten Wurzelfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$ berechnen. Aus der Formel in Satz 7.9 erhalten wir

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n(f^{-1}(y))^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Aufgabe 7.11. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

i) $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ ii) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x+1)$ iii) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^6$

Bevor wir uns mit weiteren Konsequenzen der Differenzierbarkeit von Funktionen auseinandersetzen, wollen zunächst festhalten, dass auch die speziellen Funktionen exp, sin und cos differenzierbar sind. Wir werden dabei die Exponentialfunktion *termweise*, das heißt jeden Summand einzeln, differenzieren. Wir haben in Satz 7.4 gesehen, dass dies für endliche Summen richtig ist. Wir werden hier nicht zeigen, dass sich diese Aussage auf die Exponentialfunktion überträgt und verweisen auf die weiterführenden Mathematikvorlesungen.

Beispiel 7.12 (Ableitungen spezieller Funktionen)**.**

a) Die Ableitung der (reellen) Exponentialfunktion $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ergibt sich durch termweises Differenzieren zu

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Die Exponentialfunktion entspricht somit ihrer Ableitung.

b) Mit der Ableitung der Exponentialfunktion können wir die Ableitung der Sinusfunktion $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$$\sin'(x) = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)' = \frac{1}{2i}\left(i \cdot e^{ix} - (-i) \cdot e^{ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x).$$

und der Cosinusfunktion $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

$$\cos'(x) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(i \cdot e^{ix} + (-i) \cdot e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(-e^{ix} + e^{-ix}\right) = -\sin(x).$$

bestimmen. Dabei haben wir benutzt, dass nach der Kettenregel $\left(e^{ix}\right)' = (ix)' \cdot e^{ix} = i \cdot e^{ix}$ gilt. Außerdem haben wir für die Ableitung der Cosinusfunktion verwendet, dass $i = \frac{-1}{i}$ ist.
Mit der Quotientenregel können wir jetzt die Ableitung von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ errechnen

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ aus Satz 6.9 verwendet.

c) Wir können außerdem mit dem Satz 7.9 über die Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung der Logarithmusfunktion $f^{-1}(y) = \ln(y)$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ bestimmen.

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Genauso erhalten wir für die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dabei haben wir erneut die Identität $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ aus Satz 6.9 verwendet.
Völlig analog können wir

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

und

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(y))}} = \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan(y)) + \sin^2(\arctan(y))}{\cos^2(\arctan(y))}}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(\arctan(y))}{\cos^2(\arctan(y))}} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}$$

zeigen.

d) Als letztes Beipiel nutzen wir unser Wissen über die Exponentialfunktion, um die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = a^x$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ zu bestimmen:

$$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = e^{x\ln(a)} \cdot (x\ln(a))' = a^x \cdot \ln(a)$$

Die Potenzfunktion zu einer Basis a, die nicht der Eulerschen Zahl e entspricht, ist somit die Potenzfunktion multipliziert mit dem Logarithmus der Basis. Da $\ln(e) = 1$ reproduziert der Spezialfall $a = e$ das Ergebnis aus a).

Aufgabe 7.13. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

i) $f(x) = e^{ax}$ ii) $f(x) = e^{x^3}$ iii) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x^3)}$

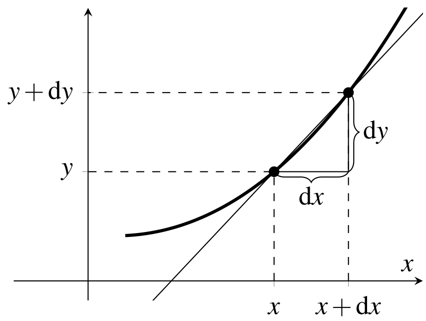
iv) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ v) $f(x) = \cos(x^4)$

Aufgabe 7.14. Zeigen Sie für die Umkehrfunktion des Cosinus cos, den Arkuscosinus $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dass die Ableitung gegeben ist durch

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Aufgabe 7.15 (Knobelaufgabe)**.** Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$.
Hinweis: Benutzen Sie die Definition der Potenzfunktion $x^a = \exp(a\ln(x))$.

Notation 7.16 (Differentialschreibweise)**.** Wir wollen nun die in der Mathematik und Physik verbreitete Schreibweise $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (gesprochen: dy nach dx) für die Ableitung f' einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ einführen, wobei wir y für den Funktionswert $f(x)$ verwenden. Die Ausdrücke dx und dy bezeichnen wir als „Differentiale" und können sie als (unendlich kleine) Differenzen in den x- bzw. y-Werten verstehen.
Bei dieser Notation handelt es sich eigentlich nur um eine formale Schreibweise, in der Physik ist es aber verbreitet, auch wenn dies mathematisch nicht einwandfrei ist, mit den Differentialen zu rechnen, als ob es sich bei $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ um einen Bruch handeln würde.



Zunächst wollen zeigen, wie sich die Formeln der Kettenregel und der Ableitung der Umkehrfunktion direkt aus dieser Notation ablesen lassen.

a) (Kettenregel) Wir verwenden für die Verkettung $h \circ f$ die Notationen $u = f(x)$, $y = g(u)$ und damit $y = h(x)$. Die Kettenregel liest sich in unserer Differentialschreibweise dann $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Wir können also die rechte Seite als mit du erweitert interpretieren.

b) (Umkehrfunktion) Mit der Notation $y = f(x)$ und $x = f^{-1}(y)$ ist in unserer Differentialschreibweise die Ableitung von f^{-1} gerade $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, so dass wir die Ableitung der Umkehrfunktion $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}$ als Bilden des Kehrwerts interpretieren können.

Besonders im Umgang mit Differentialgleichungen, das sind Gleichungen in denen die Ableitung f' und die Funktion f auftreten, ist die Differentialschreibweise sehr verbreitet. Wir werden uns später in Kapitel 9 mit Differentialgleichungen beschäftigen und uns der Differentialschreibweise bedienen.

Nachdem wir uns ausführlich damit auseinandergesetzt haben, wie wir die Ableitung einer Funktion bestimmen können, wollen wir uns jetzt damit beschäftigen, welche Informationen wir aus der Ableitung ziehen können. In der Schule wird in sogenannten Kurvendiskussionen die Ableitung genutzt um „Extrema" der Funktion zu finden. Um diese Aussagen formal zu zeigen, definieren wir zunächst was wir unter den Extrema einer Funktion verstehen.

Definition 7.17 (Extrema)**.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $a \in D$.

a) Wir bezeichnen a als **(globales) Maximum** von f, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.

b) Wir bezeichnen a als **lokales Maximum** von f, wenn in einer Umgebung $U \subset D$ von a gilt $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U$.

Völlig analog zu unserer Notation für Maxima definieren wir globale und lokale **Minima**. Außerdem fassen wir sämtliche Maxima und Minima unter dem Begriff **Extrema** (singular: Extremum) bezeichnen.

Aus der Schule wissen wir, dass wir Extrema bestimmen können, indem wir Stellen $a \in D$ betrachten, für die die Ableitung der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ null wird. Wir wollen uns mit der dahinter stehenden Idee vertraut machen.
Dazu betrachten wir eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die in $a \in D$ ein lokales Maximum hat. Für diese ist $f(a)$ also zumindest so groß wie $f(x)$ für $x \in D$ aus einer Umgebung von a. Wir betrachten für diese den Differentialquotienten $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und beschränken uns dabei zunächst auf einen *rechtsseitigen Grenzwert*, bei dem wir nur $x \in D$ betrachten die größer als a sind. Für den Differentialquotienten gilt dann

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{>0}} \leq 0.$$

Genauso können wir mit den *linksseitigen Grenzwert* zeigen, dass

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{<0}} \leq 0.$$

Wir können dies in der folgenden Aussage zusammenfassen.

