

Analysis II

Skript zu den Vorlesungen an der Uni Oldenburg:
Analysis IIa: Integralrechnung einer Variablen und Differentialgleichungen
Analysis IIb: Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher
Prof. Dr. Daniel Grieser

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik
26111 Oldenburg
E-Mail: daniel.grieser@uni-oldenburg.de

Bearbeitung der ersten

Skriptversion von 2006: Uwe Batterham, Hajo Busemann, Rebecca Döll, Stefan Grahl,
Stefan Hellbusch, Andreas Hettler, Robert von Massow,
Roman Rathje, Jörg Sauter, Heike de Vries, Hero Wanders,
Stefanie Arend, Marlies Händchen und André Tempel (Illustrationen).

Titelgestaltung: Christina Roofs

Veröffentlicht zu den Creative-Commons-Bedingungen 

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

Zuletzt bearbeitet: **4. August 2022**

Vorwort

Eine erste Version dieses Skripts ist im Sommersemester 2006 parallel zur Vorlesung Analysis II unter Mitarbeit von Hörerinnen und Hörern der Vorlesung entstanden. In den Sommersemestern 2010 und 2014, 2015 und 2018 habe ich es noch einmal stark überarbeitet.

Das Skript ist recht umfangreich, für eine vier-stündige Vorlesung wird man einige Themen auslassen müssen oder nur andeuten können. Zum Beispiel konnte ich die Abschnitte 7.7, 8.3 und 8.4 in der Vorlesung nicht bzw. nur ansatzweise behandeln, sie sind aber zur Eigenlektüre empfohlen.

Wie schon beim Analysis I Skript, das inzwischen als Buch beim Springer-Verlag vorliegt, lege ich großen Wert darauf, neben den präzisen Formulierungen von Definitionen, Sätzen und Beweisen die Hintergründe zu beleuchten: Wie kommt man drauf? Wie kann man sich das vorstellen, was bedeutet es anschaulich? Was ist die Motivation für eine Definition, einen Beweis? Warum ist dieser Satz interessant?

Das Skript wird beständig weiterentwickelt. Für Hinweise auf Druckfehler und für andere Anregungen bin ich immer dankbar. Am besten schreiben Sie mir eine E-Mail (daniel.grieser@uni-oldenburg.de). Studenten zukünftiger Vorlesungen werden davon profitieren.

Ich danke den Studenten, die bei der Erstellung der ersten Version des Skripts mitgearbeitet haben, sowie allen, die später Anregungen gegeben haben.

Oldenburg, den 25.7.2018

Daniel Grieser

Inhaltsverzeichnis Analysis II

I	Grundlagen	3
1	Metrische Räume	5
1.1	Definition und Beispiele	6
1.2	Topologische Grundbegriffe: Konvergenz, offene und abgeschlossene Mengen	11
1.3	Stetige Abbildungen	20
1.4	Vollständigkeit. Der Banachsche Fixpunktsatz	25
1.5	Kompaktheit	31
1.6	Ausblick: Topologische Räume *	37
II	Differentialrechnung in höheren Dimensionen	41
2	Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen	43
2.1	Das Differential und die Richtungsableitung	43
2.2	Der Gradient	53
2.3	Höhere Ableitungen	56
2.4	Der Satz von Taylor; Extremwertbestimmung	62
2.5	Vertauschen von Differentiation und Integration	67
3	Differentiation von Abbildungen	73
3.1	Definition, einfache Eigenschaften, Beispiele	73
3.2	Der Satz über die Umkehrabbildung	83
3.3	Der Satz über implizite Funktionen	92
4	Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	101
4.1	Definition und Charakterisierung als Niveaumenge	101
4.2	Tangential- und Normalraum	105
4.3	Extrema mit Nebenbedingungen	107
III	Differentialgleichungen	113
5	Erste Schritte: Integration, Separation der Variablen	117
5.1	Der einfachste Fall: $y' = F(x)$	117
5.2	Separation der Variablen	119
5.3	Der Ursprung von Differentialgleichungen	124
6	Geometrie von Differentialgleichungen: Kurven und Vektorfelder	127
6.1	Kurven	127
6.2	Vektorfelder und ihre Integralkurven	132

7	Lineare Differentialgleichungen	137
7.1	Die lineare Gleichung erster Ordnung	137
7.2	Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen	138
7.3	Der Vektorraum der Funktionen	140
7.4	Die lineare Gleichung n -ter Ordnung	144
7.5	Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	146
7.6	Schwingungen	153
7.7	Die inhomogene lineare Gleichung 2. Ordnung. Die Greensche Funktion	156
8	Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	161
8.1	Reduktion beliebiger Differentialgleichungen auf Systeme 1. Ordnung	161
8.2	Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Systeme von Differentialgleichungen	162
8.3	Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern	172
8.4	Integralkurven und Orbits von Vektorfeldern	175
8.5	Lineare Systeme erster Ordnung	179
8.6	Erste Integrale für Differentialgleichungen	192
A	Überblick: Ableitungskonzepte für Funktionen	200
B	Überblick: Allgemeine Prinzipien für Differentialgleichungen	202

Einleitung

Zentrale Themen der Analysis I sind die reellen Zahlen, die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen und damit zusammenhängende Dinge wie Stetigkeit, Ableitung und Integral von Funktionen auf \mathbb{R} . Die reellen Zahlen entsprechen den Punkten der Zahlengerade, diese ist eindimensional.

Die wichtigste Neuerung in der Analysis II ist die Betrachtung höherer Dimensionen. Im Alltag denken wir dabei zunächst an die Ebene (zwei Dimensionen) und den Raum (drei Dimensionen). Mathematisch entsprechen diese dem \mathbb{R}^2 und dem \mathbb{R}^3 .

Hierbei definiert man für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den **n -dimensionalen reellen Raum** als

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

Dieser tritt in verschiedenen Zusammenhängen auf, zum Beispiel:

- ▷ In der Geometrie.
- ▷ In der Physik; zum Beispiel kann die Position eines Teilchens durch seine drei Koordinaten, also einen Punkt im \mathbb{R}^3 , beschrieben werden. Die Position zweier Teilchen wird durch zwei Punkte im \mathbb{R}^3 oder alternativ durch einen Punkt im \mathbb{R}^6 beschrieben. Es stellt sich heraus, dass die zweite Beschreibung oft nützlicher ist.
- ▷ In anderen Gebieten, wo Mathematik verwendet wird, z. B. in den Wirtschaftswissenschaften. Werden in einem Lager 20 Produkte gelagert, so kann man deren Preise als ein Element von \mathbb{R}^{20} auffassen. Dies ist sinnvoll, da mathematische Operationen Antworten auf reale Fragen geben können. Stellt man etwa den Lagerbestand auch als Element im \mathbb{R}^{20} dar, so ist das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren gerade der Gesamtwert der gelagerten Waren.

Das zweite und dritte Beispiel verdeutlichen, warum wir uns nicht nur auf zwei oder drei Dimensionen beschränken.

Die zentralen Themenkomplexe dieser Vorlesung sind die (gewöhnlichen) Differentialgleichungen und die Differentialrechnung von Abbildungen mehrerer Variabler. Beide Themen haben zwei Gesichter: Ein rechnerisches (formales), bei dem Dinge in Formeln ausgedrückt werden, und ein geometrisches. Diese Zweigesichtigkeit ist nicht neu: Die Ableitung einer Funktion war geometrisch als Steigung einer Tangente motiviert, dann haben wir das in eine formale Definition übersetzt und gelernt, damit zu rechnen. Die Konvexität von Funktionen hat zunächst geometrische Bedeutung, diese haben wir in eine formale Definition übersetzt und schließlich durch Rechnung eine Charakterisierung der Konvexität mittels der zweiten Ableitung gefunden.

In mehr Dimensionen wird die geometrische Vielfalt größer. Die mathematische Sprache der einfachsten höherdimensionalen Objekte, der Geraden, Ebenen etc., ist die lineare Algebra. Daher spielt diese in dieser Vorlesung an verschiedenen Stellen eine wichtige Rolle: Zum Beispiel treten Eigenwerte von Matrizen bei den Differentialgleichungen auf, die Multiplikation und die Inversen von Matrizen bei der Differentialrechnung mehrerer Variabler. Auch der allgemeine Begriff des Vektorraums ist nützlich: Sowohl \mathbb{R}^n als auch die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall sind Vektorräume. Dies ist mehr als eine abstrakte Spielerei: Wir werden weitere Gemeinsamkeiten dieser beiden Mengen – zum Beispiel die Existenz sogenannter Normen, unter denen sie vollständig sind – herausarbeiten. Dann werden wir einen der schönsten Sätze dieser Vorlesung – den Banachschen Fixpunktsatz – auf beide anwenden, und damit zwei der wichtigsten Sätze dieser Vorlesung beweisen: Den Satz über implizite Funktionen und den Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen.

Teil I

Grundlagen

1 Metrische Räume

In diesem Kapitel werden Sie grundlegende Konzepte, die Sie in Analysis I für reelle Zahlen kennengelernt haben, im Kontext des \mathbb{R}^n verstehen: Konvergenz und Stetigkeit.

Erinnern wir uns an die Definition der Konvergenz von Folgen reeller Zahlen:

Seien x, x_k ($k \in \mathbb{N}$) reelle Zahlen. Dann bedeutet $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt: $|x_k - x| < \varepsilon$.

Die reellen Zahlen x_k, x kommen hierbei nur in der Kombination $|x_k - x|$ vor. Betrachtet man x_k, x als Punkte auf der Zahlengeraden, so ist $|x_k - x|$ ihr Abstand.

Dies legt nahe, die Konvergenz $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ für mehrdimensionale $x, x_k \in \mathbb{R}^n$ genauso zu definieren, nur dass $|x_k - x|$ als Abstand im \mathbb{R}^n interpretiert wird. Genau das werden wir tun.

Damit kann man sogar von Konvergenz in jedem Kontext reden, wo ein Abstands begriff sinnvoll ist. Damit so einfache Dinge wie die Eindeutigkeit des Grenzwertes weiterhin gelten, muss dieser Abstands begriff gewissen Regeln genügen. Eine Menge mit einem solchen Abstands begriff nennt man **metrischen Raum**.

Wem der allgemeine Begriff des metrischen Raums zu abstrakt erscheint, kann sich in diesem Kapitel immer den \mathbb{R}^n (oder noch einfacher \mathbb{R} und \mathbb{R}^2) vorstellen.

Warum dann die Allgemeinheit, die Abstraktion? Aus mindestens drei Gründen:

- ▷ Die Abstraktion lenkt den Blick auf das Wesentliche. Dass man Vektoren im \mathbb{R}^n addieren, skalarmultiplizieren und (für $n = 3$) auch »kreuzmultiplizieren« kann, und dass sie durch n -Tupel reeller Zahlen gegeben sind, ist für viele Dinge irrelevant.
- ▷ Für andere Dinge wiederum sind diese Eigenschaften von Vektoren wesentlich. Diese Gruppen von Dingen zu unterscheiden hilft, die Vielfalt mathematischer Wahrheiten im Kopf zu ordnen und sie am Ende besser zu verstehen.
- ▷ Die entwickelten Konzepte werden wir auch auf andere metrische Räume als \mathbb{R}^n anwenden, zum Beispiel auf die Menge stetiger Funktionen auf einem Intervall, mit einem geeigneten Abstands begriff. Dies wird es uns in Kapitel 8 erlauben, erstaunliche Sätze zu beweisen, zum Beispiel die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen, auch in Fällen, wo man diese Lösungen nicht hinschreiben kann.

Zugegeben: Die Idee, auch Funktionen als Punkte in einem (riesigen!) Raum zu betrachten, mag zunächst unheimlich erscheinen. Es wird einige Zeit dauern, bis sie Ihnen vertraut wird. Aber glauben Sie mir: Sie bildet einen der Hauptpfeiler der modernen Mathematik. Bisher (in der Analysis I) stecken wir noch tief im 19. Jahrhundert. Mit dieser Idee kommen wir ins 20. Jahrhundert, und damit ja vielleicht auch irgendwann zur Gegenwart...

Also: Je früher Sie anfangen, sich dieser Idee zu nähern, desto besser.

Im Abschnitt 1.1 führen wir metrische Räume ein und geben die wichtigsten Beispiele; hierbei lernen Sie auch eine der fundamentalen Ungleichungen der Mathematik kennen, die Cauchy-Schwarz Ungleichung. In 1.2 diskutieren wir spezielle Typen von Teilmengen metrischer Räume und in 1.3 stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Die Abschnitte 1.4 und 1.5 stellen zwei wichtige Eigenschaften mancher

metrischer Räume, die Vollständigkeit und die Kompaktheit, vor. Sie lernen in 1.4 auch den Banachschen Fixpunktsatz kennen, ein fundamentales Hilfsmittel, das beim Beweis zweier wichtiger Sätze zum Einsatz kommen wird: Beim Beweis des Satzes über implizite Funktionen sowie beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf über die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungssystemen. Schließlich gibt 1.6 einen kurzen Ausblick auf den allgemeineren Begriff des topologischen Raumes.

Die in diesem Kapitel eingeführten Begriffe sind für große Teile der Mathematik, nicht nur die Analysis, fundamental.

1.1 Definition und Beispiele

Was bedeutet ›Abstand‹? Das kann durchaus vom Kontext abhängen. Z.B. kann man als Abstand zweier Städte die Entfernung in Luftlinie angeben. Für Autofahrer ist es aber sinnvoller, die Länge der kürzesten Straßenverbindung als relevanten Abstand zu betrachten. Aber egal, welchen Abstands begriff man betrachtet, er sollte immer die folgenden Eigenschaften haben. Statt ›Abstands begriff‹ sagt man in der Mathematik ›Metrik‹.

1.1.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: Für alle $p, q, r \in X$ gilt

- | | | |
|-------|---|---------------------|
| (i) | $d(p, q) \geq 0$, und $d(p, q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$ | Definitheit |
| (ii) | $d(p, q) = d(q, p)$ | Symmetrie |
| (iii) | $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ | Dreiecksungleichung |

X zusammen mit einer Metrik d heißt **metrischer Raum** (X, d) .

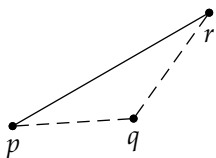


Abbildung 1.1

Die erste Bedingung sagt, dass verschiedene Punkte positiven Abstand haben, jeder Punkt zu sich selbst aber Abstand Null hat. Die zweite Bedingung drückt eine Symmetrie aus (Abstand von p nach q gleich Abstand von q nach p). Die Dreiecksungleichung besagt, dass ein Umweg über einen dritten Punkt nie kürzer sein kann als der direkte Weg (vgl. Abb. 1.1).

Beispiele:

(1) $X = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $d(p, q) := |p - q|$. Die Eigenschaften (i) und (ii) sind unmittelbar klar, (iii) wurde in Analysis I gezeigt.

(2) $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ ist ein metrischer Raum mit $d_{\text{eukl}} := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. d_{eukl} heißt **euklidische Metrik**. Für $n = 2$ sagt der Satz des Pythagoras, dass d_{eukl} gerade der gewohnte Abstands begriff ist.

Die Dreiecksungleichung für d_{eukl} erscheint zwar geometrisch »offensichtlich« (zumindest in zwei Dimensionen), ist aber von der Formel her keineswegs klar und wird später bewiesen.

(3) $X = \{\text{Städte in Deutschland}\}$, $d(p, q) =$ Auto-Entfernung von p nach q gemäß Entfernungstabelle.

(4) $X = \{\text{Städte in Deutschland}\}$, $d_L(p, q) =$ Entfernung in Luftlinie von p nach q .

Bemerkung: Die Beispiele zeigen, dass auf derselben Menge verschiedene Metriken existieren (und interessant sein) können. Welche Metrik von Interesse ist, hängt dabei vom Kontext ab (z. B. ob man mit dem Auto fährt oder eine Brieftaube losschickt).

1.1.2 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$. Definiere $d|_Y(p, q) := d(p, q)$ für alle $p, q \in Y$.
 $d|_Y$ heißt die von d auf Y **induzierte Metrik**.

Damit wird z. B. jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ selbst zu einem metrischen Raum.

Bemerkung: Diese Definition erscheint erstmal ziemlich überflüssig. Mit der Zeit werden Sie jedoch sehen, dass sie konzeptuelle Klarheit schafft. Siehe auch die Bemerkung vor Definition 1.2.7 sowie Satz 1.2.14 und Lemma 1.4.2.

1.1.1 Normierte Räume

Für die euklidische Metrik gilt $d_{\text{eukl}}(x, y) = d_{\text{eukl}}(x - y, 0)$, d. h. der Abstand von x, y hängt nur von $x - y$ ab. Außerdem hat der doppelte Vektor den doppelten Abstand von Null, und analog für beliebige Vielfache. Metriken mit analogen Eigenschaften kann man auf jedem Vektorraum aus einer sogenannten Norm erhalten. Es sei zunächst an den Begriff des Vektorraums erinnert.

1.1.3 Definition

Ein **\mathbb{R} -Vektorraum** ist eine Menge V , zusammen mit zwei Operationen

$$\begin{aligned} + & : V \times V \rightarrow V & (v, w) & \mapsto v + w \\ \cdot & : \mathbb{R} \times V \rightarrow V & (t, v) & \mapsto t \cdot v = tv \end{aligned}$$

die den folgenden Eigenschaften genügen:

(1) $(V, +)$ ist eine **abelsche Gruppe**, d. h. für alle $v, w, u \in V$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \forall v, w \in V & v + w = w + v & \text{Kommutativität} \\ \forall v, w, u \in V & (v + w) + u = v + (w + u) & \text{Assoziativität} \\ \exists 0 \in V \forall v \in V & v + 0 = v & \text{neutrales Element +} \\ \forall v \in V \exists w \in V & v + w = 0 & \text{inverses Element +} \end{array}$$

(2) Die Skalarmultiplikation \cdot erfüllt für alle $s, t \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$ die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (st) \cdot v &= s \cdot (t \cdot v) & \text{Assoziativität} \\ s \cdot (v + w) &= s \cdot v + s \cdot w & \text{Distributivität} \\ (s + t) \cdot v &= s \cdot v + t \cdot v & \text{Distributivität} \\ 1 \cdot v &= v \end{aligned}$$

Wir betrachten immer \mathbb{R} -Vektorräume und sagen daher meist einfach Vektorraum.

Beispiele:

(1) Sei $V = \mathbb{R}^n$, mit den Operationen: Für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ t \cdot x &:= (tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \\ 0 &:= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

(2) Für eine Menge A sei $V = \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) := \{\text{Funktionen } f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$, mit den Operationen:

Für $f, g \in V, t \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $f + g, t \cdot f, 0$ definiert durch (für alle $p \in A$)

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p)$$

$$(t \cdot f)(p) := t \cdot f(p)$$

$$0(p) := 0$$

Weitere wichtige Beispiele ergeben sich als Unterräume von $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Aus der linearen Algebra ist folgendes bekannt:

1.1.4 Satz (Unterräume)

Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $W \subset V$. W ist mit denselben Operationen $(+, \cdot)$ ein Vektorraum genau dann, wenn W abgeschlossen unter $+, \cdot$ und nicht leer ist. Abgeschlossen bedeutet:

$$v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$$

$$t \in \mathbb{R}, v \in W \Rightarrow t \cdot v \in W$$

In diesem Fall heißt W **Untervektorraum** (oder **Unterraum**) von V .

Beispiele:

- (1) Sei $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}) := \{\text{beschränkte Funktionen } A \rightarrow \mathbb{R}\}$, für eine Menge A . Dies ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ (Übung).
- (2) Sei $C([0, 1], \mathbb{R}) := \{\text{stetige Funktionen } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Dann ist $C([0, 1], \mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$. Denn die Summe zweier stetiger Funktionen und das skalare Vielfache einer stetigen Funktion sind wieder stetig, und jede konstante Funktion ist stetig. Da jede stetige Funktion auf $[0, 1]$ beschränkt ist (Satz vom Maximum und Minimum), gilt $C([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$. Allgemeiner ist $C([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

1.1.5 Definition

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ heißt **Norm**, falls für alle $v, w \in V$ gilt:

- | | |
|---|---------------------|
| (i) $\ v\ \geq 0$, und $\ v\ = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ | Definitheit |
| (ii) $\ tv\ = t \cdot \ v\ $ für $t \in \mathbb{R}$ | Homogenität |
| (iii) $\ v + w\ \leq \ v\ + \ w\ $ | Dreiecksungleichung |

V zusammen mit einer Norm $\| \cdot \|$ heißt **normierter Raum** $(V, \| \cdot \|)$.

Die Dreiecksungleichung ist in Abbildung 1.2 veranschaulicht.

Beispiele:

- (1) $V = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $\|x\| := |x|$.
- (2) $V = \mathbb{R}^n$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \cdots, x_n)$,

die **euklidische Norm**. (i) und (ii) sind klar, aber die Dreiecksungleichung ist nicht trivial, siehe Satz 1.1.10.

- (3) Auf \mathbb{R}^n gibt es weitere Normen, zum Beispiel $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$. (i)-(iii) sind leicht nachzuprüfen (Übung).

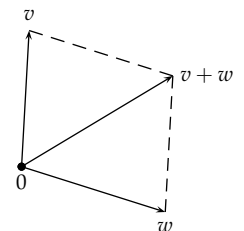


Abbildung 1.2

- (4) Für $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ sei $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$. Dies definiert eine Norm auf $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ (Übung), die **Supremumsnorm**. Sie wird später für uns sehr wichtig sein.
- (5) Offenbar definiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf V auch eine Norm auf jedem Unterraum $W \subset V$. Zum Beispiel definiert $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm auf $C([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$. Für $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ gilt sogar $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ nach dem Satz vom Maximum und Minimum, daher heißt diese Norm auch die **Maximumsnorm**. Analoges gilt für $C([a, b], \mathbb{R})$ für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

Die enge Beziehung zwischen euklidischer Norm und euklidischer Metrik läßt sich allgemein formulieren:

1.1.6 Satz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d(p, q) = \|p - q\|$ eine Metrik.

Beweis: Es ist nachzuweisen, dass eine Norm die drei Eigenschaften einer Metrik erfüllt:

- (i) Wir verwenden Teil (i) der Normdefinition 1.1.5(i): Damit folgt $d(p, q) \geq 0$, und ist noch zu zeigen, dass $d(p, q) = 0$ genau dann gilt, wenn $p = q$:

$$d(p, q) = 0 \text{ bedeutet nach Definition } \|p - q\| = 0.$$

Gemäß Normdefinition ist dies äquivalent zu $p - q = 0$, also zu $p = q$.

- (ii) Die Eigenschaft folgt mit Hilfe von Def. 1.1.5(ii):

$$d(q, p) = \|q - p\| = \|(-1)(p - q)\| = |-1| \cdot \|p - q\| = d(p, q)$$

- (iii) Mit einem »alten Trick« und Definition 1.1.5(iii) erhalten wir:

$$d(p, r) = \|p - r\| = \|(p - q) + (q - r)\| \leq \|p - q\| + \|q - r\| = d(p, q) + d(q, r) \quad \square$$

Wir wollen nun die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n nachprüfen. Für die Rechnung ist es nützlich, die Norm mit Hilfe des Skalarprodukts auszudrücken.

