Euler – mit seinem Latein am Ende

Andreas Defant

17. Tag der Mathematik, 28. August 2017

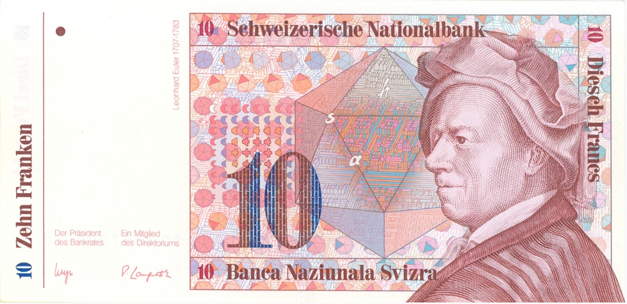
Sudoku

3	1	6	7	2	8	9	5	4
8	7	5	1	4	9	2	6	3
2	9	4	6	5	3	7	8	1
6	5	7	8	9	4	3	1	2
1	8	2	5	3	7	4	9	6
9	4	3	2	1	6	8	7	5
7	2	8	4	6	5	1	3	9
4	6	9	3	8	1	5	2	7
5	3	1	9	7	2	6	4	8

Lateinische Quadrate

Leonhard Euler, 1707-1783


SCHWEIZERISCHE NATIONALBANK
BANCA NAZIUNALA SVIZRA
10
Leonhard Euler
1707–1783
Zehn Franken
Diesch Francs
10


10 Schweizerische Nationalbank
10
Diesch Francs
Leonhard Euler 1707-1783
10 Zehn Franken
Der Präsident
des Bankrates
Ein Mitglied
des Direktoriums
10 Banca Naziunala Svizra

Eine von Eulers vielen Endeckungen – die Eulersche Zahl

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= 2.71828182845904523536028747135266249775724709369
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
995957496696762772407663035354759457138217852516642 \\
742746639193200305992181741359662904357290033429526 \\
059563073813232862794349076323382988075319525101901 \\
157383418793070215408914993488416750924476146066808 \\
226480016847741185374234544243710753907774499206955 \\
170276183860626133138458300075204493382656029760673 \\
711320070932870912744374704723069697720931014169283 \\
681902551510865746377211125238978442505695369677078 \\
544996996794\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Lateinische Quadrate

Beispiel der Ordnung $N = 5$:

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Lateinische Quadrate

Beispiel der Ordnung $N = 5$:

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Definition

Ein lateinisches Quadrat der Ordnung N ist eine $N \times N$ Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis N vorkommen.

Warum spricht man von lateinischen Quadraten?

Warum spricht man von lateinischen Quadraten?

a	b	c	d	e
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c
e	a	b	c	d

Katharina die Große, 1729-1796

Katharinas Wunsch an den Meister

"Verehrter Meister Euler, hier sind 36 Offiziere, je 6 aus 6 verschiedenen Regimentern, bei 6 verschiedenen Offiziersgraden.

Katharinas Wunsch an den Meister

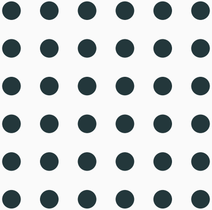
"Verehrter Meister Euler, hier sind 36 Offiziere, je 6 aus 6 verschiedenen Regimentern, bei 6 verschiedenen Offiziersgraden.

Bitte nennen Sie mir eine quadratische Tanzformation genau dieser Offiziere, derart dass in jeder waagerechten und jeder senkrechten Kolonne sowohl alle Regimenter als auch alle Offiziersgrade vertreten sind!"

Katharinas Wunsch an den Meister

"Verehrter Meister Euler, hier sind 36 Offiziere, je 6 aus 6 verschiedenen Regimentern, bei 6 verschiedenen Offiziersgraden.

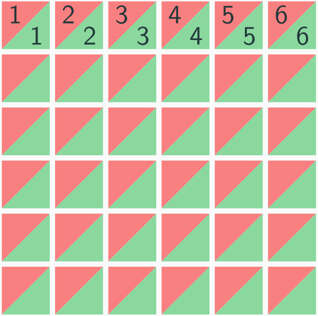
Bitte nennen Sie mir eine quadratische Tanzformation genau dieser Offiziere, derart dass in jeder waagerechten und jeder senkrechten Kolonne sowohl alle Regimenter als auch alle Offiziersgrade vertreten sind!"