Lemma 7.18. *Die Ableitung einer reellen Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist 0 in ihren lokalen Extrema.*

Bemerkung 7.19. Für eine reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervallen $[a,b]$ mit einem lokalen Extremum in $x \in [a,b]$ gibt es die beiden Möglichkeiten:

- Ist $x = a$ oder $x = b$, so muss die Ableitung nicht notwendigerweise 0 sein, solche Extrema am Rand des Definitionsbereichs nennen wir **Randextrema**.
- Ist $x \in (a,b)$ so muss nach Lemma 7.18 $f'(x) = 0$ sein, falls f in x differenzierbar ist.

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass nach Lemma 7.18 lediglich wissen, dass die Bedingung $f'(x) = 0$ *notwendig* ist, allerdings nicht, dass sie auch *hinreichend* für ein Extremum ist. Um zu sehen, dass aus dieser Bedingung die Existenz eines Extremums nicht im Allgemeinen folgt, betrachten wir $g(x) = x^3$. Es ist zwar $g'(0) = 0$, aber g hat kein Extremum in $x = 0$. Wir bezeichnen solche Punkte $x \in (a,b)$ für die $f'(x) = 0$, aber in denen f kein Extremum vorliegt als **kritische Punkte**.

Um ein hinreichendes Kriterium für Extrema angeben zu können, müssen wir zunächst etwas Vorarbeit leisten.

Satz 7.20 (Mittelwertsatz)**.** *Für eine stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in (a,b)$, so dass*

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Mit dem Zwischenwertsatz können wir jetzt die intuitive Aussage zeigen, dass wir anhand der Ableitung entscheiden können, ob eine Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Satz 7.21 (Monotonie differenzierbarer Funktionen)**.** *Eine stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ und streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage über monoton wachsende Funktionen, dazu betrachten wir zwei Stellen $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$. Wenden wir den Mittelwertsatz auf die Einschränkung $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ an, so erhalten wir

$$f(x) = f(y) - f(y) + f(x) = f(y) - \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \cdot (y-x) = f(y) - \underbrace{f'(z)}_{>0} \cdot \underbrace{(y-x)}_{>0} < f(y)$$

□

Damit können wir ein *hinreichendes* Kriterium für ein (lokales) Extremum angeben: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, dann hat f in c ein lokales Maximum, wenn

- $f'(c) = 0$ (notwendiges Kriterium aus Lemma 7.18)
- f' hat einen Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ, d.h. $f'(x) > 0$ für alle $x < c$ und $f'(x) < 0$ für alle $x > c$.

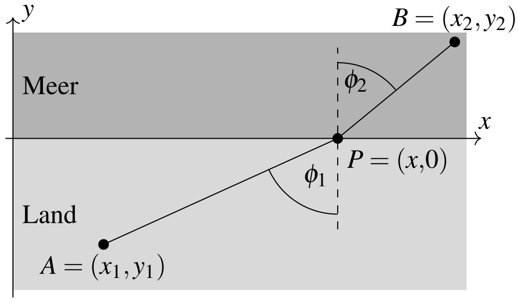
In diesem Fall ist f streng monoton wachsend auf $[a,c]$ und streng monoton fallend $[c,b]$, so dass der größte Wert im Intervall $[a,b]$ an der Stelle c angenommen wird. Genauso können wir das folgende hinreichende Kriterium für lokale Minima angeben: f in c ein lokales Minimum, wenn

- $f'(c) = 0$ (notwendiges Kriterium aus Lemma 7.18)
- f' hat einen Vorzeichenwechsel von negativ zu positiv, d.h. $f'(x) < 0$ für alle $x < c$ und $f'(x) > 0$ für alle $x > c$.

Aufgabe 7.22. Die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 12x + 2$ hat ein Extremum in $x_0 = 1$. Nutzen Sie dies aus um die weiteren Extrema zu bestimmen und bestimmen Sie jeweils, ob es sich bei ihnen um Minima oder Maxima handelt.

Aufgabe 7.23 ("Kürzeste Wege" in unterschiedlich dichten Medien)**.**

Ein Rettungsschwimmer, der sich an Punkt A an Land befindet, möchte schnellstmöglich zu einem Punkt B im Wasser kommen. Dazu läuft er mit Geschwindigkeit v_1 entlang einer geraden Linie zu einem Punkt P am Ufer, und schwimmt mit Geschwindigkeit v_2 von dort aus entlang einer geraden Linie zu Punkt B. Wie muss er den Punkt P wählen, damit er möglichst schnell bei B ist?



a) Stellen Sie die benötigte Zeit t als Funktion von x dar.

b) Zeigen Sie, dass diese genau dann minimal wird, wenn

$$\frac{\sin(\phi_1)}{\sin(\phi_2)} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Dies ist gerade der von Licht genommene Weg bei Brechung am Übergang zwischen optisch unterschiedlich dichten Medien.

Abschließend wollen wir uns damit auseinandersetzen, wie wir die in der Einleitung motivierte lineare Approximation weiter verbessern können, wir ersetzen dazu die lineare Funktion durch eine Polynomfunktion höheren Grades

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

Um die Koeffizienten c_k mit $k \in \{0,1,2,...,n\}$ zu bestimmen, beginnen wir damit $x = a$ in den Ausdruck einzusetzen und erhalten

$$f(a) \approx c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots + c_n(a-a)^n = c_0.$$

Wir wählen somit $c_0 = f(a)$, so dass die Approximation in a sogar exakt ist. Differenzieren wir dagegen zunächst beide Seiten und setzen anschließend $x = a$ ein, so erhalten wir

$$f'(a) \approx c_1 + c_2 \cdot 2(a-a) + \cdots + c_n \cdot n(a-a)^{n-1} = c_1.$$

Demnach stimmt der Differentialquotient der Approximation mit dem Differentialquotienten der Funktion f überein, wenn wir $c_1 = f'(a)$ wählen. Differenzieren wir den Differentialquotienten erneut und setzen anschließend $x = a$, so ergibt sich

$$(f')'(a) \approx c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2(a-a) + \cdots + c_n \cdot n \cdot (n-1)(x-a)^{n-2} = 2! \cdot c_2.$$

Der Differentialquotient des Differentialquotienten der Approximation stimmt somit mit dem Differentialquotienten des Differentialquotienten überein, wenn wir $c_2 = \frac{(f')'(a)}{2!}$ wählen. Wir können dies entsprechend fortsetzen und erhalten das sogenannte Taylorpolynom. Um uns die Notation zu erleichtern führen wir zunächst die folgende Bezeichnung für „höhere" Ableitungen ein.

Definition 7.24. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir bezeichnen f als n-mal differenzierbar auf D, wenn alle fortgesetzten Ableitungen f', $f^{(2)} := (f')'$,...,$f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ existieren.

Definition 7.25 (Taylorpolynom)**.** Für eine n-mal differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$, nennen wir

$$T^n_{f,a} : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das **Taylorpolynom** n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt a.