1.1.7 Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ das **Standardskalarprodukt**.

Oft schreibt man auch (x, y) , das kann aber mit dem Vektor $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ verwechselt werden. Aus der Definition folgt durch einfache Rechnung:

1.1.8 Lemma

Es gilt $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ für die Euklidische Norm $\|\cdot\|$. Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist

$$\text{bilinear: } \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ty \rangle = t \langle x, y \rangle, \quad \langle tx, y \rangle = t \langle x, y \rangle$$

$$\text{symmetrisch: } \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$\text{positiv definit: } \langle x, x \rangle > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

eine Art binomische Formel für Vektoren.

Wir beweisen nun eine der fundamentalen Ungleichungen der Mathematik.

1.1.9 Lemma (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x, y linear abhängig sind.

Die Gleichheitsaussage lässt sich verschärfen: Es gilt

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$$

genau dann, wenn x, y linear abhängig und gleichgerichtet sind, d.h. einer der Vektoren ein positives Vielfaches des anderen ist. Dies folgt sofort aus dem Lemma.

Beweis: Versuchen Sie es erst selbst! Sie werden merken, dass es nicht ganz einfach ist. Da die Ungleichung so fundamental ist, geben wir zwei Beweise, für einen dritten siehe Übung ??.

Erster Beweis:

Dieser Beweis ist durch einen Trick motiviert, mit dem man die ebenso fundamentale *Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a, b \geq 0)$$

zeigen kann: Wir rechnen $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ aus und verwenden, dass es als Quadrat nicht-negativ ist:

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}.$$

Umstellen liefert die gewünschte Ungleichung.

1. *Schritt:* Wir nehmen zunächst an, dass $\|x\| = \|y\| = 1$. Nach der binomischen Formel (mit $-y$ statt y) ist

$$0 \leq \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2 - 2\langle x, y \rangle,$$

also folgt $\langle x, y \rangle \leq 1 = \|x\| \cdot \|y\|$.

2. *Schritt:* Ist x oder y gleich Null, ist die Cauchy-Schwarz Ungleichung trivial. Seien nun $x \neq 0, y \neq 0$ beliebig. Wir normieren zu $\hat{x} := \frac{x}{\|x\|}, \hat{y} := \frac{y}{\|y\|}$, dann ist $\|\hat{x}\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$ nach 1.1.5(ii) und analog $\|\hat{y}\| = 1$,

daher können wir den 1. Schritt anwenden und erhalten $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle \leq 1$, also $\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \rangle \leq 1$. Multiplikation mit $\|x\| \cdot \|y\|$ liefert

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Ersetzt man hier x durch $-x$, folgt $-\langle x, y \rangle = \langle -x, y \rangle \leq \| -x \| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ und damit insgesamt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Zweiter Beweis: Hier ist ein Trick, der vom Himmel zu fallen scheint: Falls $y = 0$, so liegt die Gleichheit vor, ansonsten: Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, ty \rangle + \|ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$$

Wegen $\|x + ty\|^2 \geq 0$ folgt, für alle t ,

$$\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2 \geq 0$$

Nun setzen wir $t := -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$:

$$\|x\|^2 - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq \langle x, y \rangle^2$$

$$\Leftrightarrow \|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y \rangle|$$

Wir untersuchen nun den Fall der Gleichheit. Sind x, y linear abhängig, so ist $y = 0$ oder x ein skalares Vielfaches von y . In beiden Fällen gilt offenbar Gleichheit in der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Sind andererseits x, y linear unabhängig, so ist insbesondere $y \neq 0$ und $\|x + ty\|^2 > 0$ für alle t . Mit derselben Rechnung wie eben folgt daraus $\|x\| \cdot \|y\| > |\langle x, y \rangle|$. \square

Unsere Wahl von t hat eine geometrische Bedeutung:

(Dass die orthogonale Projektion von x auf y wirklich wie angegeben berechnet werden kann, wird in der linearen Algebra gezeigt.)
 (Im Bild wird die Notation $((x, y))$ statt $\langle x, y \rangle$ verwendet.)

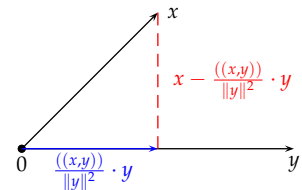


Abbildung 1.3

1.1.10 Satz

Auf \mathbb{R}^n sei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow & \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \Leftrightarrow & \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile die binomischen Formeln für Vektoren und Zahlen verwendet haben. Die letzte Zeile ist nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung wahr. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Aus Satz 1.1.10 folgt schließlich, dass die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n wirklich eine Norm ist, und damit, dass die euklidische Metrik wirklich eine Metrik ist.

Bemerkung: Dies lässt sich wie folgt verallgemeinern: Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein \mathbb{R} -Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf V , d.h. einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform. Dann gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung für dieses Skalarprodukt, und durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ wird eine Norm auf V definiert. Dies wird genau wie oben bewiesen, da in den Beweisen nur die in Lemma 1.1.8 formulierten Eigenschaften verwendet wurden. Wir haben also:

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ euklid. Vektorraum} \implies (V, \| \cdot \|) \text{ normierter Raum} \implies (V, d) \text{ metrischer Raum,}$$

wobei im ersten Schritt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ und im zweiten $d(v, w) = \|v - w\|$ gesetzt wird. Anders gesagt, ist die Menge der euklidischen Vektorräume in der Menge der normierten Räume und diese in der Menge der metrischen Räume enthalten. Die Übungen zeigen, dass beide dieser Inklusionen echt sind.

1.2 Topologische Grundbegriffe: Konvergenz, offene und abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir wollen Begriffe wie Konvergenz von \mathbb{R} auf X verallgemeinern. Beim ersten Lernen genügt es für die Anschauung, sich $X = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik vorzustellen. Wir formulieren die Aussagen aber allgemein, da dadurch deutlich wird, dass wirklich nur die Eigenschaften einer abstrakten Metrik verwendet werden.

1.2.1 Kugeln und Konvergenz

1.2.1 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $p \in X$ und $0 < r \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$K_r(p) := \{q \in X : d(p, q) < r\}$$

die **offene Kugel** um p mit Radius r .

Man nennt $K_r(p)$ auch die (offene) **r -Kugel um p** . Gelegentlich verwenden wir auch die **abgeschlossene r -Kugel** um p , $\bar{K}_r(p) := \{q \in X : d(p, q) \leq r\}$. Siehe auch Übung ??.

Beispiele:

- (1) In \mathbb{R}^3 entspricht das dem üblichen Begriff einer Kugel; die Kugeln in \mathbb{R}^2 sind Kreisscheiben; in $X = \mathbb{R}$ ist $K_r(p) = (p - r, p + r)$ ein offenes Intervall, zentriert um p (jeweils bzgl. der euklidischen Metrik).

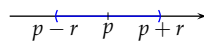


Abbildung 1.4. Kugel in \mathbb{R}

- (2) Sei $X = \mathbb{R}^2$, $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$ mit $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Dann ist:

$$K_1((0, 0)) = \{y : \|y\|_\infty < 1\} = \{y : |y_1| < 1, |y_2| < 1\}$$

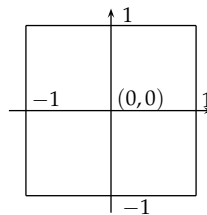


Abbildung 1.5. Die Einheitskugel in (\mathbb{R}^2, d_∞)

Der Beweis der folgenden »offensichtlichen« Aussage zeigt, wie die Eigenschaften einer Metrik zum Einsatz kommen.

1.2.2 Lemma

Seien $p, q \in X$, $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 + r_2 \leq d(p, q)$, dann ist $K_{r_1}(p) \cap K_{r_2}(q) = \emptyset$.

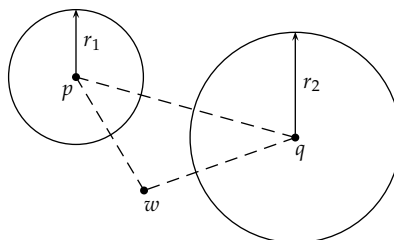


Abbildung 1.6

Beachten Sie: Die Zeichnung hilft bei der Intuition, sie ist aber kein Beweis – schließlich können ‚Kugeln‘ ja auch ganz anders aussehen.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es gäbe einen Schnittpunkt $w \in K_{r_1}(p) \cap K_{r_2}(q)$, dann wäre $d(p, w) < r_1$ und $d(q, w) < r_2$, aufgrund der Symmetrie also auch $d(w, q) < r_2$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $d(p, q) \leq d(p, w) + d(w, q) < r_1 + r_2$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $d(p, q) \geq r_1 + r_2$. \square

Konvergenz wird wie in \mathbb{R} definiert, nur dass man $|p_k - p|$ durch $d(p_k, p)$ ersetzt:

1.2.3 Definition (Konvergenz)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $p \in X$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : d(p_k, p) < \varepsilon$$

(p_k) heißt **Cauchy-Folge** $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : d(p_k, p_l) < \varepsilon$

Hier sind zwei alternative Charakterisierungen, die direkt aus der Definition folgen:

$\triangleright \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p \iff d(p_k, p) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

\triangleright Statt $d(p_k, p) < \varepsilon$ kann man auch $p_k \in K_\varepsilon(p)$ schreiben. Also bedeutet $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ alle p_k ab einem gewissen Index k_0 in der ε -Kugel um p liegen.

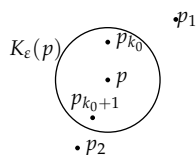


Abbildung 1.7

Bemerkung: Der Grenzwert (falls existent) ist eindeutig, d. h. aus $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$ und $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q$ folgt $p = q$. Dies folgt leicht aus Lemma 1.2.2 (Übung).

In \mathbb{R} haben wir damit den gewohnten Konvergenzbegriff. Die wichtigsten neuen Beispiele sind \mathbb{R}^n und Funktionenräume:

1.2.4 Lemma (Konvergenz in \mathbb{R}^n prüft man koordinatenweise)

In \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm testet man Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft koordinatenweise.

Das heißt: Sei (x_1, x_2, x_3, \dots) eine Folge in \mathbb{R}^n und $x \in \mathbb{R}^n$. Schreibe x und die x_k in Koordinaten als $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$. Dann gilt:

(1) $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$) $\iff x_k^{(i)} \rightarrow x^{(i)}$ ($k \rightarrow \infty$) für jedes $i = 1, \dots, n$.

(2) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n \iff (x_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in \mathbb{R} für jedes $i = 1, \dots, n$.

Ausnahmsweise verwenden wir hier obere Indizes für die Komponenten, damit sich die Komponentenindizes nicht mit den Folgenindizes ins Gehege kommen. Beachten Sie, dass n hier die Dimension und kein Folgenindex ist!

Punkte im \mathbb{R}^2 schreibt man statt $(x^{(1)}, x^{(2)})$ meist als (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann wird es übersichtlicher:

$$(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x, y) \iff x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \text{ und } y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y.$$

Beweis: Vorüberlegung: Was brauchen wir, um zum Beispiel die Implikation „ \Rightarrow “ in (1) zu zeigen? In Worten sagt sie aus: Wenn x_k nahe x ist, so muss $x_k^{(i)}$ nahe $x^{(i)}$ sein. Umformuliert: Wenn $\|x_k - x\|$ klein ist, so muss $|x_k^{(i)} - x^{(i)}|$ klein sein.

Nun ist $x_k^{(i)} - x^{(i)}$ die i -te Komponente von $x_k - x$. Wir brauchen also eine Ungleichung zwischen der Norm eines Vektors v und dem Betrag seiner Komponenten $v^{(i)}$: Für „ \Rightarrow “ muss $|v^{(i)}|$ mittels $\|v\|$ nach oben abgeschätzt werden, für „ \Leftarrow “ muss $\|v\|$ mittels der $|v^{(i)}|$ nach oben abgeschätzt werden. Hat man einmal dieses Ziel vor Augen, ist der Rest einfach:

Beweis von (1): Wegen $d(x_k, x) = \|x_k - x\|$ ist die Behauptung äquivalent zu

$$\|x_k - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff |x_k^{(i)} - x^{(i)}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ für jedes } i = 1, \dots, n.$$

Schreiben wir $v_k = x_k - x$, so ist also zu zeigen:

$$\|v_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff |v_k^{(i)}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ für jedes } i = 1, \dots, n.$$

Für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ und $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$|v^{(i_0)}|^2 \leq \sum_{i=1}^n |v^{(i)}|^2 = \|v\|^2,$$

also $|v^{(i_0)}| \leq \|v\|$. Wendet man dies mit $v = v_k$ an, so zeigt dies: Aus $\|v_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ folgt, dass auch $|v_k^{(i_0)}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ gilt.

Für die Umkehrung schätzen wir so ab:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^{(i)}|^2 \leq n \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |v^{(i)}|^2,$$

also $\|v\| \leq \sqrt{n} \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |v^{(i)}|$. Gilt nun $|v_k^{(i)}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ für jedes $i = 1, \dots, n$, so gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $i = 1, \dots, n$ ein k_i mit $|v_k^{(i)}| < \varepsilon$ für $k \geq k_i$. Setze $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$, dann ist für $k \geq k_0$ auch $\max_i |v_k^{(i)}| < \varepsilon$, also $\|v_k\| \leq \sqrt{n} \cdot \varepsilon$. Da n eine Konstante ist (die Dimension), folgt die Konvergenz $\|v_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Das beweist (1); im Wesentlichen dieselben Argumente beweisen auch (2). □

1.2.5 Lemma (Konvergenz in der Supremumsnorm)

Sei A eine Menge. Konvergenz in $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm bedeutet gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.

Beweis:

Dies folgt direkt aus der Definition: Für $f_k, f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ ist wegen $d(f_k, f) = \|f_k - f\| = \sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)|$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f &\iff \sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \text{ gleichmäßig} \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen lässt sich nicht mittels einer Norm charakterisieren, falls A unendlich ist. Sie lässt sich aber in einen noch allgemeineren Rahmen einordnen: Konvergenz in topologischen Räumen.

1.2.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Wir betrachten nun Teilmengen metrischer Räume etwas genauer. In Analysis I war für manche Sätze, etwa über stetige Funktionen, wichtig, ob sie auf offenen oder abgeschlossenen Intervallen definiert waren. Was entspricht dem im \mathbb{R}^n bzw. einem abstrakten metrischen Raum? Was sind die Eigenschaften, die für offene bzw. abgeschlossene Intervalle besonders charakteristisch sind?

Es gibt drei Eigenschaften, die eine Rolle spielen:

- (a) abgeschlossene Intervalle enthalten ihre »Randpunkte«, offene nicht;
- (b) abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ sind beschränkt;
- (c) Intervalle sind »zusammenhängend«, z. B. im Unterschied zu der Menge $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Der Begriff der abgeschlossenen Menge wird (a) entsprechen. (b) wird im Abschnitt 1.5 zum Begriff der beschränkten Menge führen; einen Zusammenhangsbegriff in metrischen Räumen, der (c) verallgemeinert, gibt es auch (er erlaubt eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes), wir werden ihn aber hier nicht betrachten.

1.2.6 Definition

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$.

- (i) $p \in M$ heißt **innerer Punkt** von M , falls ein $r > 0$ existiert mit $K_r(p) \subset M$.
- (ii) $\overset{\circ}{M} := \{\text{innere Punkte von } M\}$ heißt **Inneres** von M .
- (iii) $\overline{M} := \{p \in X : \exists (p_k) \text{ in } M : p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p\}$ heißt **Abschluss** von M .
- (iv) $\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ heißt **Rand** von M .

Falls p ein innerer Punkt von M ist, nennt man M auch eine **Umgebung** von p .

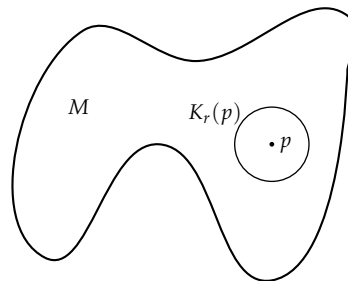


Abbildung 1.8. p ist innerer Punkt von M

Beispiele:

- (1) Seien $X = \mathbb{R}$ und $M = (0, 1]$, dann sind $\overline{M} = [0, 1]$, $\overset{\circ}{M} = (0, 1)$ und $\partial M = \{0, 1\}$. Denn:
 - ▷ $\overline{M} \subset [0, 1]$: Seien $p_k \in M$ und $p_k \rightarrow p \in \mathbb{R}$. Aus $p_k > 0$ folgt $p \geq 0$, und aus $p_k \leq 1$ folgt $p \leq 1$.
 - ▷ $\overline{M} \supset [0, 1]$: Es ist $0 \in \overline{M}$ (wähle $p_k = \frac{1}{k}$ für $k = 2, 3, \dots$). Außerdem $M \subset \overline{M}$ (zu $p \in M$ wähle $p_k = p$ für alle k).
 - ▷ $\overset{\circ}{M} \subset (0, 1)$: Offenbar ist $p = 1$ kein innerer Punkt von M , da für jedes $r > 0$ die Kugel $K_r(1)$ einen Punkt $q > 1$ enthält, z.B. $q = 1 + \frac{r}{2}$.
 - ▷ $\overset{\circ}{M} \supset (0, 1)$: Ist $p \in (0, 1)$, so gilt für $r = \min\{p, 1 - p\}$, dass $K_r(p) \subset M$ (Details als Übung, Bild!).

- (2) Für $M = X$ ist immer $\overset{\circ}{M} = M = \overline{M}$.
- (3) Seien $X = \mathbb{R}^2$ und $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ die x -Achse, dann sind $\overline{M} = M$, $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ und $\partial M = M$. Das Innere ist leer, da sich jede noch so kleine Kugel (bzgl. des Raumes \mathbb{R}^2 !) mit Mittelpunkt auf M ein Stück nach oben und unten erstreckt, also nicht ganz in M liegt.
- (4) Sei $M = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$, eine Kreisscheibe in der x, y -Ebene.
 In $X_1 = \mathbb{R}^3$ ist $\overset{\circ}{M} = \emptyset$, analog zu Beispiel (3).
 In $X_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ist $\overset{\circ}{M} = M$ (Übung).

Bemerkung: Die letzten Beispiele zeigen, dass es wesentlich ist, in welchem (X, d) wir uns gerade bewegen. Man kann sich X als ‚Universum‘ vorstellen, in dem alle Überlegungen ablaufen, etwa für Beispiel (4):

In $X_1 = \mathbb{R}^3$ hat M als ‚unendlich dünne Scheibe‘ kein Inneres.

Stellen Sie sich den Raum X_2 als den Lebensraum zweidimensionaler Wesen vor, für die es keine dritte Dimension gibt. Für diese Wesen ist M analog zu dem, was für uns eine Kugel ist: Man kann um sie herum-, aber nicht hineingehen oder hineinsehen. Sie hat also innere Punkte.

Es ist interessant, sich vorzustellen, wie sich das Leben solcher Flächenwesen von unserem unterscheidet. Literarisch wurde dies schon im Jahr 1884 von E. A. Abbott in seinem Buch Flatland umgesetzt.

Für alle Mengen $M \subset X$ gilt $\overset{\circ}{M} \subset M \subset \overline{M}$ nach Definition. Für die beiden Extremfälle gibt es Namen:

1.2.7 Definition

Sei (X, d) metrischer Raum.

$M \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $M = \overline{M}$, d. h. falls gilt:

Für alle Folgen (p_k) in M , die gegen ein $p \in X$ konvergieren, ist schon $p \in M$.

$M \subset X$ heißt **offen**, falls $M = \overset{\circ}{M}$, d. h. falls gilt:

Für alle $p \in M$ existiert ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M$.

Nach der Definition des Randes gilt: M abgeschlossen $\Leftrightarrow M$ enthält *alle* seine Randpunkte.

M offen $\Leftrightarrow M$ enthält *keinen* seiner Randpunkte.

Beispiele:

- (1) $X = \mathbb{R}$. $[0, 1]$ ist abgeschlossen, $(0, 1)$ ist offen.

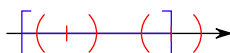


Abbildung 1.9. Intervall $[0, 1]$ mit innerem und Randpunkt

Allgemeiner sind offene Intervalle offen (als Teilmenge des metrischen Raumes \mathbb{R}), abgeschlossene Intervalle abgeschlossen. Beweis als einfache Übung.

- (2) $X = \mathbb{R}$. $[0, \infty)$ ist abgeschlossen. Denn sei (p_k) eine Folge in $[0, \infty)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p \in \mathbb{R}$. Aus $p_k \geq 0$ für alle k folgt $p \geq 0$, also $p \in [0, \infty)$.
- (3) $X = \mathbb{R}$. $[0, 1)$ ist weder offen noch abgeschlossen.
- (4) Für jeden metrischen Raum (X, d) ist $M = X$ sowohl offen als auch abgeschlossen. $M = \emptyset$ ebenso.
- (5) Sei $X = [0, \infty)$ mit der von \mathbb{R} induzierten Metrik, $M = [0, 1)$. Dann ist $\overset{\circ}{M} = [0, 1) = M$, also ist M offen (in X)! Denn $K_1(0) = \{x \in X : |x - 0| < 1\} = [0, 1) \subset M$, also ist 0 innerer Punkt von M . Im »Universum« X existieren keine Punkte $x < 0$!

Beachte: M ist nicht offen als Teilmenge von \mathbb{R} . Man sagt auch, $[0, 1)$ ist **offen relativ zu** $[0, \infty)$.

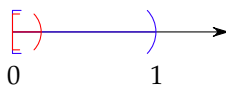


Abbildung 1.10. Intervall $[0, 1)$ als Teilmenge von $X = [0, \infty)$

1.2.8 Lemma

In jedem metrischen Raum sind die Kugeln $K_r(p)$ offen.

Siehe auch Übung ??.

Beweis: Sei $q \in K_r(p)$, also $d(q, p) < r$. Setze $s = r - d(q, p)$. Dann ist $K_s(q) \subset K_r(p)$, denn $w \in K_s(q) \Rightarrow d(w, q) < s = r - d(q, p) \Rightarrow d(w, p) \leq d(w, q) + d(q, p) < r$. □

Daraus folgt leicht (siehe Übung ??):

1.2.9 Lemma

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:
 $\overset{\circ}{M}$ ist die größte offene Teilmenge von M .
 \overline{M} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

Das heißt: $\overset{\circ}{M}$ ist offen, und für jede offene Menge $O \subset M$ gilt $O \subset \overset{\circ}{M}$. \overline{M} ist abgeschlossen, und für jede abgeschlossene Menge $A \supset M$ gilt $A \supset \overline{M}$.

Die Begriffe offen und abgeschlossen scheinen zunächst sehr verschieden zu sein. Sie sind aber zwei Seiten derselben Medaille. Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir erst eine einfache Charakterisierung des Randes:

1.2.10 Proposition

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:

$$\partial M = \{p \in X : \text{jede Kugel um } p \text{ schneidet sowohl } M \text{ als auch } M^c\}$$

(M^c ist das Komplement von M in X , also $M^c = X \setminus M$.)