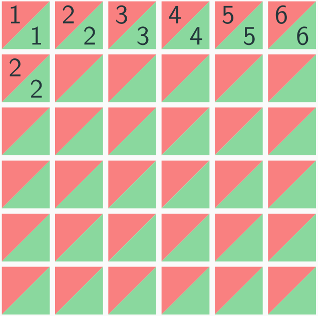
Probieren ...

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

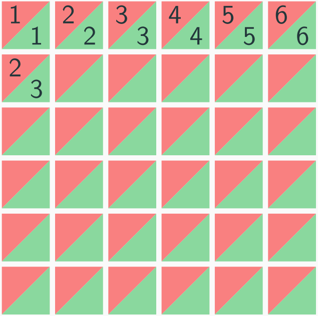
Probieren …



Probieren ...



Probieren ...



Probieren ...

1 / 1	2 / 2	3 / 3	4 / 4	5 / 5	6 / 6
2 / 3					
3 / 4					
4 / 5					
5 / 6					
6 / 2					

Probieren ...

1 / 1	2 / 2	3 / 3	4 / 4	5 / 5	6 / 6
2 / 3	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?
3 / 4	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?
4 / 5	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?
5 / 6	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?
6 / 2	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?	? / ?

Euler – mit seinem Latein am Ende

Euler – mit seinem Latein am Ende

Verblüffend: Katharinas Wunsch ist nicht zu erfüllen!

Euler – mit seinem Latein am Ende

Verblüffend: Katharinas Wunsch ist nicht zu erfüllen!

Dies wurde aber erst 130 Jahre später durch Gaston Tarry, 1843-1913, bewiesen:

Warum verblüffend? Bei Tanzformationen mit 5 oder auch 7 Regimentern und Offiziersgraden klappt das!

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3
4 3	5 4	1 5	2 1	3 2
5 2	1 3	2 4	3 5	4 1

Warum verblüffend? Bei Tanzformationen mit 5 oder auch 7 Regimentern und Offiziersgraden klappt das!

1 / 1	2 / 2	3 / 3	4 / 4	5 / 5
2 / 5	3 / 1	4 / 2	5 / 3	1 / 4
3 / 4	4 / 5	5 / 1	1 / 2	2 / 3
4 / 3	5 / 4	1 / 5	2 / 1	3 / 2
5 / 2	1 / 3	2 / 4	3 / 5	4 / 1

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Umgekehrt ...

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Umgekehrt . . .

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3
4 3	5 4	1 5	2 1	3 2
5 2	1 3	2 4	3 5	4 1

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Orthogonalität

Definition
Zwei lateinische Quadrate der Ordnung N, bei denen beim Übereinanderlegen alle möglichen $N \times N$ Zahlenpaare vorkommen, werden als orthogonal bezeichnet.

Orthogonal:

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3
4 3	5 4	1 5	2 1	3 2
5 2	1 3	2 4	3 5	4 1

Orthogonal:

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

1 1	2 2	3 3	4 4	5 5
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3
4 3	5 4	1 5	2 1	3 2
5 2	1 3	2 4	3 5	4 1

Nicht orthogonal:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

1 2	2 1	3 3
3 3	1 2	2 1
2 1	3 3	1 2

Orthogonal:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1 1	2 2	3 3
2 3	3 1	1 2
3 2	1 3	2 1

Eulers Vermutung

Katharinas Wunsch in mathematischer Sprache

Bitte, verehrter Meister Euler, ich brauche zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 6×6 !

Eulers Vermutung

Katharinas Wunsch in mathematischer Sprache

Bitte, verehrter Meister Euler, ich brauche zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung 6×6 !