Taylorpolynome stellen eine Art dar, Funktionen in einer Umgebung um einen Punkt im Definitionsbereich anzunähern. Durch ihre einfache Anwendbarkeit wird die Methode gerne in verschiedenen Bereichen der Physik benutzt um verhältnismäßig komplizierte Funktionen durch Polynome geringen Grades anzunähern. So werden zum Beispiel in der Kleinwinkelnäherung die trigonometrischen Funktionen $\sin(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$ linear approximiert.

Beispiel 7.26. Exemplarisch bestimmen wir das Taylorpolynom n-ten Grades der Funktion $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, x\mapsto \ln(1+x)$ am Entwicklungspunkt $x=0$. Die Ableitungen, die wir dazu bestimmen müssen, berechnen wir, indem wir ausnutzen, dass, wie in Beispiel 7.12 gezeigt die erste Ableitung der Logarithmusfunktion durch $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ gegeben ist. Mit der Kettenregel erhalten wir somit die erste Ableitung und können aus dieser die höheren Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x}\\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}\\
&\vdots\\
f^{(n)} &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}$$

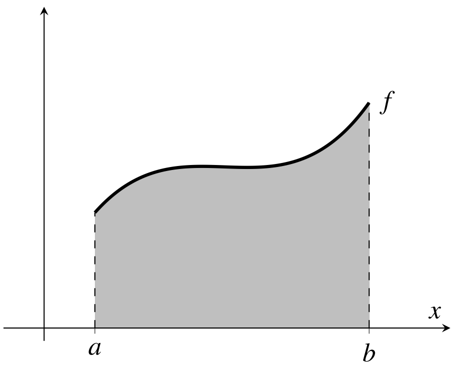
Die angegebene n-te Ableitung lässt sich einfach mittels vollständiger Induktion überprüfen. Insgesamt erhalten wir damit für das n-te Taylor-Polynom

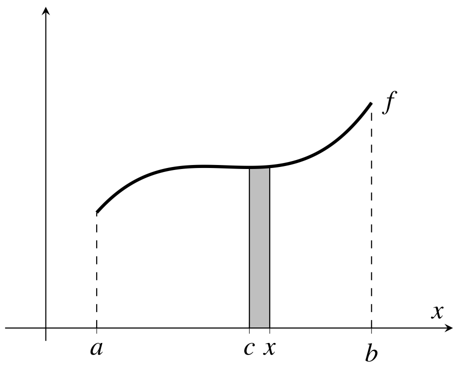
$$\begin{aligned}
T^n_{f,0}(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.27. Machen Sie sich mit Taylorpolynomen vertraut, indem Sie das 6te-Taylorpolynom von Cosinus- und Sinusfunktion am Entwicklungspunkt $a=0$ bestimmen.

Integralrechnung

Nachdem wir uns mit dem Differentialquotienten von Funktionen beschäftigt haben, wollen wir nun untersuchen, ob wir zu einer Funktion f eine Funktion F angeben können, deren Differentialquotient F' gerade der Funktion f entspricht. Dies ist natürlich von großem physikalischem Interesse, da uns das „Umkehren“ der Differentiation zum Beispiel ermöglicht, aus der Geschwindigkeit eines Massenpunktes seinen Ort zu ermitteln, da die zeitliche Änderung des Ortes ja gerade der Geschwindigkeit entspricht. Wir werden später eine entsprechende Funktion F als eine *Stammfunktion* von f bezeichnen und diese Eigenschaft zur Definition von F verwenden. Bevor wir dies tun, wollen wir uns kurz mit einer alternativen Definition als „Fläche unterhalb der Funktion“, wie in der folgenden Abbildung skizziert, beschäftigen und anschaulich zeigen, dass diese äquivalent sind. Ein mathematischer Beweis ist Teil der Vorlesung „Analysis I“ des ersten Semesters.





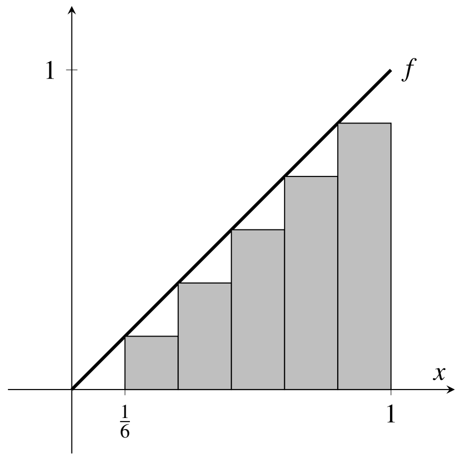
Wir wollen die Fläche unterhalb der Funktion von a bis x mit $F(x)$ bezeichnen, die Fläche unterhalb der Funktion im Intervall $[c,x]$, wie in der rechten Abbildung eingezeichnet, beträgt somit $F(x) - F(c)$. Für diesen schmalen Streifen können wir die Fläche natürlich gut durch ein Rechteck der Breite $x - c$ und der Höhe $f(c)$ approximieren, so dass

$$F(x) - F(c) \approx (x - c) \cdot f(c) \quad \text{ und damit } \quad f(c) \approx \frac{F(x) - F(c)}{x - c}$$

gilt. Die entspricht gerade unserer Motivation des Differentialquotienten aus dem letzten Kapitel und zeigt, dass der Differentialquotient der Funktion F gerade der Funktion f entspricht. Die Funktion, welche einem Element x die Fläche $F(x)$ unterhalb der Funktion f bis x zuordnet, ist somit eine Stammfunktion von f.
Die Approximation der Fläche unterhalb der Kurve durch Rechtecke ist die der sogenannten Riemann-Integration zugrunde liegende Idee. Wir wollen uns im Rahmen dieser kurzen Einführung nicht mit den technischen Details auseinandersetzen, sondern nur anhand eines einfachen Beispiels die wichtigsten Begriffe kurz einführen.

Beispiel 8.1. Wir betrachten die Identität $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ und schätzen die Fläche unterhalb der Kurve durch die unten dargestellte **Zerlegung** $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$ in Intervalle der Breite $\frac{1}{n}$ ab. Die Fläche unterhalb der Kurve ist sicherlich größer als die Summe der Flächen der eingezeichneten Rechtecke, deren Höhe wir jeweils als kleinsten Wert der Funktion f auf dem zugehörigen Intervall gewählt haben. Eine solche Abschätzung für eine Zerlegung Z_n durch Rechtecke nach unten bezeichnen wir als **Untersumme** $\mathrm{US}(f, Z_n)$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ergibt sich die Untersumme zu

$$
\begin{aligned}
\mathrm{US}(f,Z_n) &= \frac{1}{n}\cdot f(0)+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{1}{n})+\cdots++\frac{1}{n}\cdot f(\frac{n-1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right) \\
&= \frac{n-1}{2n}
\end{aligned}
$$