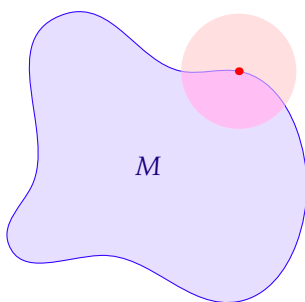


Abbildung 1.11

Versuchen Sie zunächst selbst, einen Beweis zu finden!

Beweis: 1. $\supset\subset$: Sei $p \in \partial M$. Wir zeigen: $p \in \langle \text{rechte Seite} \rangle$.

Sei $r > 0$. Wir müssen zeigen: $K_r(p) \cap M \neq \emptyset$ und $K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset$.

- a. $K_r(p) \cap M \neq \emptyset$: Wegen $p \in \partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} \subset \overline{M}$ gibt es $p_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Also gibt es n_0 , so dass für $n \geq n_0$ gilt: $p_n \in K_r(p)$ (Konvergenzdefinition mit $\varepsilon = r$). Also $p_{n_0} \in K_r(p) \cap M$.

b. $K_r(p) \cap M^c \neq \emptyset$: Indirekter Beweis:

Falls $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$, dann $K_r(p) \subset M$, also $p \in \overset{\circ}{M}$, im Widerspruch zu $p \in \partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.

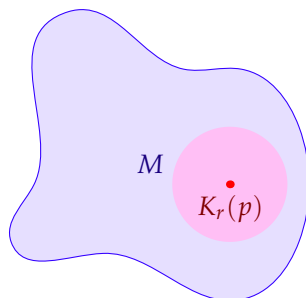


Abbildung 1.12. p liegt nicht im Rand

2. \supset : Sei $p \in \langle \text{rechte Seite} \rangle$. Zu zeigen: $p \in \partial M$, d. h. $p \in \overline{M}$ und $p \notin \overset{\circ}{M}$.

a. $p \in \overline{M}$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $K_{1/n}(p) \cap M \neq \emptyset$. Wähle einen Punkt p_n in dieser Menge. Dann ist

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ wegen $d(p_n, p) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, und $p_n \in M$ für alle n . Also folgt $p \in \overline{M}$.

b. $p \notin \overset{\circ}{M}$: Falls $p \in \overset{\circ}{M}$ wäre, so gäbe es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M$, also $K_r(p) \cap M^c = \emptyset$, im Widerspruch zur Annahme. \square

1.2.11 Korollar

Für jede Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) gilt $\partial M = \partial(M^c)$.

Beweis: Dies folgt sofort aus Proposition 1.2.10, da die Bedingung an p auf der rechten Seite dort wegen $(M^c)^c = M$ symmetrisch bezüglich M und M^c ist. \square

Im praktischen Umgang mit offenen und abgeschlossenen Mengen sind die beiden folgenden Sätze oft nützlich.

1.2.12 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann gilt:

$$M \text{ ist offen} \iff M^c \text{ ist abgeschlossen.}$$

Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $M = (0, 1)$ ist offen, $M^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ ist abgeschlossen.

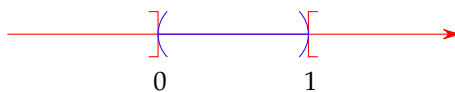


Abbildung 1.13. M und M^c

Beweis: M offen $\Leftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset \Leftrightarrow M \cap \partial(M^c) = \emptyset \Leftrightarrow M^c \supset \partial(M^c) \Leftrightarrow M^c$ abgeschlossen. \square

1.2.13 Satz

(1) Die Vereinigung *beliebig vieler* offener Mengen ist offen.

(2) Der Durchschnitt *endlich vieler* offener Mengen ist offen.

Bei abgeschlossenen Mengen verhält es sich andersherum:

(1) Der Durchschnitt *beliebig vieler* abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(2) Die Vereinigung *endlich vieler* abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

›Beliebig viele‹ können dabei auch unendlich viele sein. Folgende Beispiele (2) und (3) zeigen, dass (2) jeweils für unendlich viele Mengen nicht gelten muss.

Beispiele:

(1) $X = \mathbb{R}, M = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. M ist abgeschlossen, da sein Komplement $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ Vereinigung offener Intervalle ist.

Man kann auch direkt mit der Definition zeigen, dass M abgeschlossen ist, aber das ist etwas ‚fummeliger‘.

(2) $X = \mathbb{R}, M_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$. Alle M_n sind offen, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{p \in \mathbb{R} : p \in M_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ ist nicht offen.

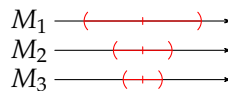


Abbildung 1.14

(3) $X = \mathbb{R}, M_n = [\frac{1}{n}, \infty), n \in \mathbb{N}$. Alle M_n sind abgeschlossen, aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{p \in \mathbb{R} : p \in M_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = (0, \infty)$ ist nicht abgeschlossen.

Beweis:

(1) Seien $M_i, i \in I$ (I beliebige Menge) offen und

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i = \{p \in X : p \text{ liegt in mindestens einem } M_i\}.$$

Behauptung: M ist offen.

Beweis: Sei $p \in M$, d.h. es existiert $i_0 \in I$ mit $p \in M_{i_0}$. M_{i_0} ist offen, somit existiert $r > 0$ mit $K_r(p) \subset M_{i_0}$. Dann folgt $K_r(p) \subset M$, weil $M_{i_0} \subset M$.

(2) Seien M_1, \dots, M_n offen und $M = \bigcap_{i=1}^n M_i = \{p \in X : p \text{ liegt in allen } M_i\}$.

Behauptung: M ist offen.

Beweis: Sei $p \in M$. Dann gilt für jedes $i = 1, \dots, n$: $p \in M_i$, und da M_i offen ist, gibt es $r_i > 0$ mit $K_{r_i}(p) \subset M_i$.

Setze $r = \min_{i=1, \dots, n} r_i$. Dann ist $r > 0$ und $K_r(p) \subset K_{r_i}(p) \subset M_i$ für jedes i , also $K_r(p) \subset M$.

Damit ist gezeigt, dass M offen ist.

Die Behauptungen über abgeschlossene Mengen erhält man aus denen über offene Mengen mittels Komplementbildung, mit Hilfe von Satz 1.2.12 und den De Morgan’schen Regeln (Schnitt und Vereinigung werden bei Komplementbildung vertauscht). □

Frage: An welcher Stelle funktioniert der Beweis von (2) nicht für unendlich viele Mengen?

In Satz 1.2.13 (1) sind auch überabzählbar viele Mengen zugelassen. Als Beispiel dafür, dass dies nützlich sein kann, beweisen wir folgende Charakterisierung relativ offener Mengen:

1.2.14 Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ und $d|_Y$ die induzierte Metrik. Sei $M \subset Y$. Dann sind äquivalent:

- (i) M ist offen relativ zu Y , das heißt im metrischen Raum $(Y, d|_Y)$.
- (ii) Es gibt eine in (X, d) offene Menge $M' \subset X$ mit $M = Y \cap M'$.

Die analoge Aussage gilt für abgeschlossene Mengen.

Beweis: Zur Verdeutlichung schreiben wir Kugeln in (X, d) als $K_r^X(p)$ und Kugeln in $(Y, d|_Y)$ als $K_r^Y(p)$. Zunächst bemerken wir, dass für $p \in Y, r > 0$ gilt: $K_r^Y(p) = Y \cap K_r^X(p)$. Dies folgt direkt aus den Definitionen von Kugel und induzierter Metrik.

Beweis von (ii) \Rightarrow (i): Sei M' wie in (ii). Für $p \in M$ folgt $p \in M'$, und da M' offen ist, gibt es $r > 0$ mit $K_r^X(p) \subset M'$. Für dieses r ist dann $K_r^Y(p) = Y \cap K_r^X(p) \subset Y \cap M' = M$. Also ist M offen relativ zu Y .

Beweis von (i) \Rightarrow (ii): Zu jedem $p \in M$ wähle ein $r_p > 0$ mit $K_{r_p}^Y(p) \subset M$. Setze $M' = \bigcup_{p \in M} K_{r_p}^X(p)$. Als Vereinigung offener Mengen ist M' offen (in X) nach Satz 1.2.13. Außerdem gilt:

$$Y \cap M' = Y \cap \bigcup_{p \in M} K_{r_p}^X(p) = \bigcup_{p \in M} (Y \cap K_{r_p}^X(p)) = \bigcup_{p \in M} K_{r_p}^Y(p) = M$$

Die letzte Gleichheit gilt, da jedes $p \in M$ in der Vereinigung der Kugeln vorkommt und andererseits jede der Kugeln innerhalb von M liegt.

Die Aussage über abgeschlossene Mengen erhält man aus der für offene Mengen durch Komplementbildung mittels Satz 1.2.12. \square

1.3 Stetige Abbildungen

Definition und Charakterisierungen

Wie in Analysis I soll Stetigkeit einer Abbildung f bedeuten, dass sich der Wert $f(p)$ nur wenig ändert, wenn sich p wenig ändert. Dies lässt sich mittels Folgen oder mittels ε - δ formulieren.

1.3.1 Definition

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ seien metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $p \in X$.

f heißt **stetig in p** : \Leftrightarrow Für jede Folge (p_k) in X gilt: $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p \implies f(p_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(p)$.

f heißt **stetig**, wenn es stetig in jedem $p \in X$ ist.

1.3.2 Satz

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ seien metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $p \in X$. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist stetig in p
- (ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $d_X(x, p) < \delta \implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$
- (iii) Für jede Kugel K um $f(p)$ gibt es eine Kugel K' um p mit $K' \subset f^{-1}(K)$

Für $X = Y = \mathbb{R}$ können wir das wie in Analysis I anhand des Graphen von f veranschaulichen.

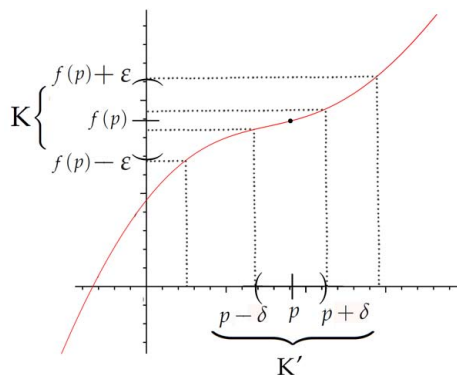


Abbildung 1.15

Für allgemeine X, Y veranschaulichen wir es besser so:

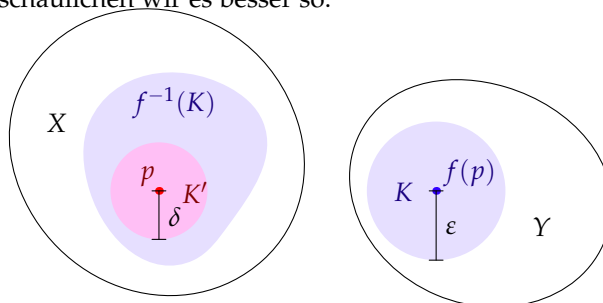


Abbildung 1.16

Zur Erinnerung: $f^{-1}(K) = \{x \in X : f(x) \in K\}$ ist das Urbild von K unter f .

Beweis: Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) zeigt man genau wie in Analysis I (Satz 11.2.2).

(ii) \Leftrightarrow (iii): Mit $K = K_\epsilon(f(p)), K' = K_\delta(p)$ gelten die vertikalen Äquivalenzen in

$$\begin{array}{ccc}
 d_X(x, p) < \delta & \implies & d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 x \in K_\delta(p) = K' & & f(x) \in K_\epsilon(f(p)) = K \\
 & & \updownarrow \\
 & & x \in f^{-1}(K)
 \end{array}$$

also ist die obere horizontale Implikation äquivalent zur Implikation $x \in K' \Rightarrow x \in f^{-1}(K)$, was gerade $K' \subset f^{-1}(K)$ bedeutet. □

Stetige Funktionen und Abbildungen konkret

Um für konkrete Abbildungen zu entscheiden, ob sie stetig sind, sind folgende Kriterien nützlich. Der Einfachheit halber formulieren wir sie für (überall) stetige Abbildungen. Überlegen Sie sich selbst die korrekten Formulierungen für Stetigkeit in einem Punkt!

Zunächst betrachten wir Funktionen, also Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$ oder $X \rightarrow \mathbb{C}$.

1.3.3 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) stetig.

Dann sind $f + g, f \cdot g$ stetig, und $\frac{f}{g}$ ist stetig, falls $g(p) \neq 0$ für alle $p \in X$.

Beweis: Genau wie in Analysis I folgt das aus den Grenzwertregeln in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Zum Beispiel: $p_k \rightarrow p \xrightarrow{f, g \text{ stetig}} f(p_k) \rightarrow f(p)$, $g(p_k) \rightarrow g(p) \xrightarrow{\text{Grenzwertregeln in } \mathbb{R}} f(p_k) + g(p_k) \rightarrow f(p) + g(p)$, d.h. $(f + g)(p_k) \rightarrow (f + g)(p)$. \square

Um wirklich konkret zu werden, brauchen wir im Fall $X = \mathbb{R}^n$:

1.3.4 Satz

Die Koordinatenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = x_i$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$, sind stetig ($i = 1, \dots, n$).

Beweis: Klar aus der Definition und Lemma 1.2.4. \square

Beispiel: Die Funktionen $f(x_1, x_2) = 5x_1 \cdot x_2$ oder $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sind stetig nach Satz 1.3.4 und Satz 1.3.3 und weil jede konstante Funktion offensichtlich stetig ist. Allgemeiner:

1.3.5 Korollar

Polynome auf \mathbb{R}^n sind stetig.

Hierbei ist ein **Polynom auf \mathbb{R}^n** eine Abbildung, die sich aus den Koordinatenfunktionen und Konstanten mittels endlich vieler Additionen und Multiplikationen bilden lässt, zum Beispiel

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2 + \pi x_1^5 x_2^3, \text{ aber nicht } \frac{x_1}{x_2}.$$

Viele Funktionen entstehen durch Komposition:

1.3.6 Satz

Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

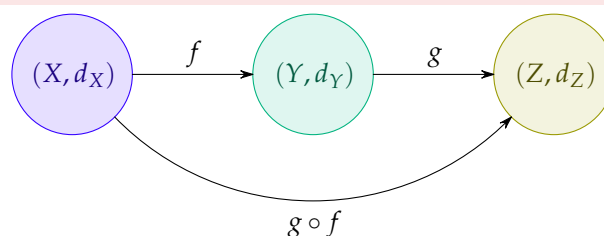


Abbildung 1.17. Komposition stetiger Abbildungen

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Definition: $p_k \rightarrow p$ in $X \xrightarrow{f \text{ stetig}} f(p_k) \rightarrow f(p)$ in $Y \xrightarrow{g \text{ stetig}} g(f(p_k)) \rightarrow g(f(p))$ in Z , d.h. $(g \circ f)(p_k) \rightarrow (g \circ f)(p)$. \square

Beispiel: $F(x_1, x_2) = \underbrace{\cos x_1}_{(\cos \circ f_1)(x)} + \underbrace{x_2 e^{x_1}}_{(f_2 \cdot (\exp \circ f_1))(x)}$ ist stetig.

Für Abbildungen in einen \mathbb{R}^n ist Stetigkeit äquivalent zur Stetigkeit der Komponentenfunktionen, genauer folgt unmittelbar aus Lemma 1.2.4:

1.3.7 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum und seien $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen auf X . Definiere $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ für $x \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig;
- (ii) f_1, \dots, f_n sind stetig.

Eng verwandt zur Stetigkeit ist folgende Bedingung an eine Abbildung.

1.3.8 Definition

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Lipschitz-stetig** mit **Lipschitz-Konstante** L , falls für alle $p, q \in X$ gilt:

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L \cdot d_X(p, q)$$

Das heißt, f streckt Abstände höchstens um den Faktor L . Zum Beispiel sind lineare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $|a|$. Siehe auch Übung ??.

1.3.9 Proposition

Lipschitz-stetige Abbildungen sind stetig.

Beweis: Die Bedingung in Satz 1.3.2(ii) ist offenbar erfüllt, wenn man $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ wählt, falls $L > 0$, und $\delta > 0$ beliebig, falls $L = 0$. \square

Es gibt aber stetige Abbildungen, die nicht Lipschitz-stetig sind, zum Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ein Kriterium für Lipschitz-Stetigkeit für reelle Funktionen lernen Sie in Proposition 1.4.9 kennen.

Ein wichtiges Beispiel einer Lipschitz-stetigen Abbildung ist:

1.3.10 Proposition (Stetigkeit der Metrik)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann ist die Funktion

$$X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, p)$$

Lipschitz-stetig.

Beweis: Für $x, y \in X$ ist $d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p)$ und $d(y, p) \leq d(x, y) + d(x, p)$, also $|d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$. Also ist $x \mapsto d(x, p)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. \square

Siehe Übung ?? für eine etwas stärkere Aussage. Ein weiteres wichtiges Beispiel Lipschitz-stetiger Abbildungen sind die linearen Abbildungen $L : V \rightarrow W$ für normierte Vektorräume V, W , falls V endlich-dimensional ist. Siehe Übung ??.

Stetigkeit und offene/abgeschlossene Mengen

Folgende Charakterisierung der Stetigkeit ist oft nützlich und für ein systematisches Verständnis fundamental (siehe auch Abschnitt 1.6).

1.3.11 Satz

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ seien metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) f ist stetig.
- (2) $f^{-1}(O)$ ist offen für jedes offene $O \subset Y$.
- (3) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $A \subset Y$.

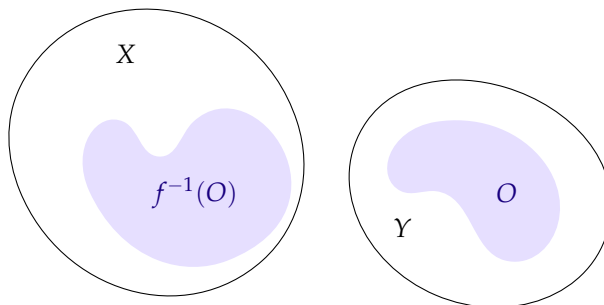


Abbildung 1.18. Das Urbild einer offenen Menge ist offen

Beweis: Wir verwenden die Charakterisierung der Stetigkeit (iii) in Satz 1.3.2. Versuchen Sie es zuerst selbst!

(1) \Rightarrow (2): Sei O offen und $p \in f^{-1}(O)$, d.h. $f(p) \in O$. Da O offen ist, existiert eine Kugel K um $f(p)$ mit $K \subset O$ und damit $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(O)$. Da f stetig in p ist, existiert nach Satz 1.3.2 eine Kugel K' um p mit $K' \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(O)$. Also ist $f^{-1}(O)$ offen.

(2) \Rightarrow (1): Sei K eine Kugel um $f(p)$. Da K offen ist, ist nach Annahme $f^{-1}(K)$ offen. Wegen $f(p) \in K$ ist $p \in f^{-1}(K)$, also existiert eine Kugel K' um p mit $K' \subset f^{-1}(K)$, was zu zeigen war.

(2) \Rightarrow (3): A abgeschlossen $\Rightarrow A^c$ offen $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}(A^c)$ offen. Nun gilt $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ (Übung), also folgt $(f^{-1}(A))^c$ offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(3) \Rightarrow (2): Analog. □

Der etwas abstrakt wirkende Satz 1.3.11 hat große praktische Bedeutung. Er erlaubt es, für viele konkrete Mengen sehr einfach nachzuprüfen, ob sie offen oder abgeschlossen sind.

Beispiele: (1) Die Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ ist abgeschlossen in $X = \mathbb{R}^3$. Dies lässt sich direkt mit der Definition nachprüfen, doch einfacher geht es so:

Sei $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $S = f^{-1}(\{1\})$.

$\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, f stetig, somit ist S abgeschlossen.

Bemerkung: Allgemeiner ist in jedem metrischen Raum (X, d) jede Sphäre $\{x \in X : d(x, p) = r\}$ abgeschlossen, da $x \mapsto d(x, p)$ stetig ist, siehe Proposition 1.3.10.

$$(2) M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1\}}_{=f^{-1}([0,1])} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 2\}}_{=g^{-1}([0,2])}$$

mit $f(x) = x_1$, $g(x) = x_2$, $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

f, g stetig, $[0, 1], [0, 2] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, somit ist M abgeschlossen.

$$(3) M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\cos x_2 + x_2 e^{x_1}}_{f(x)} > 0\} \text{ ist offen, da } M = f^{-1}((0, \infty)), (0, \infty) \subset \mathbb{R} \text{ offen und}$$

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Allgemeines Prinzip:

Mengen, die mittels strikter Ungleichungen zwischen stetigen Funktionen definiert sind, sind offen.

Mengen, die mittels $=, \leq, \geq$ zwischen stetigen Funktionen definiert sind, sind abgeschlossen.

1.4 Vollständigkeit. Der Banachsche Fixpunktsatz

1.4.1 Vollständigkeit

Eine der wichtigsten Eigenschaften von \mathbb{R} ist die Vollständigkeit. Ohne sie könnten wir keine Wurzeln ziehen, gälte der Zwischenwertsatz und der Satz vom Maximum und Minimum nicht, könnten wir keine Reihen summieren und nicht integrieren.

Gibt es einen Vollständigkeitsbegriff für \mathbb{R}^n oder allgemeinere metrische Räume (X, d) ? Die Vollständigkeit von \mathbb{R} war definiert als Gültigkeit des Supremumsaxiom. Dieses bezieht sich auf die Anordnung von \mathbb{R} . Aber \mathbb{R}^n ist nicht angeordnet, ganz zu schweigen von X . Was tun?

Eine der wichtigsten Folgerungen aus dem Supremumsaxiom ist, dass jede Cauchy-Folge konvergiert. Diese Aussage läßt sich auf metrische Räume verallgemeinern, da die Begriffe Cauchy-Folge und Konvergenz nur mit Hilfe des Punktabstands definiert sind. Daher definieren wir¹:

1.4.1 Definition

(X, d) heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Selbstverständlich muss der Grenzwert in X liegen.

Beispiele:

(1) $X = \mathbb{R}$ ist vollständig.

(2) $X = \mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

(3) $[0, 1]$ ist vollständig. Denn:

(x_k) Cauchy-Folge in $[0, 1] \xrightarrow{\mathbb{R} \text{ vollständig}} x_k \rightarrow p$ für ein $p \in \mathbb{R} \xrightarrow{[0,1] \text{ abgeschlossen}} x_k \rightarrow p \in [0, 1]$.

(4) $X = [0, 1)$ ist nicht vollständig: $x_k = 1 - \frac{1}{k}$.

In den beiden letzten Beispielen wurde das Intervall als eigenständiger metrischer Raum (mit der induzierten Metrik, wie immer) betrachtet. Worauf es ankommt, ist, dass es einen Grenzwert in X gibt.