Eulers Vermutung, 1782

Zwei orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung N gibt es genau dann, wenn N beim Teilen durch 4 einen Rest verschieden von 2 hat, also

$$\boldsymbol{N = \cancel{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ 8,\ 9,\ \cancel{10},\ 11,\ 12,\ 13,\ \cancel{14},\ 15,\ \ldots\ldots}$$

Die gefeierte Lösung

Euler lag falsch:

$$N = \cancel{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ 8,\ 9, 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ \ldots\ldots$$

Die gefeierte Lösung

Euler lag falsch:

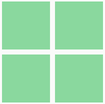
$$N = \cancel{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ 8,\ 9, 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ \ldots\ldots$$

Theorem von Bose, Shrikhande und Parker, 1960

- Für $N = 2$ und $N = 6$ gibt es keine orthogonalen lateinischen Quadrate der Ordnung N.
- Sonst immer!

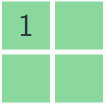
Der einfachste Fall:

Erster Versuch



Der einfachste Fall:

Erster Versuch



Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	

Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	1

Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	1

Zweiter Versuch

Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	1

Zweiter Versuch

2	

Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	1

Zweiter Versuch

2	1
1	

Der einfachste Fall:

Erster Versuch	
1	2
2	1

Zweiter Versuch	
2	1
1	2

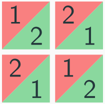
Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	1

Zweiter Versuch

2	1
1	2



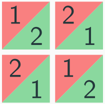
Der einfachste Fall:

Erster Versuch

1	2
2	1

Zweiter Versuch

2	1
1	2



Die einzigen zwei Quadrate sind offenbar nicht orthogonal!

Warum hatte Euler Probleme?

Ziel: $\boldsymbol{N = \cancel{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ 8,\ 9, 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ \ldots\ldots}$

Warum hatte Euler Probleme?

Ziel: $N = \cancel{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ 8,\ 9, 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ \ldots\ldots$

Die Anzahl lateinischer Quadrate der Ordnung N:

N=2: 2

N=3: 12

N=4: 576

N=5: 161 280

N=6: 812 851 200

N=7: 61 479 419 904 000

N=8: 108 776 032 459 082 956 800

N=9: 5 524 751 496 156 892 842 531 225 600

N=10: 9 982 437 658 213 039 871 725 064 756 920 320 000

N=11: ....

Warum hatte Euler Probleme?

Ziel: $N = \cancel{2}, 3, 4, 5, \cancel{6}, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\ldots$

Die Anzahl lateinischer Quadrate der Ordnung N:

N=2: 2

N=3: 12

N=4: 576

N=5: 161 280

N=6: 812 851 200

N=7: 61 479 419 904 000

N=8: 108 776 032 459 082 956 800

N=9: 5 524 751 496 156 892 842 531 225 600

N=10: 9 982 437 658 213 039 871 725 064 756 920 320 000

N=11: ....

Zum Vergleich:

Es gibt 6 670 903 752 021 072 936 960 viele Sudokus.

Am Rande – Formel für die Anzahl $L(N)$ aller Lateinischen Quadrate ist unbekannt!

Am Rande – Formel für die Anzahl $L(N)$ aller Lateinischen Quadrate ist unbekannt!

Eine Abschätzung

$$\frac{(N!)^{2N}}{N^{N^2}} \;\leq\; L(N) \;\leq\; \prod_{k=1}^{N} (k!)^{\frac{N}{k}}$$

Die Anzahl der Paare orthogonaler Quadrate der Ordung N:

N=2: 0

N=3: 36

N=4: 3 456

N=5: 3 110 400

N=6: 0

N=7: 313 183 438 848 000

N=8: ....

Die Wahrscheinlichkeit aus allen Paaren lateinischer Quadrate der Ordung 7 zufällig ein orthogonales Paar zu ziehen:

Die Wahrscheinlichkeit aus allen Paaren lateinischer Quadrate der Ordung 7 zufällig ein orthogonales Paar zu ziehen:

$$\frac{\text{alle orthogonalen Paare}}{\text{alle möglichen Paare}}$$

$$= \frac{313183438848000}{\frac{61479419904000\times(61479419904000-1)}{2}} \sim \frac{1}{10^{41}}$$

Zur Ordnung $N = 7$ – lateinische Quadrate als Rechentafeln

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Zur Ordnung $N = 7$ – lateinische Quadrate als Rechentafeln

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Formel: $i \star j = (i \times 1) + j \bmod 7$

Zur Ordnung $N = 7$ – lateinische Quadrate als Rechentafeln

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Formel: $i \star j = (i \times 1) + j$ mod 7