Die Fläche unter der Kurve ist somit größer als $\frac{n-1}{2n}$ für jedes $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Betrachten wir diese Abschätzung für „große“ $n\in\mathbb{N}$, so nähert sich $\frac{n-1}{2n}$ immer weiter an $\frac{1}{2}$ an. Die Fläche unter der Kurve muss als größer oder gleich $\frac{1}{2}$ sein. Anderherum können wir natürlich auch die Fläche nach oben durch eine sogenannte **Obersumme** $\mathrm{OS}(f,Z_n)$ abschätzen, indem wir die Höhe der Rechtecke als größten Wert der Funktion f auf dem entsprechenden Intervall wählen. Mit derselben Zerlegung Z_n ergibt sich für die Obersumme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OS}(f,Z_n) &= \frac{1}{n}\cdot f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n}\cdot f(1) \\
&= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n+1}{2n},
\end{aligned}
$$

so dass die Größe der Fläche unter der Kurve kleiner als $\frac{n+1}{2n}$ für jedes $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist. Für „große“ Werte von n nähert sich diese Abschätzung zunehmend an $\mathrm{OS}(Z_n,f)\leq\frac{1}{2}$ an. Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass die Fläche unter der Kurve gerade durch $\frac{1}{2}$ gegeben ist. Dies entspricht natürlich genau dem von uns erwarteten Ergebnis für ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten beide die Länge 1 haben.
In diesem Fall war es ausreichend, die oben angegebenen Zerlegungen Z_n zu betrachten, im Allgemeinen definieren wir das sogenannte **Unterintegral** $\mathrm{UI}(f)$ als den größten Wert aller Untersummen und das **Oberintegral** $\mathrm{OI}(f)$ als den kleinsten Wert aller Obersummen. Stimmen diese beiden Werte $\mathrm{UI}(f)=\mathrm{OI}(f)$ überein, so nennen wir die Funktion f auf $[a,b]$ **(Riemann-) integrierbar**, und definieren das **Integral** von f als diesen Wert

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) := \mathrm{UI}(f)=\mathrm{OI}(f).$$

Dies ist die zugrundeliegende Idee hinter der (Riemann-) Integration, die ausführlich in der Vorlesung „Analysis I“ behandelt werden wird; für den weiteren Verlauf dieser Vorlesung verwenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass das (Riemann-) Integral einer Funktion f gerade eine Stammfunktion von f ist, als Definition des Integrals.

Definition 8.2 (Stammfunktion)**.** Für eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nennen wir eine differenzierbare Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit

$$F'=f$$

eine Stammfunktion von f.

Definition 8.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Wir definieren das Integral einer stetigen Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ als

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) := \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b} := F(b)-F(a)$$

für eine Stammfunktion F von f.
Für eine Stammfunktion F einer stetigen Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ schreiben wir auch

$$\int \mathrm{d}x\, f(x) := F.$$

Wir haben bisher von „einer“ Stammfunktion gesprochen, tatsächlich sind Stammfunktionen nur eindeutig bis auf eine additive Konstante (diese fällt beim Differenzieren ja gerade weg). Dadurch, dass wir das Integral

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = F(b) - F(a)$$

als Differenz des Wertes der Stammfunktion an den Stellen b und a definiert haben, spielt diese Konstante für die Definition des Integrals aber keine Rolle.
Wir betrachten nun einige Beispiele, dabei machen wir uns die Kenntnisse, die wir über den Differentialquotienten im vorherigen Kapitel gewonnen haben, zu nutze und zeigen so, dass die angegebenen Funktionen F Stammfunktionen der betrachteten Funktion f sind. Für die Integration gibt es leider kein vergleichbar systematisches Vorgehen wie für die Differentialrechnung.

Beispiel 8.4.

a) Für $f(x) = x^a$ mit einem $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist

$$F(x) = \frac{1}{a+1}\, x^{a+1}$$

eine Stammfunktion, wie wir durch Differenzieren zeigen können. Insbesondere gilt also

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^1 = \Big[\frac{1}{1+1} x^2\Big]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2},$$

wie wir bereits in Beispiel 8.1 berechnet hatten.

b) Als nächstes wollen wir den Spezialfall $a = -1$, den wir im obigen Beispiel ausgelassen haben, betrachten. Für $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ist

$$F(x) = \ln(|x|)$$

eine Stammfunktion. Wir können dies erneut durch Differenzieren überprüfen indem wir die Fallunterscheidung für $x \geq 0$ und $x < 0$ machen.

- Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$ und wir erhalten $\big(\ln(|x|)\big)' = \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$.
- Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und wir erhalten $\big(\ln(|x|)\big)' = \big(\ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$.

c) Als nächstes wollen wir einige der speziellen Funktionen, deren Ableitungen wir im letzten Kapitel bestimmt haben, und ihre Stammfunktionen auflisten. Solche Listen von Stammfunktionen sind als *Integraltabellen* bekannt und füllen ganze Bücher, in denen man sie bei Bedarf nachschlagen kann. Zumindest für die Exponentialfunktion, Cosinus und Sinus lohnt es sich, die Stammfunktionen auswendig zu kennen, da diese regelmäßig in der Physik auftauchen.

- $\int \mathrm{d}x\, e^x = e^x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
- $\int \mathrm{d}x\, \cos(x) = \sin(x) + c$ und $\int \mathrm{d}x\, \sin(x) = -\cos(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
- $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1,1)$
- $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1,1)$

Aufgabe 8.5. Ergänzen Sie die Liste der Integrale, die wir so eben aufgestellt haben, indem Sie die folgenden Funktionen F differenzieren und so die Stammfunktion ihrer Ableitung $f = F'$ finden.

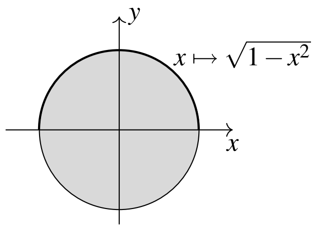
i) $F : x \mapsto \sin^2(x)$

ii) $F : x \mapsto x - \sin(x) \cdot \cos(x)$

ii) $F : x \mapsto \cos(x) + x \cdot \sin(x)$

iv) $F : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}} \cdot \arctan\left(\dfrac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}}\right)$

Aufgabe 8.6 (Fläche des Einheitskreises)**.** Berechnen Sie die Fläche des rechts dargestellten Kreises mit Radius 1, nutzen Sie dazu die Parametrisierung des oberen Kreisbogens $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ und folgen Sie den unten angegebenen Schritten:



a) Zeigen Sie durch Differentiation, dass

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot x + \arcsin(x)\right)$$

eine Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist.

Hinweis: Die Ableitung von $x \mapsto \arcsin(x)$ hatten wir im Kapitel zur Differentiation berechnet.

b) Berechnen Sie die Fläche eines Kreises mit Radius 1, verwenden Sie dazu, was Sie über die Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ in a) gezeigt haben.

Als nächstes betrachten wir einige elementare Eigenschaften von Integralen. Zunächst halten wir fest, dass wir den Integrationsbereich in endlich viele Teile partitionieren können und die Summe der Integrale über die Teile dem Integral über den vollständigen Integrationsbereich entspricht.

Lemma 8.7 (Partitionsregel)**.** *Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \int_a^c \mathrm{d}x\, f(x) + \int_c^b \mathrm{d}x\, f(x) \qquad \text{für } c \in [a,b]$$

Beweis. Aus unserer Definition des Integrals folgt direkt

$$\begin{aligned}\int_a^c \mathrm{d}x\, f(x) + \int_c^b \mathrm{d}x\, f(x) &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\end{aligned}$$

für eine Stammfunktion F von f. □

Weiterhin wichtig ist die Feststellung, dass das Integral der Summe zweier Funktionen gerade der Summe der Integrale beider Funktionen entspricht, diese Eigenschaft wird als Linearität des Integrals bezeichnen.