Bemerkung: Vollständigkeit ist eine Eigenschaft metrischer Räume, dagegen sind Offenheit und Abgeschlossenheit Eigenschaften von Teilmengen metrischer Räume.

Mit anderen Worten: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$ und $d|_Y$ die induzierte Metrik auf Y . Ob $(Y, d|_Y)$ vollständig ist, ist allein durch Y und $d|_Y$ festgelegt. Ob jedoch Y offen oder abgeschlossen (in X) ist, lässt sich allein mittels $d|_Y$ nicht entscheiden. Dies folgt sofort aus den Definitionen und den früheren Beispielen.

Man sagt auch, Vollständigkeit sei eine **intrinsische** Eigenschaft, Offenheit und Abgeschlossenheit dagegen eine **extrinsische**.

Trotzdem läßt sich Vollständigkeit von Teilmengen bzgl. der induzierten Metrik manchmal extrinsisch charakterisieren.

¹Für \mathbb{R} impliziert die Aussage »Jede Cauchy-Folge konvergiert«, kombiniert mit dem Archimedischen Axiom, die Gültigkeit des Supremumsaxioms (siehe Analysis I, Satz 7.6.14). Da sich das Archimedische Axiom ebenso wie das Supremumsaxiom auf die Anordnung bezieht, ist es vernünftig, den »anordnungsfreien« Kern der Vollständigkeit in dieser Aussage über Cauchy-Folgen zu sehen.

1.4.2 Lemma

Sei (X, d) vollständig. Sei $Y \subset X$ und $d|_Y$ die induzierte Metrik auf Y . Dann gilt:
 $(Y, d|_Y)$ ist vollständig $\Leftrightarrow Y$ ist abgeschlossen als Teilmenge von X

Zum Beispiel ist jedes abgeschlossene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ vollständig.

Beweis: Übung. Vgl. Beispiel (3) nach Definition 1.4.1. □

1.4.2 Vollständigkeit von \mathbb{R}^n und Funktionenräumen**1.4.3 Satz**

\mathbb{R}^n ist vollständig.

Wie immer, wenn nichts dazu gesagt wird, betrachten wir auf \mathbb{R}^n die euklidische Metrik.

Beweis: Sei (x_k) Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n . Dann folgt mit Lemma 1.2.4: $(x_k^{(i)})$ ist Cauchy-Folge in \mathbb{R} für alle i . Da \mathbb{R} vollständig ist, existiert für jedes i der Grenzwert $x^{(i)} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(i)}$. Dann folgt wieder mit Lemma 1.2.4: $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. □

Wir betrachten nun die Funktionenräume, die nach Satz 1.1.4 eingeführt wurden.

1.4.4 Satz

- (1) $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm ist vollständig, für jede Menge M .
- (2) $C([a, b])$ mit der Maximumsnorm ist vollständig, für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Beweis:

(1) Sei (f_k) Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$.

Sei $x_0 \in M$. Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ ist $|f_k(x_0) - f_l(x_0)| \leq \sup_{x \in M} |f_k(x) - f_l(x)| = \|f_k - f_l\|$.

$\Rightarrow (f_k(x_0))$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow$ Der Grenzwert $f(x_0) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0)$ existiert.

Dies definiert eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Zu prüfen ist:

- (a) $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig (d. h. $f_k \rightarrow f$ bzgl. der Supremumsnorm).
- (b) f ist beschränkt.

Zu (a): Zu $\varepsilon > 0$ wähle k_0 mit $\|f_k - f_l\| < \varepsilon$ für $k, l \geq k_0$. Für jedes $x \in M$ und $k \geq k_0$ ist $|f_k(x) - f(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$, da $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \|f_k - f_l\| < \varepsilon$ für $l \geq k_0$ gilt. Da k_0 nicht von x abhängt, zeigt das die gleichmäßige Konvergenz.

Zu (b): Zu $\varepsilon = 1$ wähle k mit $\|f_k - f\| < 1$. Dann folgt für alle $x \in M$ $|f(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| < 1 + \|f_k\|$, also ist f beschränkt.

(2) $C([a, b])$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}([a, b])$, denn aus $f_k \in C([a, b])$ für alle k , $f \in \mathcal{B}([a, b])$, $f_k \rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty$) (bzgl. der Supremumsnorm, also gleichmäßig) folgt $f \in C([a, b])$ (der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig, Analysis I, Satz 11.5.2). Nach Lemma 1.4.2 ist also $C([a, b])$ vollständig. □

Bemerkung: Auf $C([a, b])$ gibt es noch andere Normen, die in manchen Zusammenhängen wichtig sind, z. B. $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$. Bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist $C([a, b])$ aber nicht vollständig!

Beispiel: Die Folge $f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ kx & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$, hat aber keinen Grenzwert.

(Intuitiv: Der Grenzwert »müsste« die Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ sein, diese ist aber nicht stetig. Übersetzen Sie diese Idee in einen Beweis!)

1.4.3 Absolute Konvergenz von Reihen

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und sind $v_0, v_1, \dots \in V$, so können wir die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ betrachten. Wir definieren **Konvergenz** der Reihe wie in \mathbb{R} über die Konvergenz der Partialsummen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = v : \iff \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = v \quad \text{mit } s_N = \sum_{k=0}^N v_k.$$

Wir sagen, die Reihe **konvergiert absolut**, falls die Reihe reeller Zahlen $\sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$ konvergiert.

Eine wichtige Anwendung der Vollständigkeit ist folgender Satz, der genau wie im Fall von \mathbb{R} bewiesen wird. Wir werden ihn in Abschnitt 8.5 verwenden, um die Exponentialfunktion für Matrizen zu definieren, die für die Lösung von Differentialgleichungen nützlich ist.

1.4.5 Satz (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Vektorraum. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k \text{ konvergiert absolut} \implies \sum_{k=0}^{\infty} v_k \text{ konvergiert.}$$

Beweis: Seien $s_N = \sum_{k=0}^N v_k$ und $t_N = \sum_{k=0}^N \|v_k\|$. Für $N < M$ ist

$$\|s_M - s_N\| = \left\| \sum_{k=N+1}^M v_k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^M \|v_k\| = t_M - t_N$$

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$ konvergiert, so konvergiert die Folge $(t_N)_N$, ist also eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Wegen $\|s_M - s_N\| \leq t_M - t_N$ ist dann auch $(s_N)_N$ eine Cauchy-Folge in V , konvergiert also, da V vollständig ist.

1.4.4 Der Banachsche Fixpunktsatz

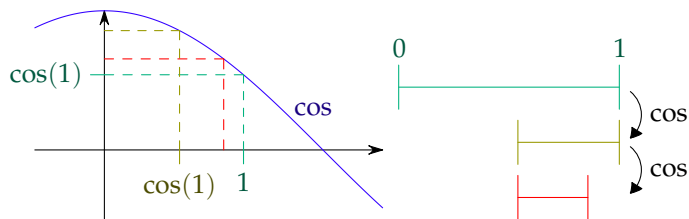
Wir behandeln nun einen der schönsten Sätze der Analysis.

Haben Sie schon einmal gelangweilt vor Ihrem Taschenrechner gesessen und immer wieder dieselbe Taste gedrückt? Wenn dies zum Beispiel die Kosinustaste war, haben Sie vielleicht bemerkt, dass sich der Wert in der Anzeige immer mehr einer Zahl annäherte und schließlich (wegen der endlichen Rechengenauigkeit) gleich blieb (0,73908... oder 0,99984..., je nachdem, ob Sie Winkel in Bogenmaß oder in Grad messen). Und noch erstaunlicher: Egal, welche Zahl am Anfang im Display stand, der Grenzwert ist immer derselbe.

Wie kommt das? Welche Bedeutung hat der Grenzwert?

Die zweite Frage lässt sich leicht beantworten: Wenn eine Zahl x unter Anwendung von \cos gleich bleibt, erfüllt sie die Gleichung

$$\cos x = x.$$

Abbildung 1.19. Mehrfache Anwendung von \cos

1.4.6 Definition

Sei X eine Menge und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. $p \in X$ heißt **Fixpunkt** von T , falls $T(p) = p$.

Nun zur ersten Frage. Sei x_0 die Zahl, die am Anfang im Display steht. Durch wiederholtes Drücken der \cos -Taste erhält man nacheinander

$$x_1 = \cos x_0, \quad x_2 = \cos x_1 = \cos(\cos x_0), \quad x_3 = \cos x_2 = \cos(\cos(\cos x_0)), \quad \dots$$

Hierfür zunächst eine allgemeine Notation:

1.4.7 Definition

Sei X eine Menge und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Zu $n \in \mathbb{N}$ ist die **n -te Iterierte** von T die Abbildung

$$T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n\text{-mal}} : X \rightarrow X.$$

Mit anderen Worten: Für $x \in X$ ist $T^n(x)$ induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} T^1(x) &= T(x) \\ T^{n+1}(x) &= T(T^n(x)) \end{aligned}$$

Vorsicht! $T^n(x)$ ist nicht dasselbe wie $T(x)^n$, die n -te Potenz von $T(x)$ (die nur für $X = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} definiert ist). Leider schreibt man zum Beispiel für $(\cos(x))^2 = \cos(x) \cdot \cos(x)$ auch manchmal $\cos^2(x)$. Dann muss man aus dem Kontext erschließen, ob hiermit die Iterierte, also $\cos(\cos(x))$, oder die Potenz gemeint ist.

Bemerkung: Die Theorie der **dynamischen Systeme** untersucht, wie sich Iterierte T^n von Abbildungen für $n \rightarrow \infty$ verhalten. Hierbei treten viele faszinierende Phänomene auf, z. B. Chaos und Fraktale.

Wir betrachten hier nur äußerst »zahme« Abbildungen, die Kontraktionen. Bei ihnen tritt kein Chaos auf.

1.4.8 Definition

Seien (X, d) , (X', d') metrische Räume. Eine Abbildung $T : X \rightarrow X'$ heißt **Kontraktion**, falls T Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ ist.

Das heißt, es gibt ein $L < 1$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d'(Tx, Ty) \leq L \cdot d(x, y)$$

Siehe Definition 1.3.8.

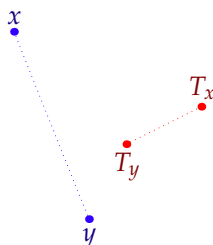


Abbildung 1.20. Kontraktion

Mit anderen Worten, T verkürzt Abstände mindestens um den Faktor L . Es ist wesentlich, dass dasselbe $L < 1$ für alle x, y funktioniert (ähnlich wie beim Wurzelkriterium für Reihen dasselbe $q < 1$ für alle $\sqrt[n]{|a_n|}$ funktionieren, d. h. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ erfüllen muss).

Die folgende Proposition gibt eine einfache Methode, für differenzierbare Funktionen im Reellen die Lipschitz-Konstante abzuschätzen.

1.4.9 Proposition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $L \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (i) Für alle $x, y \in I$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.
- (ii) Für alle $x \in I$ gilt: $|f'(x)| \leq L$.

Beweis: Beweis von (ii) \Rightarrow (i): Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ zwischen x und y mit $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, also $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Nach (ii) ist $|f'(\xi)| \leq L$, und das gibt die Behauptung.

Beweis von (i) \Rightarrow (ii): Sei $x_0 \in I$. Für alle $x \in I, x \neq x_0$ ist nach Annahme $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq L$, und daraus folgt $|f'(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq L$. □

Beispiel: Für $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ für alle x, y , da $\cos' = -\sin$ und $|\sin x| \leq 1$ für alle x ist. Aber \cos ist keine Kontraktion, da man hier 1 nicht durch eine kleinere Zahl ersetzen kann.

Betrachten wir aber $\sin : I \rightarrow I$ mit $I = [-1, 1]$, so ist dies eine Kontraktion: Da \sin auf I monoton wächst (wegen $-\frac{\pi}{2} < -1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ und $\sin' = \cos > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), gilt $\sin(-1) \leq \sin x \leq \sin 1$ und damit $|\sin x| \leq \sin 1$ für $x \in I$, also kann man $L = \sin 1$ wählen, das ist kleiner als eins.

(Als erstes muss man natürlich prüfen, dass das Bild von \cos wirklich in I enthalten ist. Dies ist klar, da $|\cos x| \leq 1$ für alle x ist.)

1.4.10 Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Kontraktion.

- (1) T hat genau einen Fixpunkt p .
- (2) Sei $x_0 \in X$ beliebig und die Folge (x_n) definiert durch $x_{n+1} = Tx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$.

Beweis: Eindeutigkeit des Fixpunktes:

Sei $Tp = p, Tq = q$. Dann $d(p, q) = d(Tp, Tq) \leq Ld(p, q), L < 1 \Rightarrow d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$.

Nun zeigen wir: Konvergiert die in (2) definierte Folge (x_n) gegen ein p , so ist p ein Fixpunkt.

Beweis: $Tp = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$.

Es bleibt nachzuprüfen, dass die Folge (x_n) konvergiert. Hierzu zeigen wir, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

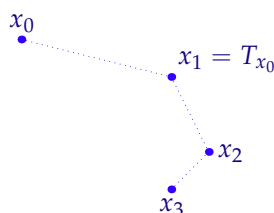


Abbildung 1.21. Mehrfachanwendung einer Kontraktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq Ld(x_n, x_{n-1})$. Wiederholte Anwendung ergibt $d(x_{n+1}, x_n) \leq Ld(x_n, x_{n-1}) \leq L^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq L^nd(x_1, x_0)$.

Für $k \in \mathbb{N}$ folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \dots + L^n)d(x_1, x_0), \text{ also} \\ d(x_{n+k}, x_n) &\leq L^n \underbrace{(1 + L + L^2 + \dots + L^{k-1})}_{\leq \sum_{i=0}^{\infty} L^i = \frac{1}{1-L}} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Wegen $0 < L < 1$ ist $(L^n)_n$ und damit $\left(\frac{L^n}{1-L}d(x_1, x_0)\right)_n$ eine Nullfolge, also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $\frac{L^n}{1-L}d(x_1, x_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Also folgt $d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Also ist (x_n) Cauchy-Folge und damit wegen der Vollständigkeit von X konvergent. \square

Beispiel: $\cos : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$. Das Intervall $[-1, 1]$ ist nach Lemma 1.4.2 vollständig, und \cos ist eine Kontraktion, wie wir nach Satz 1.4.9 sahen. Dies erklärt das Taschenrechnerphänomen vom Beginn dieser Sektion und zeigt auch, dass die Gleichung $\cos x = x$ im Intervall $[-1, 1]$ genau eine Lösung x hat. Für die Konvergenz $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ muss der Startwert x_0 nicht unbedingt in $[-1, 1]$ liegen, sondern kann eine beliebige reelle Zahl sein. Denn $x_1 = \cos x_0$ liegt in $[-1, 1]$, dann greift der Satz.

Beispiel: Hat man zwei Landkarten verschiedenen Maßstabs, die dasselbe Gebiet abbilden, und legt man die kleinere so auf die größere, dass sie am Rand nirgends übersteht, so gibt es genau einen Ort, dessen Darstellungen in den beiden Karten genau übereinanderliegen.

Man findet ihn wie folgt, (z. B. für Europakarten): Wähle irgendeinen Ort, etwa Rom, auf der großen Karte und suche denselben Ort (also Rom) auf der kleinen Karte. Sieh nach, welcher Ort der großen Karte direkt darunter liegt (also unter dem Kleinkarten-Rom; sagen wir, es ist Kleinkleckersdorf). Suche nun Kleinkleckersdorf auf der kleinen Karte und sieh nach, welcher Ort der großen Karte direkt darunter liegt etc. Man erhält eine Folge von Orten, die gegen den gesuchten Punkt konvergieren.

Hier ist X = die größere Karte, und T bildet einen Punkt auf der größeren Karte auf den entsprechenden Punkt der kleineren Karte ab. Da die kleinere ganz auf der größeren liegt, kann man T als Abbildung $X \rightarrow X$ auffassen. T ist eine Kontraktion wegen der verschiedenen Maßstäbe. Also hat T genau einen Fixpunkt, und man findet ihn durch Iteration von T .

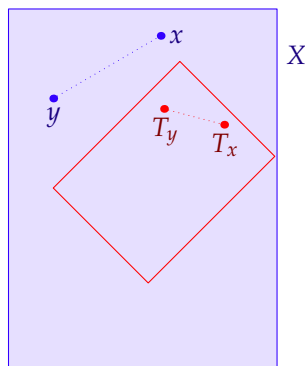


Abbildung 1.22. Europa-Landkarte

Bemerkung: In diesem Beispiel kann der Fixpunkt sogar explizit berechnet werden, mit Mitteln der linearen Algebra: Wir legen den Koordinatennullpunkt in die untere linke Ecke der großen Karte, so dass diese im ersten Quadranten liegt. Bezeichnet $t < 1$ das Verhältnis der Maßstäbe, ϕ den Winkel, um den die kleine Karte gegenüber der großen verdreht ist sowie $b \in \mathbb{R}^2$ die Koordinate der linken unteren Ecke der

kleinen Karte, so ist $Tx = Ax + b$, $x \in X \subset \mathbb{R}^2$, wobei $A = tR$ und $R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ die Rotationsmatrix ist. Die Gleichung $Tx = x$ wird zu $(I - A)x = b$ ($I =$ Einheitsmatrix). $I - A$ ist invertierbar, da die Eigenwerte von R den Betrag eins, also die Eigenwerte von $A = tR$ den Betrag t haben, also ungleich eins sind. Das Inverse von $I - A$ kann man mittels der geometrischen Reihe als

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

schreiben. (Mehr zu Reihen von Matrizen später bei Differentialgleichungen. Für die Konvergenz braucht man $\|A\| < 1$ mit der dort eingeführten Matrixnorm, dies ist hier erfüllt.) Also $x = (I - A)^{-1}b = b + Ab + A^2b + A^3b + \dots$. Dies entspricht gerade der Bestimmung des Fixpunktes x durch Iteration, denn für beliebiges $x_0 \in X$ ist $Tx_0 = Ax_0 + b$, $T^2x_0 = A(Ax_0 + b) + b = A^2x_0 + Ab + b$, \dots , $T^n x_0 = A^n x_0 + A^{n-1}b + A^{n-2}b + \dots + Ab + b$. Der erste Term geht für $n \rightarrow \infty$ gegen null, der Rest sind die Partialsummen der geometrischen Reihe oben, konvergieren also gegen x . So passt alles wunderbar zusammen.

Bemerkung: Die Beispiele zeigen deutlich, warum die Einführung des Begriffs ‚induzierte Metrik‘ sinnvoll war: Der Fixpunktsatz ist nur anwendbar, wenn wir $[-1, 1]$ bzw. die Landkarte als eigenständige metrische Räume auffassen.

Wir werden den Fixpunktsatz im Laufe des Buchs zweimal an zentralen Stellen anwenden: Einmal im Beweis des Satzes 3.2.3 über die Umkehrabbildung, im Fall $X = \mathbb{R}^n$, und einmal zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen, im Fall $X = C([a, b])$, siehe Satz 8.2.4.

1.5 Kompaktheit

Frage: Gibt es eine Verallgemeinerung des Satzes

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ nimmt sein Maximum und sein Minimum an, d. h.

$\exists m \in [a, b], \exists M \in [a, b]$ mit $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ für alle $x \in [a, b]$?

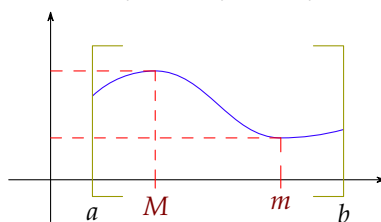


Abbildung 1.23. Maximum und Minimum einer auf einem geschlossenem Intervall definierten Funktion

Für welche Teilmengen X von \mathbb{R}^n , allgemeiner für welche metrischen Räume (X, d) gilt die analoge Aussage mit $[a, b]$ ersetzt durch X ? In Analysis I haben wir anhand von Beispielen gesehen, dass dies zum Beispiel für unbeschränkte Mengen und für offene Intervalle nicht zutrifft.

Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns, dass beim Beweis des Satzes vom Maximum und Minimum der Begriff des Häufungspunktes wesentlich war. Hierbei heißt $p \in X$ ein **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_n$ im metrischen Raum (X, d) , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $p_k \in K_\varepsilon(p)$ für unendlich viele k . Äquivalent dazu ist, dass es eine Teilfolge von $(p_k)_k$ gibt, die gegen p konvergiert.

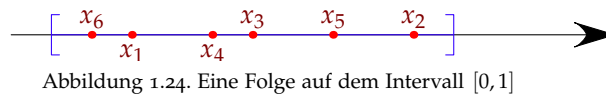
1.5.1 Definition

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **kompakt**, falls gilt: Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt.

Selbstverständlich muss der Häufungspunkt in X liegen. Dementsprechend heißt eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) kompakt, falls der metrische Raum $(M, d|_M)$ kompakt ist, d.h. falls jede Folge in M einen Häufungspunkt in M hat. Wie die Vollständigkeit ist Kompaktheit eine intrinsische Eigenschaft metrischer Räume.

Beispiele:

- (1) $[0, 1]$ ist kompakt. (Für eine Verallgemeinerung davon siehe Satz 1.5.4.)
 Beweis: Sei (p_k) Folge in $[0, 1]$. Dann ist (p_k) beschränkt, somit hat (p_k) nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $p \in \mathbb{R}$, also gibt es eine Teilfolge (p_{k_i}) mit $p_{k_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p$.
 $[0, 1]$ ist abgeschlossen, also folgt $p \in [0, 1]$.
- (2) $(0, 1)$ ist nicht kompakt: $p_k = \frac{1}{k} \in (0, 1)$ ($k \geq 2$), damit ist $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \notin (0, 1)$, somit kann (p_k) keinen Häufungspunkt in $(0, 1)$ haben.
- (3) $[0, \infty)$ ist nicht kompakt, denn $p_k = k$ hat keinen Häufungspunkt.



Diese Beispiele lassen sich verallgemeinern. Zunächst ein einfacher Begriff:

1.5.2 Definition

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt **beschränkt**, falls $p \in X$ und $r > 0$ existieren mit $M \subset K_r(p)$.

Dies ist äquivalent dazu, dass für *jedes* $p \in X$ ein r existiert mit $M \subset K_r(p)$ – Übung! Damit ist dies äquivalent zum in Analysis I für $X = \mathbb{R}$ eingeführten Begriff, wo $p = 0$ angenommen wurde. Beschränktheit ist eine intrinsische Eigenschaft des metrischen Raums $(M, d|_M)$.

1.5.3 Satz

Sei (X, d) metrischer Raum. Ist $M \subset X$ kompakt, dann ist M abgeschlossen und beschränkt.

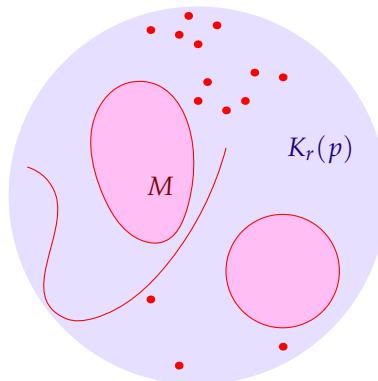


Abbildung 1.25. Jeder Punkt der Menge M liegt in der Kugel $K_r(p)$

Beweis: Sei M kompakt.