Formel: $i \star j = (i \times 2) + j$ mod 7

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0	1
2	4	5	6	0	1	2	3
3	6	0	1	2	3	4	5
4	1	2	3	4	5	6	0
5	3	4	5	6	0	1	2
6	5	6	0	1	2	3	4

Zur Ordnung $N = 7$ – lateinische Quadrate als Rechentafeln

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Formel: $i \star j = (i \times 1) + j$ mod 7

Formel: $i \star j = (i \times 2) + j$ mod 7

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0	1
2	4	5	6	0	1	2	3
3	6	0	1	2	3	4	5
4	1	2	3	4	5	6	0
5	3	4	5	6	0	1	2
6	5	6	0	1	2	3	4

Diese beiden lateinischen Quadrate sind orthogonal!

Wir finden ein ganzes Nest!

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
3	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
4	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
5	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
6	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Formel: $i \star j = (i \times r) + j$ mod $7\,,$ wobei $r = 1, \ldots, 6$

Wir finden ein ganzes Nest!

$\star$	0	1	2	3	4	5	6
0	·	·	·	·	·	·	·
1	·	·	·	·	·	·	·
2	·	·	·	·	·	·	·
3	·	·	·	·	·	·	·
4	·	·	·	·	·	·	·
5	·	·	·	·	·	·	·
6	·	·	·	·	·	·	·

Formel: $i \star j = (i \times r) + j \text{ mod } 7\,,\quad$ wobei $r = 1, \ldots, 6$

Das sind 6 lateinischen Quadrate, die paarweise orthogonal sind!

Wie groß können solche Nester sein?

Definition

$$O(N) \; = \; \text{die größtmögliche Kardinalität einer Menge lateinischer Quadrate, in der je zwei orthogonal sind}$$

Wie groß können solche Nester sein?

Definition

$$O(N) \; = \; \text{die größtmögliche Kardinalität einer Menge lateinischer Quadrate, in der je zwei orthogonal sind}$$

Eben gezeigt:

$$O(7) \geq 6$$

Theorem

$$O(N) \leq N - 1$$

Theorem

$$O(N) \leq N - 1$$

Beweis

Angenommen, wir haben ein solches Nest mit M vielen Quadraten. Wir müssen zeigen: $M \leq N - 1$

- Wir dürfen annehmen, dass alle Quadrate als erste Zeile $1, \ldots, N$ haben. Warum?
- Dann haben alle Quadrate am Anfang der zweiten Zeile keine 1. Warum?
- Weiter haben alle Quadrate am Anfang der zweiten Zeile verschiedene Zahlen. Warum?

Mit diesen drei Aussagen folgt leicht die Behauptung: $M \leq N - 1$. $\square$

Wissen damit z.b.:

$$O(7) = 6$$

Wissen damit z.b.:

$$O(7) = 6$$

Theorem

$$O(N) = N - 1\,, \quad \text{wobei } N = p^n \text{ Potenz einer Primzahl}$$

Zum Beweis .

$\star$	0	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$p^n - 1$
0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$p^n - 1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Formel: $i \star j = (i \otimes r) \oplus j \mod p^n$, wobei $r = 1, \ldots, p^n - 1$

Diese $p^n - 1$ vielen lateinischen Quadrate sind paarweise orthogonal! $\square$

Theorem

$$O(N) = N - 1\,, \quad \text{wobei } N = p^n \text{ Potenz einer Primzahl}$$

Theorem

$$O(N) = N - 1\,, \quad \text{wobei } N = p^n \text{ Potenz einer Primzahl}$$

Wie weit kommen wir damit?

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$O(N)$	1	2	3	4	0	6	7	9	?	10	?	12	...

Theorem

$$O(N) = N - 1\,, \quad \text{wobei } N = p^n \text{ Potenz einer Primzahl}$$

Wie weit kommen wir damit?

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$O(N)$	1	2	3	4	0	6	7	9	?	10	?	12	...

Und immer bleiben weitere Probleme:

$$O(10) = ?$$

Spiel oder Anwendung?

- Tests
- Agrarwissenschaften
- ???

Spiel oder Anwendung?

- Tests
- Agrarwissenschaften
- ???