Lemma 8.8 (Linearität)**.** *Für zwei stetige Funktionen $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = \alpha \cdot \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) + \beta \cdot \int_a^b \mathrm{d}x\, g(x).$$

Beweis. Seien F und G Stammfunktionen von f und g. Nach unseren Rechenregeln für Differentialquotienten wissen wir, dass

$$\big(\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x)\big)' = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x),$$

so dass $\alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x)$ eine Stammfunktion von $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ ist. Damit wissen wir

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x\, \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) &= \big(\alpha \cdot F(b) + \beta \cdot G(b)\big) - \big(\alpha \cdot F(a) + \beta \cdot G(a)\big)\\ &= \alpha \cdot \big(F(b) - F(a)\big) + \beta \cdot \big(G(b) - G(a)\big)\\ &= \alpha \cdot \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) + \beta \cdot \int_a^b \mathrm{d}x\, g(x).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.9. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{i) } \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \left(x^5 + x^3 + x^2\right) \qquad \text{ii) } \int_0^2 \mathrm{d}x\, \left(x^2 + 2\right)$$

Aufgabe 8.10. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{i) } \int_0^1 \mathrm{d}x\, \left(4x^3 + 2x^2 + 7x + 1\right) \qquad \text{ii) } \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \left(10x^4 + 7x^3 + x + 8\right) \qquad \text{iii) } \int_0^2 \mathrm{d}x\, \left(x \cdot (x^2 + 4x + 1)\right)$$

$$\text{iv) } \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x\, \left(x^2 + 1\right)^2$$

Zusätzlich zu diesen elementaren Eigenschaften des Integrals gibt es einige Regeln, die es uns erlauben, den Integranden zu ändern und so kompliziertere Integrale zu lösen. Die Idee hinter der ersten solche Regel, die wir betrachten wollen, ist es, die Integrationsvariable – bisher mit x bezeichnet – durch $y = f(x)$ zu ersetzen und so auftretende Verkettungen „aufzulösen“.

Lemma 8.11 (Substitutionsregel)**.** *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, sowie $g : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset D$, dann gilt*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, g(f(x)) \cdot f'(x) = \int_{f(a)}^{f(b)} \mathrm{d}y\, g(y)$$

Beweis. Sei G eine Stammfunktion von g. Nach der Kettenregel der Differentiation gilt

$$\big(G(f(x))\big)' = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, g(f(x)) \cdot f'(x) = \int_a^b \mathrm{d}x \Big(G(f(x))\Big)' = \Big[G(y)\Big]_{y=f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} \mathrm{d}y\, g(y)$$

mit einer Stammfunktion G von g. □

Beispiel 8.12. Um uns mit der Substitutionsregel vertraut zu machen betrachten wir das Integral

$$\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\, \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{=g(f(x))} \cdot \underbrace{2x}_{=f'(x)}$$

mit der äußeren Funktion $g(y) = \sqrt{y}$ und der inneren Funktion $f(x) = x^2 + 1$. Dadurch, dass die Ableitung der inneren Funktion $f'(x) = 2 \cdot x$ als Faktor im Integranden auftaucht, können wir die Substitutionsregel anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\, \sqrt{x^2+1} \cdot 2x &= \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\, g(f(x)) \cdot f'(x) \\
&= \int_{f(0)}^{f(\sqrt{3})} \mathrm{d}y\, \sqrt{y} \\
&= \int_1^4 \mathrm{d}y\, y^{1/2} \\
&= \left[\frac{1}{3/2} y^{3/2}\right]_1^4 \\
&= \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 1\right) \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.13. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel.

$$\text{i)} \int_0^4 \mathrm{d}x\, (x-1)^3 \qquad \text{ii)} \int \mathrm{d}x\, 2x \cdot \cos(x^2) \qquad \text{iii)} \int \mathrm{d}x\, e^{ax}$$

Aufgabe 8.14. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel.

$$\text{i)} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, \sin(x+\pi) \qquad \text{ii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\, \sin^2(x) \cdot \cos(x) \qquad \text{iii)} \int_3^5 \mathrm{d}x\, \frac{x}{x^2+4}$$

Als Motivation für die nächste Regel, mit der wir uns beschäftigen wollen, betrachten wir $f(x) = \cos^2(x)$. Wir können eine Stammfunktion von f bestimmen; dies erfordert den geschickten Einsatz der Additionstheoreme und soll noch einmal deren Bedeutung unterstreichen.

Beispiel 8.15. Indem wir die Identität $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ verwenden und an der markierten Stelle das Additionstheorem $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ ausnutzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \cos^2(x) &= \int \mathrm{d}x\ \big(\cos^2(x) - 1 + 1\big)\\ &= \int \mathrm{d}x\ \big(\underbrace{\cos^2(x) - \sin^2(x)}_{=\cos(2x)} - \cos^2(x) + 1\big)\\ &= \int \mathrm{d}x\ \cos(2x) - \int \mathrm{d}x \cos^2(x) + \int \mathrm{d}x\, 1\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) - \int \mathrm{d}x \cos^2(x) + x.\end{aligned}$$

Anschließend können wir den Term $\int \mathrm{d}x \cos^2(x)$ auf die linke Seite bringen: $2\int \mathrm{d}x \cos^2(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + x$, so dass die Lösung des Integrals durch

$$\int \mathrm{d}x\ \cos^2(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x.$$

gegeben ist.

Die Substitutionsregel ist das Analogon zur Kettenregel der Differentiation; wir wollen nun das entsprechende Analogon zur Produktregel einführen. Die Idee ist dabei, einen Integranden als das Produkt aus der Ableitung f' einer Funktion und einer Funktion g zu interpretieren und diesen durch das Produkt aus f und g' zu ersetzen.

Lemma 8.16 (Partielle Integration). *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt*

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f'(x)\cdot g(x) = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)\cdot g'(x).$$

Beweis. Nach Definition ist $f(x)\cdot g(x)$ eine Stammfunktion seiner Ableitung $\big(f(x)\cdot g(x)\big)'$, so dass

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_{x=a}^{b}.$$

Nach der Produktregel der Differentiation ist die Ableitung $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$, so dass wir den Ausdruck auch zu

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big) = \int_a^b \mathrm{d}x\ \big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_{x=a}^{b}.$$

umschreiben können. Mit der Linearität des Integrals folgt daraus direkt die Behauptung. □

Beispiel 8.17. Wir wollen nun sehen, wie wir die partielle Integration verwenden können, um das Integral aus Beispiel 8.15 zu berechnen; wir wählen dazu $f'(x) = g(x) = \cos(x)$, so dass $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = -\sin(x)$.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \underbrace{\cos^2(x)}_{=f'(x)\cdot g(x)} &= \underbrace{\sin(x)\cdot\cos(x)}_{=f(x)\cdot g(x)} - \int \mathrm{d}x\ \underbrace{\sin(x)\cdot(-\sin(x))}_{=f(x)\cdot g'(x)}\\ &= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int \mathrm{d}x\ \sin^2(x)\\ &= \sin(x)\cdot\cos(x) + \int \mathrm{d}x\ \big(1 - \cos^2(x)\big)\end{aligned}$$

Bringen wir nun wie zuvor den Term $\int \mathrm{d}x \cos^2(x)$ auf die linke Seite und teilen den Ausdruck durch 2, so erhalten wir das Ergebnis

$$\int \mathrm{d}x\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}\sin(x)\cdot\cos(x) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x;$$

dabei haben wir, um das Ergebnis in die Form aus Beispiel 8.15 zu bringen, im letzten Schritt das Additionstheorem $\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$ verwendet.