1. M ist abgeschlossen.

Sei (p_k) eine Folge in M , die gegen ein $p \in X$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $p \in M$ gilt. Weil M kompakt ist, hat (p_k) einen Häufungspunkt $p' \in M$. Weil eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt hat (nämlich ihren Grenzwert), muss $p' = p$ gelten, also folgt $p = p' \in M$.

2. Angenommen, M ist unbeschränkt. Wähle $p \in X$, $p_k \in M \setminus K_k(p)$ für $k = 1, 2, \dots$. Existierte eine konvergente Teilfolge $p_{k_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q$, so wäre $d(p_{k_i}, q) < 1$ für $i \geq i_0$ mit geeignetem i_0 , also $d(p_{k_i}, p) \leq d(p_{k_i}, q) + d(q, p) < 1 + d(q, p)$ für alle $i \geq i_0$, im Widerspruch zu $d(p_{k_i}, p) \geq k_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$. \square

Im \mathbb{R}^n gilt auch die Umkehrung:

1.5.4 Satz

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Leftrightarrow M$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Wichtig: Das gilt für Teilmengen des \mathbb{R}^n (mit der euklidischen Metrik). In anderen metrischen Räumen muss die Implikation $\supset \Leftarrow \supset$ nicht gelten, siehe Beispiel (3) unten.

Beweis: Wegen Satz 1.5.3 müssen wir nur $\supset \Leftarrow \supset$ zeigen. Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und sei $(x_k)_k$ eine Folge in M . Wir müssen zeigen, dass $(x_k)_k$ einen Häufungspunkt in M hat.

Schreibe in Komponenten $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$. Da M beschränkt ist, ist die Folge $(x_k)_k$ beschränkt, also ist $(x_k^{(i)})_k$ beschränkt für jedes $i = 1, \dots, n$. Nach Bolzano-Weierstraß hat $(x_k^{(1)})_k$ eine konvergente Teilfolge, sagen wir $x_{k'}^{(1)} \xrightarrow{k' \rightarrow \infty} x^{(1)}$. Wiederum nach Bolzano-Weierstraß hat die Folge $(x_{k'}^{(2)})_{k'}$ eine konvergente (Teil-)Teilfolge, sagen wir $x_{k''}^{(2)} \xrightarrow{k'' \rightarrow \infty} x^{(2)}$. Beachte, dass immer noch $x_{k''}^{(1)} \xrightarrow{k'' \rightarrow \infty} x^{(1)}$ gilt.

Wir fahren so bis zur n -ten Komponente fort und erhalten schließlich eine Teilfolge $(x_{\bar{k}})$ von (x_k) und Werte $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ mit $x_{\bar{k}}^{(i)} \xrightarrow{\bar{k} \rightarrow \infty} x^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Aus Lemma 1.2.4 folgt, dass $x_{\bar{k}} \xrightarrow{\bar{k} \rightarrow \infty} x := (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, also hat (x_k) den Häufungspunkt x . Da M abgeschlossen ist, gilt $x \in M$, was zu zeigen war. □

Beispiele: Die Mengen in (1) und (2) sind kompakt. Die Abgeschlossenheit wurde nach Satz 1.3.11 gezeigt:

(1) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2\}$ ist kompakt. Beschränkt: $M \subset K_3(0)$, da $(x_1, x_2) \in M$

$$\Rightarrow |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{5} < 3.$$

(2) $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ist kompakt. Beschränkt: $S \subset K_2(0)$.

(3) In $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist die Menge $S = \{f \in C([a, b]) : \|f\|_\infty = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt. Zum Beispiel hat die Folge (f_k) , $f_k(x) = \begin{cases} kx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}$ keinen Häufungspunkt.

(Beweis als Übung)

Der Satz vom Maximum und Minimum

Unser nächstes Ziel ist, den Satz vom Maximum und Minimum zu beweisen. Einen Schritt im Beweis formulieren wir separat:

1.5.5 Satz (Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ sei stetig.

Ist X kompakt, so ist $f(X)$ kompakt.

Bemerkung: Vergleiche: $A \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Kompaktheit bleibt unter f erhalten, Abgeschlossenheit aber unter f^{-1} ! Umgekehrt stimmt es im Allgemeinen nicht. Siehe auch Übung ??.

Beweis: Sei (q_k) Folge in $f(X)$. Für jedes k wähle $p_k \in X$ mit $f(p_k) = q_k$.

X ist kompakt, somit existiert eine Teilfolge (p_{k_i}) mit $p_{k_i} \rightarrow p \in X$.

f ist stetig, also $q_{k_i} = f(p_{k_i}) \rightarrow f(p) \in f(X)$. □

1.5.6 Satz

Sei (X, d) kompakter metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann nimmt f auf X sein (globales) Maximum und Minimum an.

Für $X = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ erhalten wir den am Anfang des Abschnitts zitierten Satz als Spezialfall. Zum Beweis brauchen wir:

1.5.7 Lemma

Jede kompakte Teilmenge von \mathbb{R} hat ein Maximum und ein Minimum.

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt. Weil A beschränkt ist, existiert das Supremum $S = \sup A$. Nach Definition des Supremums existieren $q_k \in A$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S$. Da A abgeschlossen ist, folgt $S \in A$, das heißt: S ist Maximum von A . Die Existenz des Minimums zeigt man analog mittels des Infimums. \square

Beweis (von Satz 1.5.6): Nach Satz 1.5.5, angewendet mit $Y = \mathbb{R}$, ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach dem Lemma hat die Menge $f(X)$ ein Maximum. Dies war zu zeigen, denn $S = \max f(X)$ bedeutet: $\exists p_0$ mit $S = f(p_0)$ und $\forall p \in M : f(p) \leq S = f(p_0)$, das heißt, f nimmt in p_0 sein Maximum an. Analog folgt die Existenz des Minimums. \square

Bemerkung: Der Satz vom Maximum und Minimum (und daher der Kompaktheitsbegriff) hat eine zentrale Bedeutung in der Mathematik. Viele Probleme kann man mittels der Idee des »Extremalprinzips« lösen, d. h. man betrachtet eine geeignete (je nach Problem einzuführende) Funktion, deren Maxima oder Minima einem die Lösung des Problems quasi schenken. Siehe Analysis I, Abschnitt 5.3.

Ein Beispiel aus der linearen Algebra: Wie Sie wissen, hat jede symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix A einen Eigenvektor (sogar n Stück; hat man erst mal einen, findet man die anderen mit Induktion). Dies ist nicht leicht zu zeigen. Hier ist eine Beweisidee mit analytischen Mitteln:

- (1) Betrachte die Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ auf der Einheitskugel $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. f ist ein Polynom, also stetig. Da S kompakt ist, gibt es einen Punkt $x_0 \in S$, wo f maximal ist.
- (2) Mit Mitteln der n -dimensionalen Differentialrechnung zeigt man nun leicht, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren muss mit $Ax_0 = \lambda x_0$, d. h. x_0 ist Eigenvektor für A .

Man braucht hier den Satz 4.3.3 über Extrema mit Nebenbedingungen, eine Verallgemeinerung der Aussage, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bei einem Maximum verschwindet.

1.5.1 Der Satz von Heine-Borel

Für viele Zwecke ist es nützlich, Kompaktheit mittels offener Mengen statt mittels Häufungspunkten von Folgen zu charakterisieren. Dies geht mit Hilfe des Begriffs der offenen Überdeckung.

1.5.8 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Eine **offene Überdeckung** von A ist eine Familie von offenen Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ von X mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

Für $A = X$ gilt dann natürlich $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

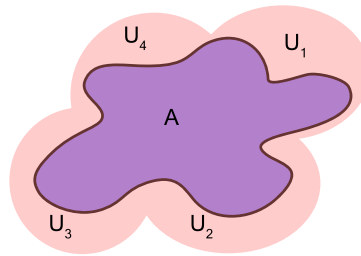


Abbildung 1.26. Die Familie U_1, \dots, U_4 überdeckt A

1.5.9 Satz (Kompaktheit und offene Überdeckungen; Satz von Heine-Borel)

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) X ist kompakt.
- (2) Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung. Das heißt:
Für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X existieren endlich viele $i_1, \dots, i_N \in I$, so dass

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}.$$

Daraus folgt sofort, dass die Kompaktheit einer Teilmenge $A \subset X$ äquivalent zur Existenz endlicher offener Teilüberdeckungen für jede offene Überdeckung von A ist.

Beispiele:

- (1) (Nicht-Beispiel): Seien $A = (0, 1]$ und $U_i = (\frac{1}{i}, 2)$ mit $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, denn für $x \in A$ gilt $0 < x \leq 1$, und aus dem Archimedischen Prinzip folgt, dass es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $\frac{1}{i} < x$, also $x \in U_i$. Allerdings überdecken beliebige endlich viele der U_i nicht ganz A , denn seien i_1, \dots, i_N beliebig und $m = \max\{i_1, \dots, i_N\}$, dann ist offenbar $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N} \subset (\frac{1}{m}, 2)$, also $\frac{1}{2m} \in A$, aber $\frac{1}{2m} \notin U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$.
- (2) Seien $A = [0, 1]$ und $U_i = (\frac{1}{i}, 2)$ mit $i \in \mathbb{N}$. Damit 0 auch überdeckt wird, brauchen wir eine weitere offene Menge U_0 mit $0 \in U_0$. Dann existiert wegen der Offenheit von U_0 ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_0$. Wir wählen i_0 mit $\frac{1}{i_0} < \varepsilon$. Somit bildet $U_0 \cup U_{i_0}$ eine endliche offene Teilüberdeckung von A .

Bemerkung: In Beispiel (2) ist *nicht* die Kompaktheit von $[0, 1]$ bewiesen. Für diese müssten wir mit einer *beliebigen* offenen Überdeckung anfangen.

Um sich an offene Überdeckungen zu gewöhnen, versuchen Sie zunächst, einen Beweis der Implikation „(2) \Rightarrow (1)“ im Satz von Heine-Borel selbst zu finden! Hinweis: Indirekter Beweis. Der Beweis von „(1) \Rightarrow (2)“ ist weitaus schwieriger.

Beim Beweis brauchen wir folgendes Lemma. Beweis als Übung.

1.5.10 Lemma

Sei (X, d) metrischer Raum.

- (1) Ist X kompakt und $M \subset X$ abgeschlossen, so ist M kompakt.
- (2) Sind A_1, A_2, \dots kompakte Teilmengen von X mit $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, so ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

Beachten Sie, dass das Analogon von (2) für nicht-kompakte Teilmengen nicht gelten muss. Beispiel: $A_k = (0, \frac{1}{k})$ in $X = \mathbb{R}$.

Beweis (von Satz 1.5.9): „(2) \Rightarrow (1)“: Es gelte (2). Angenommen X ist nicht kompakt. Dann gibt es eine Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X ohne Häufungspunkt. Das heißt, für jedes $p \in X$ existiert ein ε_p , so dass $U_p := K_{\varepsilon_p}(p)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält, d.h. es gilt $p_k \in U_p$ nur für endlich viele k .

Offenbar ist $X = \bigcup_{p \in X} U_p$, denn ein beliebiges $p \in X$ ist ja in U_p enthalten. Nach Annahme gibt es zur offenen Überdeckung $(U_p)_{p \in X}$ eine endliche offene Teilüberdeckung, $X = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_N}$.

Per Konstruktion enthält jedes U_{p_i} nur endlich viele Glieder der Folge (p_k) , also gilt dies auch für $U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_N} = X$. Das heißt, es gilt $p_k \in X$ nur für endlich viele k , ein offensichtlicher Widerspruch.

Damit ist (2) \Rightarrow (1) gezeigt.

„(1) \Rightarrow (2)“: Wir zeigen zuerst eine Zwischenbehauptung:

Zwischenbehauptung: Sei X kompakt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele ε -Kugeln, die X überdecken.

Beweis (der Zwischenbehauptung): Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass X nicht von endlich vielen ε -Kugeln überdeckt werden kann. Wähle

$p_1 \in X$ beliebig

$p_2 \in X \setminus K_{\varepsilon}(p_1)$ (dies geht, da $X \not\subset K_{\varepsilon}(p_1)$)

$p_3 \in X \setminus (K_{\varepsilon}(p_1) \cup K_{\varepsilon}(p_2))$ (dies geht, da $X \not\subset K_{\varepsilon}(p_1) \cup K_{\varepsilon}(p_2)$)

etc.

allgemein $p_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k K_{\varepsilon}(p_i)$. Dies ergibt eine Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X , wobei $d(p_k, p_l) \geq \varepsilon$ für alle $k > l$.

Daher kann $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt haben und somit kann X nicht kompakt sein. Also haben wir die Zwischenbehauptung bewiesen. Der Beweis zeigt auch, dass es egal ist, ob wir dabei offene oder abgeschlossene Kugeln betrachten. \square

Wir führen jetzt den Beweis von (1) \Rightarrow (2) in Satz 1.5.9. Sei X kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Angenommen, es gibt keine endliche Teilüberdeckung zu $(U_i)_{i \in I}$. Unsere Strategie ist folgende: Wir konstruieren eine Folge kompakter Mengen

$$X \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

- (a) A_k hat keine endliche Teilüberdeckung (kurz: T \ddot{U}) zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$.
- (b) A_k ist in einer abgeschlossenen Kugel \bar{K}_k vom Radius $\frac{1}{k}$ enthalten.

Dies geht wie folgt:

1. Wir überdecken X mit endlich vielen abgeschlossenen 1-Kugeln. Da X keine endliche T \ddot{U} (immer zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$) besitzt, gibt es unter diesen Kugeln eine, sagen wir \bar{K}_1 , die keine endliche T \ddot{U} besitzt. Setze $A_1 = \bar{K}_1$. Nach Lemma 1.5.10(1) ist A_1 kompakt.

2. Da A_1 kompakt ist, können wir es mit endlich vielen abgeschlossenen $\frac{1}{2}$ -Kugeln überdecken. Da A_1 keine endliche Tü hat, gibt es unter diesen Kugeln eine, sagen wir \bar{K}_2 , für die $A_1 \cap \bar{K}_2$ keine endliche Tü hat. Setze $A_2 = A_1 \cap \bar{K}_2$. Nach Lemma 1.5.10(1) ist A_2 kompakt.

Auf dieselbe Weise erhalten wir A_3, A_4, \dots mit den Eigenschaften (a) und (b). Nach Lemma 1.5.10(2) gibt es ein $p \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Da $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, existiert ein $i \in I$ mit $p \in U_i$.

Da U_i offen ist, existiert ein ε , so dass $K_\varepsilon(p) \subset U_i$. Wähle k mit $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Wegen $p \in A_k$ und $A_k \subset \bar{K}_k$ gilt $p \in \bar{K}_k$, und aus $\frac{2}{k} < \varepsilon$ folgt $\bar{K}_k \subset K_\varepsilon(p)$. Damit folgt $A_k \subset \bar{K}_k \subset K_\varepsilon(p) \subset U_i$.

Also wird A_k von der einen Menge U_i überdeckt, im Widerspruch zur Konstruktion der A_k . \square

1.6 Ausblick: Topologische Räume *

Wir sind mehrfach Charakterisierungen von Begriffen (z.B. Stetigkeit, Kompaktheit) mittels offener Mengen begegnet. Auch die intuitive Vorstellung von ‚angrenzen‘ – zum Beispiel grenzt der Punkt 0 an das Intervall $(0, 1)$ an – lässt sich mit Hilfe offener Mengen charakterisieren. Folgende Definition von ‚angrenzen‘ eines Punktes p an eine Teilmenge M eines metrischen Raums spiegelt diese Vorstellung gut wieder:

p grenzt an eine Menge M an, falls jede offene Menge, die p enthält, schon M schneiden muss.

(Übung: das ist äquivalent zu $p \in \bar{M}$.)

Es stellt sich heraus, dass vieles ‚funktioniert‘, wenn man die offenen Mengen statt einer Metrik als fundamentales Konzept zugrundelegt. Daher definiert man:

1.6.1 Definition

Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X zusammen mit einer Menge von Teilmengen \mathcal{O} von X , für die gilt:

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$$

(2) \mathcal{O} ist abgeschlossen unter Vereinigungen, d.h. für beliebige Mengen I gilt

$$O_i \in \mathcal{O} \text{ für alle } i \in I \implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$$

(3) \mathcal{O} ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$O_i \in \mathcal{O} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \implies \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}$$

Ein solches \mathcal{O} nennt man eine **Topologie** auf X .

Beispiele: (1) Ist (X, d) metrischer Raum, so ist $\mathcal{O} = \{O \subset X : O \text{ ist offen}\}$ eine Topologie.

(2) Für jede Menge X ist $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie.

(3) Für jede Menge X ist $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ (die Potenzmenge von X) eine Topologie.

Man kann nun viele Begriffe für topologische Räume einführen. Vergewissern Sie sich, dass im Fall eines metrischen Raums mit der in Beispiel (1) definierten Topologie gerade die vorher eingeführten Begriffe herauskommen!

1.6.2 Definition

Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $M \subset X$.

- (1) M heißt **offen**, wenn $M \in \mathcal{O}$.
- (2) M heißt **abgeschlossen**, falls $M^c \in \mathcal{O}$.
- (3) Das **Innere** $\overset{\circ}{M}$ von M ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind.
- (4) Der **Abschluss** \overline{M} von M ist der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten.
- (5) Der **Rand** von M ist $\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.

1.6.3 Definition

Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, wenn gilt:

$$\text{Für jedes } O \in \mathcal{O}_Y \text{ ist } f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X.$$

1.6.4 Definition

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) heißt **kompakt**, wenn gilt: Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

Die Sätze 1.5.5 und 1.5.6 gelten dann weiterhin (Beweis als Übung).

1.6.5 Definition

Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, (p_k) eine Folge in X und $p \in X$. Wir sagen, (p_k) **konvergiert** gegen p , falls für jedes $O \in \mathcal{O}$ mit $p \in O$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_k \in O$ für alle $k \geq k_0$.

Vorsicht: Manches lässt sich nicht direkt von metrischen auf allgemeine topologische Räume übertragen. Zwei Beispiele:

- (1) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **folgenstetig**, falls $p_k \rightarrow p \Rightarrow f(p_k) \rightarrow f(p)$ für jede Folge (p_k) in X und $p \in X$ gilt. Stetige Abbildungen sind immer folgenstetig (Beweis als Übung), jedoch müssen folgenstetige Abbildungen nicht stetig sein!
- (2) X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat. Jeder kompakte Raum ist folgenkompakt, aber nicht jeder folgenkompakte topologische Raum muss kompakt sein.

Wie wir gesehen haben, gelten für metrische Räume die Äquivalenzen stetig \Leftrightarrow folgenstetig, kompakt \Leftrightarrow folgenkompakt.

Auch gewisse Begriffe lassen sich nicht von metrischen auf topologische Räume verallgemeinern, zum Beispiel der Begriff der beschränkten Menge.

Wofür braucht man dann topologische Räume? Hier sind drei unter vielen möglichen Antworten.

- (1) Manche Konvergenzbegriffe lassen sich nicht durch Metriken, wohl aber mittels Topologien beschreiben. Ein Beispiel ist die punktweise Konvergenz von Funktionen auf einer unendlichen Menge A . Dies geht so:

Sei A eine Menge. Auf $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ definiere eine Topologie \mathcal{O}_{pw} wie folgt:

$$\triangleright \text{Für } x \in A, a \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon > 0 \text{ sei } U_{x,a,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) : |f(x) - a| < \varepsilon\}.$$

▷ Eine Teilmenge $O \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ gehöre zu \mathcal{O}_{pw} , falls gilt:

Für jedes $f \in O$ gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_N \in A$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\bigcap_{i=1}^N U_{x_i, a_i, \varepsilon} \subset O$.

Es ist eine Übung im Jonglieren mit den Begriffen, zu zeigen, dass dies eine Topologie definiert, und dass Konvergenz in dieser Topologie äquivalent zur punktweisen Konvergenz ist.

- (2) Selbst wenn eine Topologie durch eine Metrik definiert ist, ist für viele Fragestellungen die Metrik unerheblich und nur die Topologie entscheidend. Hier ist ein Beispiel:

Sei S^2 die zwei-dimensionale Sphäre, also $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$, und T der Torus (Oberfläche eines Reifens). Eine spannende Frage ist, ob man S^2 durch stetiges Verformen in T überführen kann. Was dies genau bedeutet, und wie man beweist, dass dies nicht geht, behandelt man im Gebiet *algebraische Topologie*. Hierbei spielen nur die Topologien auf S^2 und T eine Rolle, nicht aber die Metriken.

Gemäß langerprobten Grundsätzen der Mathematik ist es sinnvoll, nicht von Metriken zu sprechen, wenn Metriken nicht relevant sind. Das schärft den Blick für's Wesentliche und erlaubt, Verbindungen zwischen unterschiedlichsten Kontexten zu entdecken.

- (3) Mittels topologischer Räume kann man die intuitive Idee des Verklebens recht einfach mathematisch präzisieren. Ein Beispiel: Das Möbiusband erhält man aus einem Rechteck, in dem man zwei gegenüberliegende Seiten gegenläufig verklebt. Für Details siehe Bücher über Topologie.

Teil II

Differentialrechnung in höheren Dimensionen

2 Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen

Wir wollen nun die Differentialrechnung von einer auf mehrere Dimensionen ausdehnen. In diesem Kapitel betrachten wir Abbildungen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich und eindimensionalem Wertebereich: $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$. Man spricht auch von Funktionen mehrerer Variablen: mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Im nächsten Kapitel werden wir zulassen, dass auch der Wertebereich mehrdimensional ist.

Wir werden folgende Fragen beantworten:

- (1) Was ist die Ableitung einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$?
- (2) Wie berechnet man diese Ableitung?
- (3) Was kann man damit anfangen?

Natürlich werden wir auch höhere Ableitungen betrachten.

Frage (1) ist, verglichen mit dem Fall $n = 1$, überraschend vielschichtig. Sie hat gleich mehrere Antworten: Differential, Richtungsableitungen, Gradient. Alle sind äquivalent, jedoch entspricht jede einem anderen Blickwinkel.

Hier sind einige Beispiele, wo Funktionen mehrerer Variablen auftreten:

- ▷ Viele Flächen im Raum lassen sich als Graph einer Funktion zweier Variablen darstellen.
- ▷ Viele physikalische Größen lassen sich als Funktion dreier Variablen auffassen, zum Beispiel die Temperaturverteilung im Raum: Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ ist $T(x)$ die Temperatur am Ort x (zu einem festen Zeitpunkt).
- ▷ Berücksichtigt man auch die Zeitabhängigkeit, erhält man eine Funktion von vier Variablen: $T(x, t)$ ist die Temperatur am Ort $x = (x_1, x_2, x_3)$ zum Zeitpunkt t .
- ▷ Die Determinante ist eine Funktion $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $M_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen bezeichnet. Indem man die Einträge der Matrizen in einer Reihe auflistet, kann man $M_n(\mathbb{R})$ mit \mathbb{R}^{n^2} identifizieren. Also ist \det eine Funktion von n^2 Variablen.

Für weitere Beispiele siehe die Liste nach Satz ??.

2.1 Das Differential und die Richtungsableitung

2.1.1 Vorüberlegung

Um eine Idee zu bekommen, was ein sinnvoller Ableitungsbegriff für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ sein könnte, erinnern wir uns an die Bedeutung der Ableitung und der Differenzierbarkeit für Funktionen einer Variable. Sei $a \in U$. Für $n = 1$ ist $f'(a)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. Was bedeutet das?

- (1) $f'(a)$ ist Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(a+h, f(a+h))$, für $h \rightarrow 0$:

$$(a) \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dies eignet sich wenig für eine direkte Verallgemeinerung auf $n > 1$. Z.B. für $n = 2$ ist der Graph eine Fläche im Raum, und diese besitzt Tangentialebenen statt Tangenten. Wodurch sollten dann ‚Sekanten‘ ersetzt werden?

Ein neuer Blickwinkel eröffnet sich, wenn wir Gleichung (a) umformen: Subtrahieren wir $f'(a)$ und ziehen es in Limes und Bruch, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$(b) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0 \quad \text{mit } L(h) = f'(a)h.$$

Schreiben wir $r(h) = f(a+h) - f(a) - L(h)$, so ist dies äquivalent zu

$$(c) \quad f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h) \quad \text{mit } L(h) = f'(a)h \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Beachten Sie: Die Funktion L ist linear, und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ bedeutet, dass $r(h)$ für $h \rightarrow 0$ schneller als linear gegen Null geht. Damit erhalten wir eine zweite, äquivalente Bedeutung von ‚Tangente‘:

- (2) Die Tangente ist der Graph derjenigen linearen Funktion $h \mapsto L(h)$, die $f(a+h) - f(a)$ mit einem Fehler approximiert, der für $h \rightarrow 0$ kleiner als linear ist.

Der Graph von L ist hierbei im Koordinatensystem, dessen Ursprung im Punkt $(a, f(a))$ liegt, zu zeichnen, siehe Abbildung ??.

Für die Bedingung an r in (c) gibt es eine nützliche Abkürzung, die wir gleich für eine Funktion r von $h \in \mathbb{R}^n$ formulieren:

Die »klein-o«-Notation: Wir schreiben

$$r(h) = o(\|h\|) \text{ für } h \rightarrow 0 \quad : \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Das heißt, $r(h)$ geht für $h \rightarrow 0$ schneller als linear gegen Null.

Die oben gegebene zweite Charakterisierung der Tangente lässt sich leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern: Etwa für $n = 2$ sind Ebenen durch den Nullpunkt im \mathbb{R}^3 , die die »vertikale« Richtung, d. h. den Vektor $(0, 0, 1)$, nicht enthalten, Graphen linearer Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Analog zum Fall $n = 1$ übersetzt sich also die Existenz einer (nicht-vertikalen) Tangentialebene in folgende Definition.

2.1.2 Definition der Differenzierbarkeit und des Differentials

2.1.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

f heißt **differenzierbar** in a , wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

In diesem Fall schreibt man $df|_a = L$ und nennt dies das **Differential** von f im Punkt a .

f heißt **differenzierbar auf U** , wenn f in jedem Punkt von U differenzierbar ist.

Vor allem in der älteren Literatur heißt $df|_a$ auch »totales Differential« von f .

Bemerkungen:

- (1) In der Definition ist h ein Vektor. Daher muss im Nenner $\|h\|$ und nicht h stehen. Dabei ist es egal, welche Norm für $\|h\|$ betrachtet wird, denn alle Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent. Siehe Übung ??.
- (2) Die in der Definition gegebene Bedingung ist äquivalent zu:

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h) \quad \text{mit } L \text{ linear, } r(h) = o(h).$$

Dazu setzt man einfach $r(h) := f(a+h) - f(a) - L(h)$. Siehe Gleichungen (b), (c) in den Vorüberlegungen. Dies lässt sich auch so formulieren:

Die Änderung des Funktionswerts $f(x)$ hängt annähernd linear von der Änderung des x -Werts (von a nach $a+h$) ab.

Dabei bedeutet ‚annähernd linear‘: linear, plus ein Term, der für $h \rightarrow 0$ schneller als linear gegen Null geht. Das Differential $df|_a$ ist dann der lineare Teil.

- (3) Falls ein L wie in der Definition existiert, so ist es eindeutig. Erfüllt nämlich L' dieselbe Grenzwertbedingung wie L , so erhält man durch Subtraktion $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(h) - L'(h)}{\|h\|} = 0$. Ersetzt man hier h durch th für festes $h \neq 0$ und betrachtet $t \rightarrow 0+$, so folgt

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{L(th) - L'(th)}{\|th\|} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{L(h) - L'(h)}{\|h\|}$$

wegen der Homogenität von L , L' und Norm, also $L(h) = L'(h)$.

Damit ist erst die Einführung einer Notation $df|_a$ gerechtfertigt. Die Eindeutigkeit folgt auch aus der Charakterisierung des Differentials als Richtungsableitung, Satz 2.1.3.

- (4) Jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Form

$$L(h) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i$$

(Matrixprodukt) für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dies ist nichts anderes als die Matrixdarstellung von L bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R} . Die α_i , die zu $df|_a$ gehören, werden wir in Korollar 2.1.5 berechnen.

- (5) U wird als offen angenommen, da man möchte, dass sich $a+h$ dem Punkt h von allen Richtungen annähern kann. Es würden auch schwächere Bedingungen an U genügen, zum Beispiel im Fall $n=1$, wo man bloß fordert, dass a ein Häufungspunkt von U ist. Wesentlich ist, dass L eindeutig bestimmt ist.

Es stellen sich folgende Fragen:

- (1) Kann man das Differential, ähnlich wie die Ableitung einer Funktion einer Variablen, mit Hilfe von Änderungsraten interpretieren?
- (2) Wie lässt sich $df|_a$ berechnen?
- (3) Wie lässt sich einer gegebenen Funktion ansehen, ob sie differenzierbar ist?

Diese Fragen werden im folgenden Abschnitt geklärt.

Für die erste Frage führen wir zunächst die Richtungsableitung ein und bestimmen ihre Beziehung zum Differential. Damit wird auch die zweite Frage beantwortet, denn die partiellen Ableitungen, ein Spezialfall der Richtungsableitungen, sind einfach zu berechnen und bestimmen das Differential.

2.1.3 Richtungsableitung und partielle Ableitungen

2.1.2 Definition (Richtungsableitung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $a \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$. Falls der Grenzwert

$$\partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

existiert, so heißt er **Richtungsableitung** von f bei a in Richtung h .

Bemerkung:

(1) Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \varepsilon$ folgt: $a + th \in U$. Somit ist der Grenzwert definiert.

(2) Schreibt man $g(t) := f(a + th)$, dann ist

$$\partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Abkürzend schreibt man auch

$$\partial_h f(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + th)$$

(3) Das Wort »Richtungsableitung« ist etwas irreführend. Denn $\partial_h f(a)$ hängt nicht nur von der Richtung von h ab, sondern auch von dessen Länge. Zum Beispiel ist für $n = 1$:

$$\partial_h f(a) = hf'(a),$$

wie sofort aus der Kettenregel folgt. Manche definieren daher die Richtungsableitung nur für $\|h\| = 1$, ich finde das aber unpraktisch.

(4) **Bedeutung der Richtungsableitung:** $\partial_h f(a)$ ist die momentane relative Änderung von $f(x)$, wenn sich x von a aus mit Geschwindigkeit(-vektor) h fortbewegt.

Beispiel: Sei $f(x_1, \dots, x_n) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Was sind die Richtungsableitungen von f ? Seien $a, h \in \mathbb{R}^n$.

Dann

$$\partial_h f(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\|a + th\|^2) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\|a\|^2 + 2t\langle a, h \rangle + t^2\|h\|^2) = (2\langle a, h \rangle + 2t\|h\|^2) \Big|_{t=0} = 2\langle a, h \rangle,$$

das Skalarprodukt von a und h . Zum Beispiel sind im Nullpunkt ($a = 0$) alle Richtungsableitungen gleich Null.

Richtungsableitungen und Differential hängen wie folgt zusammen.

2.1.3 Satz

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ und f differenzierbar in $a \in U$. Dann existiert für jeden Vektor h die Richtungsableitung $\partial_h f(a)$ und es gilt:

$$\partial_h f(a) = df_a(h)$$

Insbesondere ist die Abbildung $h \mapsto \partial_h f(a)$ linear.

Beweis: Zur Abkürzung sei $L = df_a$. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ so klein, dass $\{a + th : |t| < \delta\} \subset U$. Für $|t| < \delta$, $t \neq 0$ ist dann

$$\begin{aligned} f(a+th) - f(a) &= L(th) + r(th) \\ &= tL(h) + r(th), \quad \text{also} \\ \frac{f(a+th) - f(a)}{t} &= L(h) + \frac{r(th)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} L(h) \end{aligned}$$

da für $h \neq 0$ gilt, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(th)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \|h\| \frac{r(th)}{\|th\|} = 0$, und für $h = 0$ wegen $r(0) = 0$ nichts zu zeigen ist. \square

Bemerkung: Eine Feinheit: Die Umkehrung des Satzes 2.1.3 gilt nicht. Das heißt, aus der Existenz aller Richtungsableitungen folgt nicht, dass f differenzierbar ist. Zum Beispiel könnte $\partial_h f(a)$ für jedes h existieren, aber nicht linear von h abhängen.

Beispiel: Stellen Sie sich eine Stange vor, die in ihrem Mittelpunkt so gelagert ist, dass sie in beliebige Richtungen (außer vertikal) zeigen kann. Rotiert man die Stange eine halbe Drehung in horizontaler Richtung, so überstreicht sie genau die x, y Ebene (im (x, y, z) -Raum). Wackelt die Stange aber beim Rotieren auf und ab, so überstreicht sie eine Fläche. Es gilt dann: Diese Fläche hat im Nullpunkt keine Tangentialebene (außer wenn sich die Stange zufällig innerhalb einer festen, möglicherweise »schiefen« Ebene bewegt). Stellt man sich die Fläche als Graph einer Funktion $z = f(x, y)$ vor, so ist also f im Nullpunkt nicht differenzierbar. Andererseits existieren alle Richtungsableitungen bei $x = y = 0$.

Mathematisch: Zu $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ seien $r = r(x, y)$, $\phi = \phi(x, y)$ die Polarkoordinaten, d. h. r ist der Abstand zum Nullpunkt und $\phi \in [0, 2\pi)$ der (positiv gemessene) Winkel mit der x -Achse. Wir betrachten Funktionen der Form

$$f(x, y) = \begin{cases} r w(\phi) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für $w : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei der Übersichtlichkeit halber $r = r(x, y)$, $\phi = \phi(x, y)$ abgekürzt ist). Für solche Funktionen f gilt (Übung!):

- (1) Die »einseitigen« Richtungsableitungen im Nullpunkt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(th) - f(0)}{t}$$

existieren und sind gleich $f(h)$, für alle $h \in \mathbb{R}^2$.

- (2) Sei $h \in \mathbb{R}^2$. Die Richtungsableitung $\partial_h f(0)$ existiert genau dann, wenn $f(h) = -f(-h)$.

Für $h \neq 0$ gilt dies genau dann, wenn $w(\phi(h)) = -w(\phi(-h))$ (und dies ist gleich $-w(\phi(h) + \pi)$, wenn man ϕ 2π -periodisch fortsetzt). Dies entspricht gerade den »Stangenflächen«: Zeigt die eine Hälfte der Stange nach oben, so zeigt die andere mit derselben Steigung nach unten.

Übrigens darf hierbei w auch unstetig sein! Wählt man w unbeschränkt, so ist f sogar unstetig im Nullpunkt.

- (3) f ist in 0 differenzierbar $\Leftrightarrow w(\phi) = C \cos(\phi - \phi_0)$ für gewisse $C, \phi_0 \in \mathbb{R}$. Dies entspricht dem Fall, wo die Stange sich in einer Ebene bewegt, nämlich wegen $\cos(\phi - \phi_0) = \cos \phi \cos \phi_0 - \sin \phi \sin \phi_0$ und $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ in der Ebene $\{(x, y, z) : z = x \cdot C \cos \phi_0 - y \cdot C \sin \phi_0\}$. In diesem Fall ist f sogar eine lineare Funktion.

Also gibt jede 2π -periodische, aber π -»antiperiodische« Funktion w ein f , für das alle Richtungsableitungen in 0 existieren, aber nur die speziellen in (3) genannten Funktionen sind dort differenzierbar.

Man kann zum Beispiel $w(\phi) = \cos(3\phi)$ wählen: Die Stange wackelt bei einem Umlauf dreimal auf und ab. Die Funktion ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

2.1.4 Definition (Partielle Ableitung)

Sei (e_1, \dots, e_n) die Standard-Basis von \mathbb{R}^n . Dann heißt für $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \partial_{e_i} f(a)$$

die i -te partielle Ableitung von f in a . Konkret (etwa für $i = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2, a_3, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

Es wird also nur nach der i -ten Variablen abgeleitet, alle anderen Variablen werden als Konstanten betrachtet.

Beispiele:

(1) Für $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^2$.

(2) Für $f(x_1, x_2) = \sin(2x_1) \cdot e^{3x_2}$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2 \cos(2x_1) \cdot e^{3x_2}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3 \sin(2x_1) \cdot e^{3x_2}$.

Schreibweise: Andere gebräuchliche Schreibweisen für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind $\partial_{x_i} f$, $\partial_i f$, f_{x_i} und f'_{x_i} . Manchmal wird auch f_i statt f_{x_i} geschrieben. Für $n = 2$ schreibt man oft (x, y) statt (x_1, x_2) und dann f_x, f_y für die partiellen Ableitungen.

2.1.4 Berechnung des Differentials

Aus Satz 2.1.3 erhalten wir die gesuchte Berechnungsmethode für $df|_a(h)$ und für $\partial_n f(a)$:

2.1.5 Korollar (Berechnung des Differentials)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ und f differenzierbar in $a \in U$. Dann gilt für $h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n$

$$df|_a(h) = \partial_h f|_a = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Die $1 \times n$ Matrix $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ stellt also $df|_a$ bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R} dar. Sie heißt auch **Jacobi-Matrix** von f im Punkt a . Im Fall $n = 1$ hat sie nur den Eintrag $f'(a)$. Daher kann man sie als eine Kodierung der »Steigung« der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt a betrachten.

Beweis: Nach Satz 2.1.3 ist $df|_a(e_i) = \partial_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, und aus der Linearität von $df|_a$ folgt

$$df|_a(h) = df|_a(\sum h_i e_i) = \sum_i h_i df|_a(e_i) = \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \quad \square$$

Bemerkung: Mit der geometrischen Sicht der Vorüberlegung ist die Formel für $df|_a(h)$ leicht zu verstehen, etwa für $n = 2$: Nach Definition ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ bei $x_1 = a_1$. Diese Tangente erhält man als Schnitt der Tangentialebene (an den Graphen von f bei $x = a$) mit der durch $x_2 = a_2$ gegebenen senkrechten Ebene. Analoges gilt für $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$.

Die Koeffizienten α_1, α_2 einer linearen Funktion $L(h) = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ lassen sich andererseits wie folgt erhalten: α_1 ist die Steigung der Geraden, die man als Schnitt des Graphen von L mit der Ebene $h_2 = 0$ erhält, und analog für α_2 .

$$\text{Für } L = df|_a \text{ folgt } \alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$. Es ist $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$. Im Punkt $a = (2, 1)$ ist $f_x(a) = 4$, $f_y(a) = 2$, also ist die Tangentialebene der Graph von $L(h_1, h_2) = 4h_1 + 2h_2$ und die Richtungsableitung $\partial_h f(a) = 4h_1 + 2h_2$.

2.1.5 Ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit

Die Formel für das Differential $df|_a$ in Korollar 2.1.5 gilt nur unter der Annahme, dass f in a differenzierbar ist. Wie können wir das nachprüfen? Folgendes Kriterium ist sehr allgemein und genügt für die meisten Fälle.

2.1.6 Satz

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung von a und sind sie stetig in a , dann ist f differenzierbar in a .

Beachten Sie: Die Existenz der partiellen Ableitungen im Punkt a genügt nicht, um Differenzierbarkeit zu folgern (siehe das Beispiel nach Satz 2.1.3).

Beweis: Es ist übersichtlicher, den Beweis in zwei Dimensionen zu führen. Der allgemeine Fall geht analog.

Vorüberlegung: Um Differenzierbarkeit zu zeigen, müssen wir $f(a+h) - f(a)$ untersuchen, d.h. den Zuwachs von $f(x)$, wenn sich x von a nach $a+h$ ändert. Was geben uns die Voraussetzungen? Die partiellen Ableitungen geben uns Information über den Zuwachs von f , wenn sich x in der x_1 - oder der x_2 -Richtung ändert. Daher sollten wir, statt direkt von a nach $a+h$ zu gehen, den Umweg über $(a_1, a_2 + h_2)$ wählen, siehe Abbildung ?? (alternativ wäre auch der Umweg über $(a_1 + h_1, a_2)$ möglich und würde zum selben Ergebnis führen).

Wie bringen wir den Zuwachs in x_1 -Richtung in Verbindung mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}$? Da sich hierbei x_2 nicht ändert, ist das ein Problem über Funktionen einer Variable x_1 , und der Mittelwertsatz liefert genau die gesuchte Verbindung.

Nach Annahme existiert $\delta > 0$, so dass f und seine partiellen Ableitungen in $K_\delta(a)$ definiert sind. Für $\|h\| < \delta$ berechnen wir dann

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= (f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)) + (f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(q), \quad p = (\xi_1, a_2 + h_2), \quad q = (a_1, \xi_2) \end{aligned}$$

für ein ξ_1 zwischen a_1 und $a_1 + h_1$ sowie ein ξ_2 zwischen a_2 und $a_2 + h_2$. Hierbei haben wir den Mittelwertsatz angewendet: Einmal auf die Funktion $t \mapsto f(t, a_2 + h_2)$ und einmal auf die Funktion $t \mapsto f(a_1, t)$.

Für $h \rightarrow 0$ gilt $p \rightarrow a$ und $q \rightarrow a$. Da die partiellen Ableitungen in a stetig sind, folgt $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(q) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ für $h \rightarrow 0$. Setzen wir nun $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $A_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(q) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$, so folgt

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h) \text{ mit } L(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \quad r(h) = h_1 A_1 + h_2 A_2.$$

Den Rest $r(h)$ schätzen wir mit Cauchy-Schwarz ab: $\|r(h)\| \leq \|h\| \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Aus $A_1 \rightarrow 0$, $A_2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ folgt schließlich $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$. □

Zusammenfassung (Differential – Richtungsableitungen – partielle Ableitungen):

- ▷ Differenzierbarkeit bedeutet Existenz einer Tangentialebene an den Graphen. Die Tangentialebene ist der Graph des Differentials.
- ▷ Aus Differenzierbarkeit folgt Existenz und Linearität (bzgl. h) der Richtungsableitungen, aber nicht umgekehrt.
- ▷ Partielle Ableitungen existieren in Umgebung von a und sind stetig in $a \Rightarrow$ differenzierbar in $a \Rightarrow$ partielle Ableitungen existieren in a .

Die Umkehrungen gelten nicht. In der Praxis ist die Bedingung links meist erfüllt, also braucht man sich keine Sorgen zu machen.

2.1.6 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Wie in einer Dimension gilt:

2.1.7 Satz

f ist differenzierbar in $a \Rightarrow f$ ist stetig in a

Beweis: Schreibe $f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h)$, wobei $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, dann folgt $r(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und damit

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

da lineare Abbildungen stetig sind (Koordinatendarstellung!), also $L(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ gilt. \square

Bemerkung: Hätte man Differenzierbarkeit als Existenz aller Richtungsableitungen definiert (ein naheliegender Gedanke), wäre dieser Satz falsch, vergleiche das Beispiel nach Satz 2.1.3.

Wie immer ist es nützlich, ein paar Rechenregeln zu haben, mit denen man die Ableitung und die Differenzierbarkeit komplizierterer Funktionen aus der einfacherer Funktionen herleiten kann. Diese Rechenregeln sind ganz analog zu den uns bereits bekannten Regeln in \mathbb{R}^1 .

2.1.8 Satz (Algebraische Rechenregeln)

Wenn $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und f, g in a differenzierbar sind, so gilt: $f + g$, $f \cdot g$ und $\alpha \cdot f$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sind differenzierbar in a . Es gilt:

$$(1) \quad d(f + g)|_a = df|_a + dg|_a$$

$$(2) \quad d(f \cdot g)|_a = g(a) \cdot df|_a + f(a) \cdot dg|_a$$

$$(3) \quad d(\alpha \cdot f)|_a = \alpha \cdot df|_a$$

Wenn $g(a) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a und

$$(4) \quad d\left(\frac{f}{g}\right)|_a = \frac{g(a)df|_a - f(a)dg|_a}{g(a)^2}$$

Beweis: Ähnlich wie in \mathbb{R}^1 . \square

2.1.7 Die Kettenregel

Mit Hilfe der Kettenregel kann man das Differential der Komposition zweier Abbildungen aus den Differentialen der einzelnen Abbildungen berechnen. Die allgemeine Version der Kettenregel können wir erst in Abschnitt 3.1 formulieren, wenn wir das Differential allgemeiner Abbildungen einführen. Wir formulieren hier den wichtigen Spezialfall der Verkettung einer Kurve mit einer Funktion.

2.1.9 Satz (Kettenregel, Version für Funktion \circ Kurve)

Sei $\gamma : I \rightarrow U$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Wenn $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ differenzierbar in t_0 und f differenzierbar in $a = \gamma(t_0)$ ist, dann ist $f \circ \gamma$ differenzierbar in t_0 und es gilt:

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = df|_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \gamma'_i(t_0)$$

Kurz: Die Ableitung von f entlang γ ist gleich der Richtungsableitung von f in Richtung $\gamma'(t_0)$.

Diese Formel heißt manchmal auch **Regel vom totalen Differential**.

Da wir die allgemeine Kettenregel später beweisen werden, sei hier nur die Idee angegeben: Die Differenzierbarkeit von γ bzw. f bedeutet, dass die Änderung des Kurven- bzw. Funktionswerts annähernd linear von der Änderung des Arguments abhängt:

$$\gamma(t_0 + k) - \gamma(t_0) \approx \gamma'(t_0)k$$

$$f(a + h) - f(a) \approx df_a(h).$$

Verwendet man dies mit $a = \gamma(t_0)$ und $h = \gamma(t_0 + k) - \gamma(t_0) \approx \gamma'(t_0)k$, folgt

$$f(\gamma(t_0 + k)) - f(\gamma(t_0)) \approx df_a(\gamma'(t_0)k) = df_a(\gamma'(t_0))k.$$

Das heißt, die Änderung des Wertes der Funktion $f \circ \gamma$ hängt annähernd linear von der Änderung k ihres Arguments ab; die Ableitung von $f \circ \gamma$ ist der Koeffizient $df_a(\gamma'(t_0))$.