Aufgabe 8.18. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe partieller Integration.

i) $\int \mathrm{d}x\ \sin^2(x)$ ii) $\int \mathrm{d}x\, x\cdot\sin(x)$ iii) $\int \mathrm{d}x\, x^2\cdot\cos(x)$

Aufgabe 8.19. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe partieller Integration.

$$\text{i)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\ \sin(x)\cdot\cos(x) \qquad \text{ii)} \int \mathrm{d}x\ \tan(x) \qquad \text{iii)} \int_0^1 \mathrm{d}x\, x\cdot e^x$$

Um noch mehr Routine mit der Integration von Funktionen zu bekommen, betrachten wir einige weitere Beispiele.

Aufgabe 8.20. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{i)} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos^2(x)+\sin^2(x) \qquad \text{ii)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2\cdot e^{-x} \qquad \text{iii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\ \cos(x)\cdot(x^2+3x+1)$$

$$\text{iv)} \int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{x+4}{\frac{1}{2}x^2+4x} \qquad \text{v)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\ \frac{x+1}{x^2+2x+1} \qquad \text{vi)} \int_{-} \infty^{\infty}\, \mathrm{d}x\, x^3\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{vii)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\ \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Aufgabe 8.21. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{i)} \int \mathrm{d}x\, x\cdot\ln(x) \qquad \text{ii)} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, x\cdot\cos(x) \qquad \text{iii)} \int \mathrm{d}x\ \ln(x) = \int \mathrm{d}x\ \ln(x)\cdot 1$$

$$\text{iv)} \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^2 e^{x^3} \qquad \text{v)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\, x\cdot\sin(x^2-\pi)$$

Abschließend wollen wir uns noch einen Trick anschauen, der in der Physik gelegentlich verwendet wird und sich zu Nutzen macht, dass Integration und Differentiation nach verschiedenen Variablen vertauschen:

Beispiel 8.22. Um die Stammfunktion von $f(x) = x\cdot e^{ax}$ zu bestimmen, können wir ausnutzen, dass f nicht nur von x sondern auch von der Variable a abhängt und dass die Funktion f gerade die Ableitung nach a der einfacheren Funktion e^{ax} ist: $\frac{\partial}{\partial a}(e^{ax}) = x\cdot .e^{ax}$.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\, x\cdot e^{ax} &= \int \mathrm{d}x\ \frac{\partial}{\partial a}(e^{ax}) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial a}\int \mathrm{d}x\ e^{ax} \\
&= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) \\
&= \frac{a\cdot x e^{ax} - e^{ax}}{a^2} \\
&= \frac{a\cdot x - 1}{a^2}\cdot e^{ax}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im mit $(*)$ markierten Schritt die Integration mit der Integrationsvariablen x und die Differentiation nach der Variablen a vertauscht. Um zu zeigen, dass wir dies machen dürfen, müssen wir uns mit der Analysis mehrerer Veränderlicher beschäftigen; dies ist ist Teil der Vorlesung „Analysis II“.

Aufgabe 8.23. Berechnen Sie das folgende Integral, indem Sie den gerade gezeigten Feynman-Trick verwenden.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\, x\cdot\cos(ax)$$

Wir schließen das Kapitel mit zwei Aufgaben zu Integralen ab, die regelmäßig in der Physik zu finden sind.

Aufgabe 8.24 (Knobelaufgabe)**.** In der Physik spielt zum Beispiel in der Thermodynamik die Gamma-Funktion, die eine Verallgemeinerung der Fakultät ist, eine Rollen. Diese ist für $x\in\mathbb{R}_{>0}$ definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, t^{x-1}e^{-t}.$$

a) Zeigen Sie die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$.

b) Zeigen Sie mit einer vollständigen Induktion, dass für $n\in\mathbb{N}_{>0}$ dann gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Aufgabe 8.25 (Knobelaufgabe)**.** Lösen Sie das folgende Integral für a, $b\in\mathbb{R}$ und $a>0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\mathrm{d}x$$

Tipp: Bringen Sie zunächst das Argument der Exponentialfunktion auf eine geeignete Form und nutzen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Differentialgleichungen

Unter einer **Differentialgleichung** verstehen wir eine Gleichung, in der unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen von Funktionen auftreten. Um diese wage klingende Definition verständlicher zu machen betrachten wir einige einfache Beispiele.

Beispiel 9.1. In der Gleichung

$$y' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = y$$

taucht sowohl die Funktion y als auch deren Ableitung y' nach der unabhängigen Variable x auf. So dass sie ein Beispiel für eine Differentialgleichung darstellt. Diese Gleichung drückt aus, dass die Funktion y gerade ihrer Ableitung y' entspricht. Mit der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ haben wir eine Funktion kennengelernt, die diese Eigenschaft besitzt. Damit ist aber natürlich ist auch $x \mapsto 2 \cdot e^x$ eine Lösung und wir erhalten für eine beliebige Konstante $xc \in \mathbb{R}$ die Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c \cdot e^x.$$

Wir werden das im Rahmen dieser Vorlesung nicht zeigen, aber darüberhinaus gibt es keine weiteren Lösungen.

Beispiel 9.2. Als nächstes betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' - \frac{1}{2y} = 0.$$

Die Ableitung y' der Funktion entspricht also bis auf den Faktor $1/2$ dem Reziproken $1/y$ der Funktion. Machen wir für die Funktion den Ansatz $y(x) = x^\alpha$, so erhalten wir aus der Differentialgleichung $\alpha \cdot x^{\alpha-1} = 1/2x^{-\alpha}$. Daraus ergibt sich für die Exponenten $\alpha - 1 = -\alpha$, so dass wir die Lösung $\alpha = 1/2$ erhalten. Insgesamt haben wir damit die Lösung

$$y(x) = \sqrt{x}$$

„erraten“ und können diese durch Einsetzen verifizieren. In diesem Fall ist die Lösung nur eindeutig bis auf „Verschieben des Arguments um eine Konstanten“, die allgemeine Lösung ist demnach $x \mapsto \sqrt{x+c}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Diese Raten von Lösungen erscheint sehr unbefriedigend, so dass wir uns als nächstes mit systematischen Verfahren beschäftigen wollen Differentialgleichung zu lösen. Bevor wir dies tun, klassifizieren wir aber zunächst die auftretenden Differentialgleichungen.

Definition 9.3. Wir nennen eine Differentialgleichung in der nur erste und keine höheren Ableitungen auftauchen eine **Differentialgleichung erster Ordnung**. Entsprechend bezeichnen wir als Differentialgleichung n-ter Ordnung eine Differentialgleichung in der höchstens Ableitungen bis zur n-ten Ableitung vorkommen. Wenn die Gleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist, nennen wir sie **explizit**, sonst **implizit**. Können wir eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung als Produkt aus Termen, die nur von der unabhängigen bzw. nur von der abhängigen Variable abhängen, schreiben d.h.

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{9.1}$$

so nennen wir die Differentialgleichung **separabel**.

Eine solche separable Differentialgleichung ist äquivalent zur Integralgleichung

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \mathrm{d}x\, f(x). \tag{9.2}$$

Dies können wir „sehen“ indem wir die Ableitung der Funktion y als Quotient der Differentiale dy und dx auffassen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = f(x) \cdot g(y)$$

und mit diesen formal rechnen („Trennung der Variablen“)

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x f(x).$$

Durch Integrieren erhalten wir daraus Gleichung (9.2).

Beispiel 9.4. Um uns mit der Methode der „Trennung der Variablen“ vertraut zu machen, betrachten wir ein sogenanntes **Anfangswertproblem** bestehend aus der Differentialgleichung aus Beispiel 9.2

$$y' - \frac{1}{2y} = 0 \tag{9.3}$$

und dem **Anfangswert** $y(0) = 1$.
Die betrachtete Differentialgleichung (9.3) ist separabel mit $f(x) = 1$ und $g(y) = \frac{1}{2y}$ (siehe Gleichung (9.1)), setzen wir dies in die Integralgleichung (9.2) ein so ergibt sich

$$\int \mathrm{d}y\, 2y = \int \mathrm{d}x\, 1.$$

Beide Seiten lassen sich einfach lösen und wir erhalten

$$y^2 = \int \mathrm{d}y\, 2y = \int \mathrm{d}x\, 1 = x + c,$$

so dass

$$y(x) = \sqrt{x+c},$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist. Aus der Anfangsbedingung können wir den Wert der Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$ bestimmen.

$$1 = y(0) = \sqrt{0+c} = \sqrt{c} \Rightarrow c = 1.$$

Aufgabe 9.5. Lösen Sie die folgenden expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung mittels Trennung der Variablen.

a) $y' = -y$

b) $y' = \sqrt{y}$

c) $y' = y^2$

Aufgabe 9.6. Lösen Sie die folgenden expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung mittels Trennung der Variablen.

a) $y' = 2xy$

b) $y' = 4x^2 y$

c) $y' = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Aufgabe 9.7. Lösen Sie das Anfangswertproblem mittels Trennung der Variablen $y' = 2\sin(x)y$ mit $y(0) = 1$.

Nachdem wir uns nun mit der Methode der „Trennung der Variablen“ vertraut gemacht haben, wollen wir diese noch etwas verallgemeinern und definieren dazu zunächst, was wir unter einer linearen Differentialgleichung verstehen.

Definition 9.8. Differentialgleichungen der Form

$$y' + g(x)y = h(x)$$

bezeichnen wir als **lineare Differentialgleichung**. Ist $h(x) = 0$, so ist die Differentialgleichung separabel und wir sprechen von einer **homogenen Differentialgleichung**, solche können wir mittels „Trennung der Variablen“ lösen. Ist hingegen $h(x) \neq 0$, so nennen wir die Differentialgleichung **inhomogen** und die Differentialgleichung ist nicht länger separabel.

Eine lineare, homogene Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = 0$$

können wir nach dem Verfahren der „Trennung der Variablen“ formal lösen:

$$\begin{aligned}
& y' + g(x)y = 0 \\
\Longleftrightarrow & \int \mathrm{d}y \frac{1}{y} = -\int \mathrm{d}x\, g(x) \\
\Longleftrightarrow & \ln|y| = -G(x) + \tilde{c} && \text{mit einer Stammfunktion } G \text{ von } g \\
\Longleftrightarrow & |y| = e^{-G(x)} \cdot e^{\tilde{c}}
\end{aligned}$$

so dass

$$y(x) = c \cdot e^{-G(x)} \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Die Idee zum Lösen inhomogener Differentialgleichungen von Joseph-Lois Lagrange (1736-1813) besteht darin für die inhomogene Differentialgleichung den Ansatz

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-G(x)}$$

zu machen. Aus der Differentialgleichung erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
y'(x) &= c'(x) \cdot e^{-G(x)} - c(x) \cdot g(x) e^{-G(x)} \\
&= c'(x) \cdot e^{-G(x)} - y(x) \cdot g(x)
\end{aligned}$$

die Differentialgleichung für c

$$\begin{aligned}
h(x) &= y'(x) + g(x) \cdot y(x) \\
&= c'(x) \cdot e^{-G(x)} - y(x) \cdot g(x) + g(x) \cdot y(x) \\
&= c'(x) \cdot e^{-G(x)}.
\end{aligned}$$

Diese separable Differentialgleichung

$$c' = h(x) e^{G(x)}$$

können wir mittels „Trennung der Variablen“ lösen.
Wegen des Ansatzes die Integrationskonstante c als „variable“ Funktion $C(x)$ aufzufassen, wird dieses Verfahren „Variation der Konstanten“ genannt.

Beispiel 9.9. Um die inhomogene Differentialgleichung

$$y' + 2y\cos x = \frac{1}{2}\cos x$$

zu lösen, betrachten wir zunächst die homogene Differentialgleichung

$$y' + 2y\cos x = 0$$

und lösen diese mittels „Trennung der Variablen“

$$\begin{aligned}
& \int \mathrm{d}y \frac{1}{y} = -2 \int \mathrm{d}x\, \cos x \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln|y| = -2\sin x + \tilde{c} && \text{für ein } \tilde{c} \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow \quad & |y| = e^{-2\sin x} + e^{\tilde{c}} \\
\Longleftrightarrow \quad & y = c \cdot e^{-2\sin x} && \text{für ein } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Für das inhomogene System machen wir somit den Ansatz

$$y(x) = c(x) e^{-2\sin x},$$

so dass

$$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x)\cdot e^{-2\sin x} - 2\cos x \cdot c(x) e^{-2\sin x} \\ &= c'(x)\cdot e^{-2\sin x} - 2\cos x \cdot y(x) \end{aligned}$$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cos x &= y'(x) + 2y(x)\cos x \\ &= c'(x) e^{-2\sin x} \\ \iff \int \mathrm{d}c\, 1 &= \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\cos x e^{2\sin x} = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}z e^{z} = \frac{1}{4} e^{2\sin x} + \tilde{c} \\ \iff \quad c(x) &= \frac{1}{4} e^{2\sin x} + \tilde{c} && \text{für ein } \tilde{c}\in\mathbb{R} \\ \iff \quad y(x) &= \frac{1}{4} + \tilde{c} e^{2\sin x} \end{aligned}$$

Aufgabe 9.10. Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = 1 + x - y.$$

mittels Variation der Konstanten

Aufgabe 9.11. Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen mittels Variation der Konstanten

a) $2y' - 3y = 4$

b) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^{x^2}$

Aufgabe 9.12. Lösen Sie das Anfangswertproblem mittels Variation der Konstanten $y' + 2xy = 3\exp(-x^2)$ mit $y(0) = 1$.

Als nächstes wollen wir uns anhand von zwei Beispielen mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung auseinandersetzen. Im ersten Beispiel stellen wir eine systematische Vorgehensweise für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung anhand eines einfachen Beispiels vor. Wogegen wir im zweiten ein Standardbeispiel aus der Elektrodynamik, den ungedämpften Schwingkreis, lösen.

Beispiel 9.13. Im als homogen angenommenen Schwerefeld der Erde erfährt ein Massenpunkt eine Beschleunigung von $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$ in Richtung Erdmittelpunkt.

$$\ddot{x} = -g \qquad \text{bzw.} \qquad m\ddot{x} = -mg$$

wobei wir mit x die Höhe über der Erdoberfläche bezeichnen. In der zweiten Formulierung haben wir beide Seiten mit der Masse m der Punktmasse multipliziert und dadurch in die Form des zweiten Newtonschen Gesetz „die zeitliche Änderung des Impulses $p = m\dot{x}$ entspricht der angreifenden Kraft F“.
Die zugrundeliegende Idee beim Lösen von Differentialgleichungen höherer Ordnung ist es, die Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu überführen. Dazu führen wir die Bezeichnung $v := \dot{x}$ ein, in unserem Fall können wir diese direkt als die Geschwindigkeit der Punktmasse interpretieren. Mit dieser Definition können wir die Differentialgleichung umschreiben zu

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g \\ \dot{x} &= \quad v. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen wird das so entstehende System von Differentialgleichungen erster Ordnung gekoppelt sein, das heißt die Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander lösbar, in diesem Fall ist es erforderlich mit Methoden der linearen Algebra das System zu entkoppeln und anschließend zu lösen. Im hier betrachteten Beispiel ist dagegen die erste Differentialgleichnung unabhängig von der zweiten und lässt sich einfach lösen.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g \\ \iff \int \mathrm{d}v\, 1 &= -\int \mathrm{d}t g \\ \iff \quad v(t) &= -gt + c_1 && \text{für ein } c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Diese Lösung können wir nun die zweite Differentialgleichung einsetzen und diese ihrerseits lösen.