Für einen Beweis muss man nun bloß jeweils \approx präzisieren.

Kurz und praktisch: Sei f eine Funktion von zwei Variablen x, y . Für x, y setzen wir Funktionen von t ein, die wir $x(t)$ und $y(t)$ nennen. Schreiben wir $\frac{df}{dt} := \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))]$, dann ist

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}}$$

Am Schluss muss man noch x durch $x(t)$ und y durch $y(t)$ ersetzen.

Dies lässt sich leicht merken, aber man sollte sich klar machen: Links wird f als Funktion von t – nämlich als $f(x(t), y(t))$ – und rechts als Funktion von x, y aufgefasst. Die Buchstaben x, y stehen rechts in den ‚Nennern‘ für Variablen und in den ‚Zählern‘ für Funktionen von t . Diese Schreibweise ist z.B. in der Physik üblich.

Beispiele: Wir verwenden in (1) die formale und in (2), (3) die verkürzte Notation.

(1) Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ und $\gamma(t) = (t, 2t)$. Dann (bei beliebigem t)

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_1} \cdot \gamma_1'(t) + \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_2} \cdot \gamma_2'(t) \\ &= 2x_1 \cdot 1 + 2x_2 \cdot 2 \quad \text{mit } x_1 = t, x_2 = 2t \\ &= 2t + 4t \cdot 2 = 10t \end{aligned}$$

Das kann man auch direkt nachrechnen: $(f \circ \gamma)(t) = t^2 + (2t)^2 = 5t^2$, und dessen Ableitung ist $10t$.

(2) Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2x(-\sin t) + 2y \cos t \quad \text{mit } x = \cos t, y = \sin t \\ &= -2 \cos t \sin t + 2 \sin t \cos t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist nicht überraschend, da sich $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ auf dem Einheitskreis bewegt, wo f konstant gleich Eins ist.

(3) Die Kettenregel ist äußerst nützlich. Sie gibt einem unter anderem eine neue Methode, die Ableitung der Funktion $g(x) = x^x$, $x > 0$ zu berechnen: Setze $f(x, y) = x^y$, dann

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}(f(x, x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{dx} \\ &= y \cdot x^{y-1} \cdot 1 + x^y \log x \cdot 1 \quad \text{mit } y = x \\ &= x^x + x^x \log x \end{aligned}$$

(in stark verkürzter Notation; etwas ausführlicher wäre $f(u, v) = u^v$ mit $u(x) = x$, $v(x) = x$ usw.) in Übereinstimmung mit dem Ergebnis über die Berechnungsmethode mittels $x^x = e^{x \log x}$ und eindimensionaler Kettenregel. Diese neue Methode ist sicherlich systematischer!

Also: Man betrachtet einmal den Exponenten als konstant und leitet nach der Basis ab, dann betrachtet man die Basis als konstant und leitet nach dem Exponenten ab, dann addiert man die Ergebnisse!

Eigentlich erstaunlich, dass dies stimmt (warum z. B. addieren der Ergebnisse, nicht etwa multiplizieren oder etwas anderes?). Das Addieren ist Ausdruck der Linearität des Differentials.

2.1.8 Das Differential für Funktionen auf Vektorräumen

Bei der Definition des Differentials kann \mathbb{R}^n durch einen beliebigen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ersetzt werden. f ist dann auf einer offenen Menge $U \subset V$ definiert und $L = df|_a$ ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$ (auch **Linearform** auf V genannt). Definition 2.1.1 bleibt sonst unverändert, ebenso die Definition der Richtungsableitung von f , die jetzt für jedes $h \in V$ eine Zahl $\partial_h f(a)$ ergibt, und die Sätze 2.1.3 und 2.1.8 gelten weiterhin.

Wir nehmen nun an, dass V endlich-dimensional ist. Der Begriff der Differenzierbarkeit ist dann unabhängig von der Norm auf V , da in endlich-dimensionalen Vektorräumen alle Normen äquivalent sind, siehe Übung ?? . Die partiellen Ableitungen beziehen sich auf die spezielle Basis (e_1, \dots, e_n) im \mathbb{R}^n , analog kann man $\partial_{e_i} f$ für eine beliebige Basis (e_1, \dots, e_n) von V betrachten. Die Berechnungsmethode in Korollar 2.1.5 bezieht sich dann auf die Darstellung von h in dieser Basis.

Die Sätze 2.1.6, 2.1.7 und 2.1.9 gelten für beliebiges, endlich-dimensionales V , mit (bis auf Notation) denselben Beweisen.

Warum ist das interessant? Warum nicht beim \mathbb{R}^n bleiben? Hier sind drei Gründe.

1. Obwohl sich jeder (reelle, endlich-dimensionale) Vektorraum mittels Wahl einer Basis mit einem \mathbb{R}^n identifizieren lässt, haben manche Vektorräume keine natürlich vorgegebene Basis. Eine Basis zu wählen würde dann den Blick vom Wesentlichen ablenken und sogar manche Rechnung unnötig kompliziert machen.

Beispiel: Betrachten Sie die Sphäre $S^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$, einen Punkt $a \in S^2$ und den Tangentialraum an S^2 im Punkt a . Das ist die Menge $\{h \in \mathbb{R}^3 : h \perp a\}$. Dies ist ein zwei-dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 . Finden Sie eine Basis, die eine natürliche geometrische (oder sonstige) Bedeutung hat?

2. Auch wenn es eine »einfache« oder natürliche Basis gibt, ist es nicht immer vorteilhaft, diese zum Rechnen zu verwenden. Zum Beispiel: $V = M_n(\mathbb{R})$, die Menge der $n \times n$ -Matrizen. Am Ende von Abschnitt 3.2 werden wir die Abbildung $V \rightarrow V$, $A \mapsto A^2$ untersuchen und damit die Existenz von Wurzeln für Matrizen nahe der Einheitsmatrix beweisen.
3. Für die »hohen« Anwendungen der Analysis ist es wichtig, auch unendlichdimensionale Vektorräume zuzulassen, z. B. beim Problem der Brachystochrone (welche Form muss eine Kugelbahn haben, die einen Punkt mit einem tiefer und seitwärts gelegenen verbindet, damit die Kugel schnellstmöglich ankommt?), allgemeiner in der Variationsrechnung.

Bemerkung: Hier noch ein paar Worte zum Fall $\dim V = \infty$. Der wesentliche Unterschied zu endlichen Dimensionen besteht darin, dass lineare Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$ nicht notwendig stetig sind. Die Stetigkeit von $df|_a$ wird in den Beweisen der Sätze 2.1.7 und 2.1.9 verwendet. Daher fordert man für $\dim V = \infty$ die Stetigkeit der linearen Abbildung $df|_a$ in Definition 2.1.1 und nennt f dann **Fréchet-differenzierbar** in a ,

und $df|_a$ die **Fréchet-Ableitung** von f in a . Existieren alle Richtungsableitungen von f in a , so nennt man f **Gateaux-differenzierbar** in a .

Satz 2.1.7 und die erste Gleichung in 2.1.9 gelten für Fréchet-differenzierbare Funktionen.

Nebenbei sei erwähnt, dass aus der Stetigkeit von f im Punkt a und der Gültigkeit der Bedingung in Definition 2.1.1 folgt, dass $df|_a$ eine stetige lineare Abbildung ist, siehe Übung ??.

Weiterhin sind in unendlichen Dimensionen nicht alle Normen äquivalent (siehe Übung ??), daher ist es wichtig, zu sagen, welche Norm man verwendet.

Ein interessantes unendlich-dimensionales Beispiel wird später behandelt (im Abschnitt über Variationsrechnung).

2.2 Der Gradient

Von jetzt an formulieren wir alle Definitionen und Sätze für Funktionen auf Vektorräumen und deren Teilmengen. Beim ersten Lesen mag es nützlich sein, sich immer $V = \mathbb{R}^n$ vorzustellen.

Der Gradient ist neben Differential und Richtungsableitungen die dritte Inkarnation der Ableitung. Er ist ein Vektor. Er ist nur definiert, wenn auf V ein Skalarprodukt gegeben ist.

2.2.1 Definition

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in U$ differenzierbar. Der **Gradient** von f an der Stelle a der Vektor $\nabla f(a) \in V$, für den gilt:

$$df|_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \text{für alle } h \in V$$

Statt $\nabla f(a)$ schreibt man auch **grad** $f(a)$.

Bemerkung: Warum existiert ein Vektor mit dieser Eigenschaft, und warum ist er eindeutig bestimmt? Es gilt: Für jede Linearform L auf V existiert genau ein $v \in V$ mit

$$(*) \quad L(h) = \langle v, h \rangle \quad \text{für alle } h \in V$$

Beweis: Man wähle eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n . Wir schreiben $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ und suchen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ so, dass (*) erfüllt ist. Insbesondere muss dies für $h = e_j$ gelten, für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, also $L(e_j) = \langle v, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \alpha_j$.

Wenn es also ein v gibt, muss notwendig $v = \sum_{i=1}^n L(e_i) e_i$ sein. Umgekehrt erfüllt dieses v die Bedingung (*), denn die Gleichung gilt ja für die Basis e_1, \dots, e_n , und beide Seiten der Gleichung sind linear in h .

Für $V = \mathbb{R}^n$ werden wir immer das Standardskalarprodukt $\langle v, h \rangle = \sum_{i=1}^n v_i h_i$ verwenden. Dann ergibt sich:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

denn

$$df|_a(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}, h \right\rangle$$

Offensichtlich ist also im reellen Fall der Gradient von f bei a gleich dem Transponierten der Jacobimatrix von f bei a .

Schreibweise: Vektoren in \mathbb{R}^n werden in Spaltenform dargestellt, Linearformen in Zeilenform.

Denn dann entspricht die Anwendung einer Linearform auf einen Vektor genau dem Matrixprodukt Zeile \cdot Spalte.

Um Platz zu sparen, schreiben wir für Vektoren manchmal zum Beispiel $(3, 1)^T$ statt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. T steht für Transposition.

Bemerkung: Warum unterscheiden wir Differential und Gradient, wo sie doch anscheinend bis auf die Schreibweise in Zeilen- bzw. Spaltenform ‚gleich‘ sind?

- ▷ Differential und Gradient haben unterschiedliche Bedeutungen: Das Differential ordnet jedem Vektor eine Zahl zu (die Richtungsableitung in Richtung des Vektors), der Gradient *ist* ein Vektor.
- ▷ Um vom Gradienten sprechen zu können, braucht man ein Skalarprodukt, für das Differential aber nicht. In diesem Sinne ist das Differential das fundamentalere Objekt.
- ▷ Das Differential hat eine Verallgemeinerung auf Abbildungen mit mehrdimensionalem Wertebereich, der Gradient nicht.
- ▷ Die scheinbare ‚Fast-Gleichheit‘ von Differential und Gradient beruht auf der Wahl von Basis und Skalarprodukt. Denn genauer betrachtet ist sie eine Gleichheit der Einträge der Jacobimatrix (der Darstellung des Differentials bzgl. der Standardbasis) und der Koeffizienten in der Darstellung $\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$. Ist $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine positiv definite symmetrische Matrix, so definiert

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i w_j, \quad v = \sum_i v_i e_i, \quad w = \sum_i w_i e_i$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n (und jedes Skalarprodukt entsteht auf diese Art). Der Gradient bezüglich dieses Skalarprodukts ist $\sum_i a_i e_i$ mit $a_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$, wobei $(g^{ij})_{i,j}$ die Inverse der Matrix $(g_{ij})_{i,j}$ ist (Übung mittels Definition 2.2.1). Dies zeigt explizit die Abhängigkeit des Gradienten vom Skalarprodukt. Dagegen hängt das Differential nicht vom Skalarprodukt ab. Seine Koeffizienten sind also weiterhin $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, nicht die a_i .

Allgemeine Skalarprodukte oder Basen benötigt man zum Beispiel beim Studium gekrümmter Flächen im Raum oder gekrümmter Räume – mathematisch spricht man von Mannigfaltigkeiten. In der Physik sind sie in der Relativitätstheorie fundamental.

In diesem Buch verwenden wir für \mathbb{R}^n immer die Standardbasis und das Standard-Skalarprodukt.

- ▷ Das Differential mag zunächst abstrakter und der Gradient konkreter erscheinen, aber auf Dauer (insbesondere im Kontext von Mannigfaltigkeiten) lässt sich mit Differentialen leichter rechnen (gerade weil sie kein Skalarprodukt benötigen).

Was ist die geometrische Bedeutung des Gradienten? Jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ ist bestimmt durch:

- ▷ seine Länge $\|v\|$
- ▷ seine Richtung; diese kann mit $\frac{v}{\|v\|}$ identifiziert werden, d. h. dem Einheitsvektor, der parallel und gleichgerichtet zu v ist.

2.2.2 Satz (Geometrische Bedeutung des Gradienten)

$$(a) \quad \|\nabla f(a)\| = \max \{ \partial_h f(a) : h \in V, \|h\| = 1 \}$$

(b) Falls $\nabla f(a) \neq 0$, so wird das Maximum in (a) für genau einen Wert von h angenommen, und zwar für

$$h = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

In Worten (falls $\nabla f(a) \neq 0$):

$\nabla f(a)$ hat die Richtung des schnellsten Anwachsens von $f(x)$, wenn sich x von a mit Absolutgeschwindigkeit 1 entfernt.

$\|\nabla f(a)\|$ ist die Änderungsrate von f in dieser Richtung.

Wenn Sie also auf dem Graphen von f wandern gehen und so schnell wie möglich zum Gipfel kommen wollen, sollten Sie immer in Richtung des Gradienten gehen!

Beweis: Nach Definition und Satz 2.1.3 ist

$$\partial_h f(a) = df|_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \text{für alle } h \in V.$$

Nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt

$$\langle \nabla f(a), h \rangle \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\nabla f(a)$ und h parallel und gleichgerichtet sind. Für $\|h\| = 1$ ergibt sich die Behauptung. \square

Beispiel: Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, am Punkt $a = (1, 0)$ also $\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Von $(1, 0)$ ausgehend wächst also f am schnellsten in x -Richtung, und dies mit Änderungsrate 2.

2.2.1 Gradient und Niveaumengen

Der Gradient hat eine weitere wichtige geometrische Eigenschaft.

Sei wiederum $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset V$ offen, V mit Skalarprodukt, $a \in U$, f in a differenzierbar. Zur Erinnerung: Für $c \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(c) = \{x \in U : f(x) = c\}$. Diese Menge, **Niveaumenge** genannt, erhält man, wenn man den Graphen von f auf Höhe c mit einer zur x -Ebene parallelen Ebene schneidet.

2.2.3 Satz (Gradient und Niveaumengen)

Sei $c = f(a)$. Dann steht $\nabla f(a)$ senkrecht auf der Niveaumenge $f^{-1}(c)$.

Das heißt: Sei $\gamma : I \rightarrow U$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $0 \in I$) eine differenzierbare Kurve mit:

$$(1) \quad \gamma(0) = a$$

$$(2) \quad \gamma(t) \in f^{-1}(c) \quad \text{für alle } t \in I$$

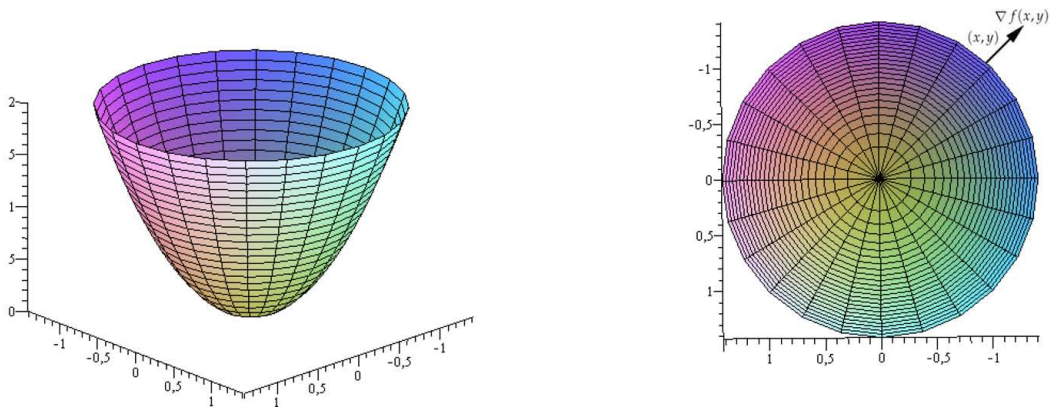
Dann gilt:

$$\nabla f(a) \perp \gamma'(0)$$

Warum ist das so umständlich mit Kurven formuliert? Gegenfrage: Wie würden Sie präzisieren, was es für einen Vektor bedeutet, senkrecht auf einer Menge zu stehen? (Siehe auch Definition 4.2.1, wo dieselbe Idee verwendet wird, um den Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit – in unserem Fall $f^{-1}(c)$ – zu definieren.)

Beweis: Nach Definition des Gradienten ist $\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = df|_a(\gamma'(0))$.

Mit der Kettenregel folgt $df|_a(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = 0$, weil $f(\gamma(t)) = c$ für alle t ist, also konstant. \square



Der Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$

... und ihre Niveaumengen.

Abbildung 2.1

Beispiele: (1) Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, also $\nabla f(a) = 2a$ für alle $a \in \mathbb{R}^2$. Die Niveaumengen durch $a \neq (0, 0)$ sind Kreise um den Nullpunkt. Der Satz drückt also die Tatsache aus, dass der Radiusvektor (also a und damit auch $2a$) eines Kreises immer senkrecht auf der entsprechenden Tangente steht.

(2) Aufgabe: Finde eine Formel für einen Normalenvektor zu $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^2\}$ in einem beliebigen Punkt $(x, y) \in K$.

Lösung: Es ist $K = f^{-1}(0)$, wobei $f(x, y) = x^2 - y^3$.

Dann ist $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T = (2x, -3y^2)^T$.

Bei Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ ist dies ein Normalenvektor zu der Kurve K . Bei $(x, y) = (0, 0)$ hat K eine Spitze, es ist gar nicht klar, was geometrisch eigentlich »Normalenvektor« bedeuten soll. Hier ergibt sich $\nabla f(0, 0) = 0$.

(Die wahre Bedeutung hiervon erfahren wir später: Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass Spitzen nur bei Punkten auftreten können, wo der Gradient verschwindet.)

2.3 Höhere Ableitungen

Bei der Einführung höherer Ableitungen für Funktionen mehrerer Variablen gehen wir umgekehrt vor wie bei der Einführung der ersten Ableitung: Wir fangen mit der konkreten Sichtweise an (partielle Ableitungen) und überlegen dann, was für ein algebraisches Objekt (analog zu der Linearform $df|_a$) dadurch repräsentiert wird.

2.3.1 Höhere partielle Ableitungen, Satz von Schwarz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Falls $\partial_i f(a)$ in jedem $a \in U$ existiert, erhält man eine Funktion $\partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die man vielleicht wieder ableiten kann, etwa in der j -Richtung; das ergibt $\partial_j(\partial_i f)$. Hiermit kann man fortfahren, falls die Ableitungen jeweils existieren.

2.3.1 Definition

Für $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ sei die p -te partielle Ableitung in Richtungen x_{i_1}, \dots, x_{i_p} definiert durch

$$\partial_{i_p} \cdots \partial_{i_1} f := (\partial_{i_p} \cdots (\partial_{i_2} (\partial_{i_1} f)) \cdots)$$

falls f auf U in Richtung x_{i_1} differenzierbar ist, $\partial_{i_1} f$ auf U in Richtung x_{i_2} differenzierbar ist etc.

Andere Schreibweisen (etwa für $p = 2$):

$$\partial_j \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}$$

Die Umkehrung der Reihenfolge im letzten Ausdruck ergibt sich aus $(f_{x_i})_{x_j}$. Wir werden jedoch gleich sehen, dass die Reihenfolge unter milden Bedingungen an f egal ist. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel: Sei $f(x, y) = x \sin y$. Dann ist $\partial_x f = \sin y$, $\partial_y \partial_x f = \cos y$ und $\partial_y f = x \cdot \cos y$, $\partial_x \partial_y f = \cos y$, insbesondere $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$.

Dass dies kein Zufall ist, sagt der **Satz von Schwarz**:

2.3.2 Satz (Vertauschen partieller Ableitungen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Angenommen $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_i \partial_j f$, $\partial_j \partial_i f$ existieren in einer Umgebung von a , und $\partial_i \partial_j f$, $\partial_j \partial_i f$ sind stetig in a . Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$

Beweis: Sei o. B. d. A. $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$, $a = (0, 0)$. Wir schreiben die Variablen als x, y . Wir gehen wie folgt vor: Wir machen uns zunächst eine diskrete Version der Behauptung klar. Dann reduzieren wir die Behauptung durch mehrmalige Anwendung des Mittelwertsatzes auf diese diskrete Version.

Nach Annahme gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_x \partial_y f$ und $\partial_y \partial_x f$ auf $\{(h, k) : |h| < \varepsilon, |k| < \varepsilon\} \subset U$ existieren und $\partial_x \partial_y f$, $\partial_y \partial_x f$ in $(0, 0)$ stetig sind. Im Folgenden sei immer $|h| < \varepsilon$.

(1) (Diskrete Version des Satzes) Betrachte das Quadrat mit den Eckpunkten $A = (0, 0)$, $B = (h, 0)$, $C = (0, h)$, $D = (h, h)$, siehe Abbildung ?? . Offenbar gilt

$$(*) \quad [f(D) - f(B)] - [f(C) - f(A)] = [f(D) - f(C)] - [f(B) - f(A)]$$

Das heißt:

„Die horizontale Differenz der vertikalen Differenzen ist gleich der vertikalen Differenz der horizontalen Differenzen.“

Ersetzt man ‚Differenz‘ durch ‚Differentialquotient‘, so sieht man, dass dies eine diskrete Version der Behauptung $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ ist.

(2) Wir wollen nun die linke Seite von (*) mit den Ableitungen von f in Verbindung bringen.

Erster Versuch: Die vertikale Differenz $f(D) - f(B) = f(h, h) - f(h, 0)$ lässt sich als $h \partial_y f(h, \eta)$ schreiben für ein η zwischen 0 und h (Mittelwertsatz angewendet auf die Funktion $g(y) = f(h, y)$).

Analog ist $f(C) - f(A) = f(0, h) - f(0, 0) = h \partial_y f(0, \eta')$ für ein η' zwischen 0 und h . Die linke Seite von (*) ist also

$$h (\partial_y f(h, \eta') - \partial_y f(0, \eta))$$

Wäre hier $\eta = \eta'$, so könnten wir abermals den Mittelwertsatz bzgl. der x -Variablen anwenden. Aber es gibt keinen Grund, warum $\eta = \eta'$ sein sollte. Ein kleiner Trick hilft hier aber weiter:

Betrachte die Funktion $a(x) = f(x, h) - f(x, 0)$ (vertikale Differenz an der Stelle x). Dann gilt

$$\text{linke Seite von } (*) = a(h) - a(0) = ha'(\xi) = h(\partial_x f(\xi, h) - \partial_x f(\xi, 0))$$

für ein ξ zwischen 0 und h . Nun können wir den Mittelwertsatz auf die Funktion $b(y) = \partial_x f(\xi, y)$ anwenden und erhalten

$$\text{linke Seite von } (*) = h^2 \partial_y \partial_x f(\xi, \eta)$$

für ein η zwischen 0 und h .