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = v(t) = -gt + c_1 \\
\iff &\int \mathrm{d}x\, 1 = -\int \mathrm{d}t - gt + c_1 \\
\iff &\quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 && \text{für ein } c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Es bleibt die Integrationskonstanten, im Fall einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gibt es gerade zwei, anhand von Anfangsbedingungen zu bestimmen. Betrachten wir einen Massepunkt der zum Zeitpunkt $t = 0$ in einer Höhe von $x(0) = x_0$ mit einer Geschwindigkeit von $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ in vertikaler Richtung bewegt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_0 = x(0) &= -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 && \implies \quad c_2 = x_0 \\
\text{und} \quad v_0 = \dot{x}(0) &= v(0) = -g \cdot 0 + c_1 = c_1 && \implies \quad c_1 = v_0.
\end{aligned}$$

Die Bewegung eines Massepunktes im als homogen angenommenen Schwerefeld der Erde mit den angegebenen Anfangswerten lässt sich also durch die aus der Schule bekannte Formel

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

beschreiben.

Beispiel 9.14. Als zweites Beispiel wollen wir uns einen Schwingkreis, das ist eine Schaltung aus einem Kondensator und einer Spule, anschauen. Dazu rufen wir uns zunächst in Erinnerung, dass die Induktionsspannung einer Spule mit Induktivität L durch $U_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ und die an einem Kondensator mit Kapazität C anliegende Spannung durch $U_C = \frac{Q}{C}$ gegeben ist. In diesen Ausdrücken haben wir wie üblich die Spannungen mit U, die Stromstärke mit I und die Ladung mit Q bezeichnet. Zudem wollen wir verwenden, dass in einer Reihenschaltung wie dem Schwingkreis die Kirchhoffsche Maschenregel gilt, nach der die Summe aller Spannungen in einer Masche 0 ergibt.

$$\sum_k U_k = 0 \qquad \text{(Kirchhoffsche Maschenregel)}$$

Im Schwingkreis mit den angegebenen Spannungen erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
0 &= U_L + U_C \\
&= L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C}
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Rufen wir uns in Erinnerung, dass die Stromstärke I gerade die zeitliche Änderung der Ladung Q ist, so sehen wir, dass die Gleichung (9.4) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der abhängigen Variable Q ist. Wir können diese differenzieren um daraus eine Differentialgleichung für die Stromstärke I zu erhalten

$$0 = L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C} \cdot I.$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, machen wir den Ansatz $I(t) = ke^{\lambda t}$. Durch Einsetzen des Ansatzes erhalten wir

$$\begin{aligned}
&0 = L \cdot \lambda^2 I(t) + \frac{1}{C} \cdot I \\
\implies \quad &0 = L \cdot \lambda^2 + \frac{1}{C} \\
\iff \quad &\lambda = \pm\sqrt{\frac{-1}{LC}} = \pm i \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} =: \pm i \cdot \omega.
\end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung erhalten wir somit zwei mögliche Werte für den Parameter λ aus dem gemachten Ansatz. Wie zum Anfang unserer Betrachtung von Differentialgleichungen erster Ordnung mussten wir an dieser Stelle den richtigen Ansatz raten. Wir können auch hier prinzipiell systematisch vorgehen und die Differentialgleichung mittels einer Fourier-Transformation umschreiben, diese werde als Teil der weiterführenden

Mathematik-Vorlesungen behandelt werden.
Die allgemeine Lösung einer solchen linearen Differentialgleichung ist die Linearkombination der beiden Lösungen für $\lambda = \pm i\omega$ (siehe Aufgabe 9.15)

$$I(t) = k_1 e^{i\omega t} + k_2 e^{-i\omega t}$$

für zwei Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Um diese Integrationskonstanten k_1 und k_2 zu bestimmen, müssen wir uns Anfangsbedingungen für die Stromstärke I und ihre zeitliche Änderung $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ vorgeben. Wir wollen hier den Fall betrachten, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ eine stationärer Stromstärke $I(0) = I_0$ mit $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ durch den Schwingkreis fließt. Aus diesen Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} I_0 = I(0) &= k_1 e^{i\omega\cdot 0} + k_2 e^{-i\omega\cdot 0} = k_1 + k_2 \\ \text{und } 0 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(0) &= k_1(i\omega)e^{i\omega\cdot 0} + k_2(-i\omega)e^{-i\omega\cdot 0} = i\omega k_1 - i\omega k_2 \qquad \Longrightarrow \qquad k_1 = k_2. \end{aligned}$$

Setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein, so erhalten wir

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2} I_0.$$

Insgesamt können wir somit die Lösung der Differentialgleichung schreiben als

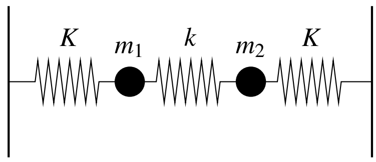
$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \\ &= I_0 \cos(\omega t). \end{aligned}$$

In einem Schwingkreis schwingt bei den von uns vorgegebenen Anfangsbedingungen die Stromstärke I demnach als Cosinusschwingung mit einer Amplitude von I_0.

Aufgabe 9.15. Zeigen Sie, dass eine Linearkombination $\alpha \cdot y + \beta \tilde{y}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zweier Lösungen y und $\tilde{y}$ einer linearen, homogenen Differentialgleichung (siehe Definition 9.8) selbst ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Aufgabe 9.16 (Gekoppelte Schwinger)**.** Die gekoppelte Schwingung zweier gleichschwerer Massen m_1 und m_2 kann mittels der folgenden Differentialgleichungen beschreiben werden.

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2) \tag{9.5}$$
$$m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1) \tag{9.6}$$



Dabei stehen x_1 und x_2 für die Auslenkung der Massen m_1 und m_2 aus ihrer Ruhelage und die Federkonstanten sind mit k und K wie in der Abbildung bezeichnet.
Beide Differentialgleichungen sind gekoppelt, so dass wir, anders als in der Vorlesung, nicht beide Gleichungen einzeln lösen können, sondern diese zunächst entkoppelt müssen. Dazu gehen wir wiefolgt vor.

a) Bestimmen Sie die Summe $(1)+(2)$ und Differenz $(1)-(2)$ der beiden Differentialgleichungen.

b) Substituieren Sie $s := x_1 + x_2$ und $d := x_1 - x_2$ in beiden Differentialgleichungen.

c) Lösen Sie die entkoppelten Differentialgleichungen für s und d.

d) Bestimmen Sie Auslekungen $x_1 = \frac{s+d}{2}$ und $x_2 = \frac{s-d}{2}$.