(3) Die analoge Überlegung für die rechte Seite liefert

$$\text{rechte Seite von } (*) = h^2 \partial_x \partial_y f(\xi', \eta')$$

für gewisse ξ', η' zwischen 0 und h .

(4) Aus der Gleichheit $(*)$ folgt also nach Teilen durch h^2

$$\partial_y \partial_x f(\xi, \eta) = \partial_x \partial_y f(\xi', \eta')$$

für gewisse ξ, η, ξ', η' , alle zwischen 0 und h . Lässt man nun h gegen Null gehen, so müssen ξ, η, ξ', η' alle gegen Null gehen, und aus der Stetigkeit folgt $\partial_y \partial_x f(0, 0) = \partial_x \partial_y f(0, 0)$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung: Mit einer geschickten Variation dieser Argumente kann man zeigen, dass man die Voraussetzung im Satz etwas abschwächen kann: Falls $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_i \partial_j f$ existieren und $\partial_i \partial_j f$ in a stetig ist, dann existiert $\partial_j \partial_i f(a)$ und ist gleich $\partial_i \partial_j f(a)$.

Folgende Notation ist hilfreich.

2.3.3 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Der Raum der **k -mal stetig differenzierbaren Funktionen** ist definiert als

$$C^k(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : \text{Alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis zur Ordnung } k \text{ existieren auf } U \text{ und sind stetig}\}$$

Natürlich könnte man auch Funktionen betrachten, für die zum Beispiel die zweiten Ableitungen existieren, aber nicht notwendig stetig sind, doch so etwas kommt selten vor.

Aus dem Satz von Schwarz folgt sofort mittels Induktion:

2.3.4 Korollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^k(U)$. Dann kann die Reihenfolge aller höchstens k -ten partiellen Ableitungen beliebig vertauscht werden: Für jedes $l \leq k$, jede Permutation π von $\{1, \dots, l\}$ und alle $i_1 \dots i_l$ gilt

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f = \partial_{i_{\pi(1)}} \dots \partial_{i_{\pi(l)}} f$$

2.3.2 Höhere Ableitungen als Multilinearformen

Für eine C^k Funktion von n Variablen gibt es eine unübersichtliche Vielfalt an k -ten partiellen Ableitungen:

1. Ableitung: n Zahlen: $\partial_i f(a)$ für $i = 1, \dots, n$
2. Ableitung: n^2 Zahlen: $\partial_j \partial_i f(a)$ für $i, j = 1, \dots, n$
- \vdots
- k -te Ableitung: n^k Zahlen: $\partial_{i_1} f, \dots, \partial_{i_k} f(a)$ für $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$

Dabei sind nach dem Satz von Schwarz viele dieser Zahlen gleich, z. B. bestimmen schon die $\frac{n(n+1)}{2}$ Zahlen $\partial_i \partial_j f(a)$ mit $i \leq j$ alle möglichen zweiten Ableitungen bei a .

Wie organisiert man diesen Wust an Information? Eine Möglichkeit:

Für $k = 1$ als Zeile der Länge n : $(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$.

Für $k = 2$ als $n \times n$ Matrix $(\partial_i \partial_j f(a))_{i,j=1,\dots,n}$.

Für $k \geq 3$ als k -dimensionalen Zahlenwürfel der Kantenlänge n .

2.3.5 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$, $a \in U$. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \dots & \partial_1 \partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(a) & \dots & \partial_n \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f im Punkt a .

Wir werden sehen, dass die Hesse-Matrix bei der Extremwertbestimmung eine wesentliche Rolle spielt.

Für $k \geq 3$ lassen sich sämtliche k -ten partiellen Ableitungen nicht mehr so einfach auf dem Papier anordnen. Hier ist es nützlich, sich folgende Frage zu stellen:

Welches algebraische Objekt bilden die k -ten partiellen Ableitungen, analog zum Differential für $k = 1$, das eine Linearform ist?

Um dies zu beantworten, wollen wir nun die anderen Sichtweisen der ersten Ableitung auf höhere Ableitungen übertragen. Wir tun dies gleich auf einem abstrakten Vektorraum, dies fördert die konzeptuelle Klarheit.

Wir verwenden im Folgenden obere Indizes zur Aufzählung mehrerer Vektoren.

2.3.6 Definition

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $k \in \mathbb{N}$.

(a) Die **iterierte Richtungsableitung** von f in den Richtungen $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in V$ ist

$$\partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}} f := (\partial_{h^{(k)}} \dots (\partial_{h^{(2)}} (\partial_{h^{(1)}} f)) \dots)$$

falls $\partial_{h^{(1)}} f$ auf U existiert, $\partial_{h^{(2)}} (\partial_{h^{(1)}} f)$ existiert usw.

(b) $C^k(U)$ ist die Menge aller $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, für die die iterierten Richtungsableitungen für alle $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in V$ existieren und auf U stetig sind.

(c) Für $f \in C^k(U)$ und $a \in U$ definieren wir das **Differential k -ter Ordnung** von f im Punkt a als die Abbildung

$$d^k f_a : V^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^k f_a(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) := \partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}} f(a)$$

Hierbei ist $V^k = V \times \dots \times V$ das k -fache Produkt. Wir werden gleich sehen, dass es auf die Reihenfolge der $h^{(i)}$ nicht ankommt.

Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ wird in Definition 2.3.6 an Funktionen $f \in C^k(U)$ eine stärkere Bedingung gestellt als in Definition 2.3.3. Dass beide Bedingungen dennoch äquivalent sind, zeigt folgendes Lemma.

2.3.7 Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Falls auf U alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k existieren und stetig sind, so existieren auch alle iterierten Richtungsableitungen und sind stetig, und es gilt für alle $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}} f = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f) h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)},$$

wobei $h^{(l)} = (h_1^{(l)}, \dots, h_n^{(l)})^T$ für $l = 1, \dots, k$.

Beweis: Sei zunächst $k = 1$. Nach Satz 2.1.6 ist f auf U differenzierbar, und nach Korollar 2.1.5 gilt daher

$$\partial_{h^{(1)}} f = \sum_{i_1=1}^n (\partial_{i_1} f) \cdot h_{i_1}^{(1)}. \text{ Dies ist eine Linearkombination stetiger Funktionen, also stetig.}$$

Für $k = 2$ kann man das bereits Gezeigte auf $\partial_{i_1} f$ anwenden und erhält Existenz und Formel für

$$\partial_{h^{(2)}} (\partial_{i_1} f) = \sum_{i_2=1}^n (\partial_{i_2} \partial_{i_1} f) \cdot h_{i_2}^{(2)} \text{ und daraus, da die } h_i^{(1)} \text{ Konstanten sind:}$$

$$\partial_{h^{(2)}} (\partial_{h^{(1)}} f) = \sum_{i_1=1}^n \partial_{h^{(2)}} (\partial_{i_1} f) h_{i_1}^{(1)} = \sum_{i_1, i_2=1}^n (\partial_{i_2} \partial_{i_1} f) \cdot h_{i_1}^{(1)} h_{i_2}^{(2)}$$

und dies ist wiederum stetig. Offenbar lässt sich nun genauso weiter für $k = 3$ usw. argumentieren. Der formale Induktionsbeweis sei Ihnen als Übung überlassen. \square

Die algebraischen Eigenschaften von $d^k f|_a$ werden durch folgenden Begriff erfasst.

2.3.8 Definition (Multilinearformen)

Sei V ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **k -Multilinearform** auf V , falls α bezüglich jedem seiner Argumente linear ist. Das heißt:

Für jedes $i = 1, \dots, k$ und für alle $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}, w^{(i)} \in V$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(\dots, v^{(i)}, \dots) + \alpha(\dots, w^{(i)}, \dots) &= \alpha(\dots, v^{(i)} + w^{(i)}, \dots) \\ \alpha(\dots, c v^{(i)}, \dots) &= c \alpha(\dots, v^{(i)}, \dots) \end{aligned}$$

wobei die vorderen Punkte immer für $v^{(1)}, \dots, v^{(i-1)}$ und die hinteren für $v^{(i+1)}, \dots, v^{(k)}$ stehen.

α heißt **symmetrisch**, falls für alle Permutationen π von $\{1, \dots, k\}$ gilt:

$$\alpha(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = \alpha(v^{(\pi(1))}, \dots, v^{(\pi(k))})$$

2-Multilinearformen heißen auch **Bilinearformen**.

Bemerkung (multilinear \neq linear): Eine 1-Multilinearform auf V ist offenbar dasselbe wie eine Linearform auf V . Für $k \geq 2$ sind aber k -Multilinearformen nicht mit linearen Abbildungen $V^k \rightarrow \mathbb{R}$ zu verwechseln! Zum Beispiel ist das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 , $(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2$, eine Bilinearform auf \mathbb{R}^2 . Da aber Komponenten von v mit Komponenten von w multipliziert werden, ist es nicht linear bzgl. des Gesamtvektors (v_1, v_2, w_1, w_2) , also nicht linear auf $(\mathbb{R}^2)^2$. Verdoppelt man etwa diesen Vektor, so vervierfacht sich (v, w) .

Wie sehen k -Multilinearformen konkret aus?

2.3.9 Lemma

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und e_1, \dots, e_n eine Basis von V .

- (a) Sei α eine k -Multilinearform auf dem Vektorraum V . Für beliebige $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ definiere die **Koeffizienten** von α bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n durch

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} := \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Seien $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in V$ beliebige Vektoren und $v^{(l)} = \sum_{i=1}^n v_i^{(l)} e_i$, $l = 1, \dots, k$, ihre Darstellungen bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n . Dann ist

$$(*) \quad \alpha(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} v_{i_1}^{(1)} \dots v_{i_k}^{(k)}$$

- (b) Gibt man umgekehrt beliebige Zahlen $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ vor, so bestimmen diese mittels (*) eine k -Multilinearform α , und deren Koeffizienten sind die $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$.
- (c) α ist symmetrisch genau dann, wenn für alle Permutationen π von $\{1, \dots, k\}$ und alle i_1, \dots, i_k gilt:

$$\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(k)}}$$

Beweis: Für (a) setzt man die Basis-Darstellung ein und »multipliziert aus«, d. h. verwendet die Linearität, erst für das erste Argument, dann für das zweite etc. (b) folgt daraus, dass die rechte Seite von (*) linear in jedem der $v^{(i)}$ ist. (c): Aus der Symmetrie von α folgt offenbar die Symmetrie der $\alpha_{i_1 \dots i_k}$. Umgekehrt impliziert diese die Symmetrie von α wegen der Formel für $\alpha(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$. □

Für $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis und für Bilinearformen ($k = 2$) erhalten wir:

$$\alpha(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} v_i w_j = v^T A w$$

für $v, w \in \mathbb{R}^n$, wobei $\alpha_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$. Hierbei ist A die $n \times n$ -Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ und v, w sind als Spaltenvektoren zu verstehen, mit v^T dem entsprechenden (transponierten) Zeilenvektor.

Im Kontext des Differentials sind die Koeffizienten gerade die höheren partiellen Ableitungen:

2.3.10 Satz (Das Differential k -ter Ordnung als Multilinearform)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ offen und $f \in C^k(U)$. Sei $a \in U$.

Das Differential k -ter Ordnung von f im Punkt a ist eine symmetrische k -Multilinearform auf V . Bezüglich einer Basis e_1, \dots, e_n von V gilt

$$d^k f|_a(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(a) h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)},$$

wobei $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f := \partial_{e_{i_1}} \dots \partial_{e_{i_k}} f$ die partiellen Ableitungen von f bezüglich der Basis sind.

Beweis: Per Definition ist

$$d^k f|_a(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \partial_{h^{(k)}} \dots \partial_{h^{(1)}} f(a),$$

und dies ist nach Lemma 2.3.7 durch die Formel gegeben und daher multilinear. Aus dem Korollar zum Satz von Schwarz folgt, dass $d^k f|_a$ symmetrisch ist. □

Für $V = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ erhalten wir folgenden Zusammenhang der Hessematrix mit dem Differential zweiter Ordnung: Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d^2 f|_a(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i w_j = v^T H_f(a) w.$$

Bemerkung: Um höhere Differenzierbarkeit Im Fall $\dim V = \infty$ zu untersuchen, ist es nützlich, einen etwas anderen Blickwinkel einzunehmen. Wir kommen darauf am Ende von Abschnitt 3.1 zurück.

2.4 Der Satz von Taylor; Extremwertbestimmung

2.4.1 Der Satz von Taylor

Aus Analysis I kennen wir die Taylorformel für Funktionen einer Variablen: Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^{k+1}(U)$. Seien $a \in U$, $h \in \mathbb{R}$. Falls auch $a + h$ in U liegt, so gilt

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{k+1},$$

wobei $R_{k+1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$ für ein ξ zwischen a und $a + h$.

Wie könnte eine n -dimensionale Taylorformel aussehen? Sei also $U \subset V$ (stellen Sie sich immer $V = \mathbb{R}^n$ vor, wenn Sie wollen) offen, $f \in C^{k+1}(U)$, $a \in U$. Wie kann man $f(a + h)$ mittels des Wertes von f und seiner Ableitungen bei a approximieren?

Mit folgendem hübschen Trick lässt sich dies leicht beantworten: Setze $\varphi(t) := f(a + th)$ für $t \in [0, 1]$. Dann ist $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(a + h)$. Es könnte also hilfreich sein, die Taylorformel für φ beim Punkt $t = 1$, bezüglich des Punktes $t = 0$, zu verwenden:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0) + \frac{1^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{1^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + R_{k+1}$$

mit $R_{k+1} = \frac{1^{k+1}}{(k+1)!} \varphi^{(k+1)}(\tau)$ für ein $0 < \tau < 1$.

Die Ableitungen von φ lassen sich mittels f ausdrücken: Nach Kettenregel und Definition der Richtungsableitung folgt mit $\frac{d}{dt}(a + th) = h$ sukzessive

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(a + th) \\ \varphi'(t) &= df|_{a+th}(h) = \partial_h f(a + th), \text{ und analog} \\ \varphi''(t) &= \partial_h(\partial_h f)(a + th) \\ &\vdots \\ \text{allgemein: } \varphi^{(l)}(t) &= \underbrace{\partial_h \partial_h \dots \partial_h}_{l\text{-mal}} f(a + th). \end{aligned}$$

Mit Definition 2.3.6 erhalten wir:

2.4.1 Satz (Satz von Taylor)

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ offen. Sei $f \in C^{k+1}(U)$ und $a \in U$. Angenommen, die Strecke $\{a + th : t \in [0, 1]\}$ liegt in U . Dann gilt

$$f(a + h) = f(a) + df|_a(h) + \frac{1}{2!} d^2 f|_a(h, h) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f|_a(h, h, \dots, h) + R_{k+1}$$

mit $R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f|_{a+\tau h}(h, \dots, h)$ für ein $\tau \in (0, 1)$.

Man nennt $T_k(h) = f(a) + df|_a(h) + \frac{1}{2!}d^2f|_a(h,h) + \dots + \frac{1}{k!}d^k f|_a(h,h,\dots,h)$ das **k -te Taylorpolynom** von f im Punkt a .

Dies ist wirklich ein Polynom bezüglich der Variablen h (nicht bezüglich a). Zur Definition von Polynomen in n Variablen siehe 1.3.5. Zum Beispiel ist für $k = 2$:

$$T_2(h) = f(a) + \sum_{i=1}^n b_i h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} h_i h_j, \quad b_i = \partial_i f(a), \quad c_{ij} = \partial_i \partial_j f(a).$$

Beispiel: Für $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ und $a = (0,0)$ ist $T_2(h) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2}(h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2)$.

Die Bedeutung des Taylorpolynoms liegt wie beim eindimensionalen Fall in folgendem:

- ▷ Approximative Bestimmung des Funktionswertes $f(a+h)$ mittels des Wertes von f und seiner Ableitungen bei a , für kleine h .
- ▷ Untersuchung qualitativer Eigenschaften von f nahe einem Punkt a :
 - Untersuche die Eigenschaft zunächst für T_k .
 - Zeige, dass der Restterm R_{k+1} für die untersuchte Eigenschaft irrelevant ist.

Der Wert von k hängt dabei von der untersuchten Eigenschaft ab, zum Beispiel $k = 2$ für Extremwerte (s. unten) und Konvexität (s. Übung ??).

Für $f \in C^\infty(U)$ stellt sich wie in einer Dimension die Frage, ob die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} d^k f|_a(h, \dots, h)$ gegen $f(a+h)$ konvergiert, und dies lässt sich mit Restgliedabschätzungen untersuchen. Das soll hier aber nicht vertieft werden.

2.4.2 Extremwertbestimmung

Aus der Analysis I wissen wir, dass bei einem lokalen Minimum a einer Funktion f im Innern ihres Definitionsbereichs $f'(a) = 0$, $f''(a) \geq 0$ ist. Gilt die etwas stärkere Bedingung $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$, so kann man umgekehrt die Existenz eines relativen Minimums folgern. Dies wollen wir nun verallgemeinern.

Im \mathbb{R}^n ist die zweite Ableitung eine Bilinearform. Was bedeutet Positivität für diese?

2.4.2 Definition

Sei V ein Vektorraum und $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

B heißt **positiv definit** $\Leftrightarrow B(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$, $v \in V$.

B heißt **positiv semi-definit** $\Leftrightarrow B(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

Analog heißt B **negativ (semi-)definit**, falls $-B$ positiv (semi-)definit ist, oder gleichbedeutend, dass $B(v,v) < 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $v \neq 0$ ist. B heißt **indefinit**, falls B weder positiv noch negativ semi-definit ist, oder äquivalent, falls es ein v mit $B(v,v) > 0$ und ein w mit $B(w,w) < 0$ gibt.

Es sei kurz an die Beziehung der Begriffe

symmetrische Bilinearform \leftrightarrow symmetrische Matrix \leftrightarrow quadratische Form

erinnert (für $\dim V < \infty$): Eine (symmetrische) Bilinearform B lässt sich bezüglich einer Basis durch eine (symmetrische) Matrix A darstellen (siehe Lemma 2.3.9). Eine **quadratische Form** ist eine Funktion $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, die sich als $q(v) = B(v,v)$ mit einer symmetrischen Bilinearform B schreiben lässt. B ist dann eindeutig durch q bestimmt (Übung).

Offenbar ist B genau dann positiv (semi-)definit, wenn dies für A gilt, d.h. wenn $v^T A v > 0$ (bzw. ≥ 0) für alle $v \neq 0$ gilt, und dies ist äquivalent zu $q(v) > 0$ (bzw. ≥ 0) für alle $v \neq 0$.

Beispiel: Den symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entsprechen die Bilinearformen

$$B_1(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2$$

$$B_2(v, w) = v_1w_1 - v_2w_2$$

$$B_3(v, w) = -v_1w_1 - v_2w_2$$

und die quadratischen Formen

$$q_1(v) = v_1^2 + v_2^2$$

$$q_2(v) = v_1^2 - v_2^2$$

$$q_3(v) = -v_1^2 - v_2^2$$

A_1 (bzw. B_1, q_1) ist positiv definit, A_2 ist indefinit, A_3 ist negativ definit.

q_1 hat in 0 ein Minimum, q_2 einen Sattelpunkt (kein lokales Extremum), q_3 ein Maximum.

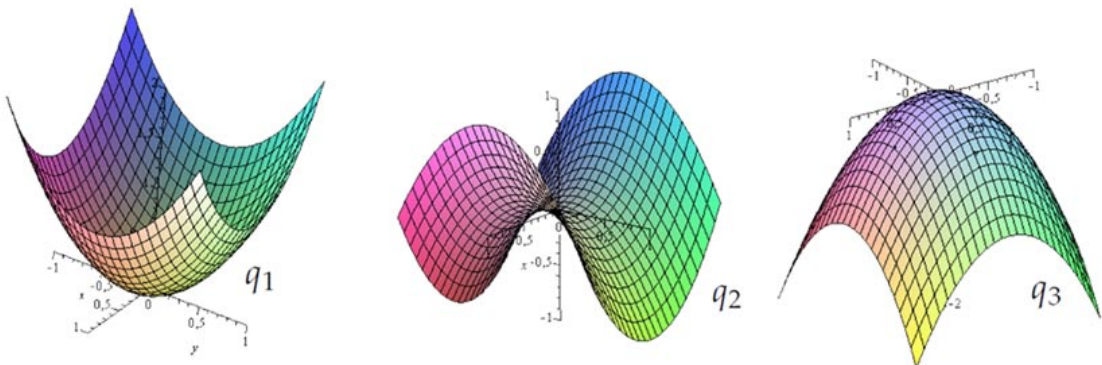


Abbildung 2.2

Das hat Methode:

2.4.3 Satz

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ offen und $f \in C^2(U)$. Sei $a \in U$. Dann gilt:

- (1) Falls f in $a \in U$ ein lokales Extremum hat, so ist $df|_a = 0$.
- (2) Falls f in $a \in U$ ein lokales Minimum hat, so ist $d^2f|_a$ positiv semi-definit.
- (3) Falls $df|_a = 0$ und $d^2f|_a$ positiv definit ist, so ist a ein lokales Minimum.

Analoge Aussagen gelten für lokale Maxima, wenn man ›positiv‹ durch ›negativ‹ ersetzt.

Falls $df|_a = 0$ und $d^2f|_a$ indefinit ist, hat f in a kein lokales Extremum. Man nennt a dann einen **Sattelpunkt**.

Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ bedeutet (1), dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ für alle i , und bei (2), (3) überprüft man die (semi-)Definitheit der Hessematrix $H_f(a)$.

In Teil (3) des Satzes liegt sogar ein striktes lokales Minimum vor: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) > f(a)$ für alle $x \in K_\varepsilon(a)$. Dies wird der Beweis zeigen.

Wie sieht man einer symmetrischen Matrix an, ob sie positiv (semi-)definit, negativ (semi-)definit oder indefinit ist? Das folgende Lemma, das wir auch im Beweis von Satz 2.4.3 verwenden werden, liefert ein vor allem für theoretische Zwecke nützliches Kriterium.

2.4.4 Lemma

Sei A symmetrische $n \times n$ -Matrix. Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von A (mit Multiplizität aufgeschrieben). Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda_1 \|v\|^2 \leq v^T A v \leq \lambda_n \|v\|^2$$

wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm ist. Die linke (bzw. rechte) Ungleichung wird genau dann zur Gleichheit, wenn v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 (bzw. λ_n) ist.

Beweis: Wir verwenden die aus der linearen Algebra bekannte Tatsache, dass es eine Orthonormalbasis $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ aus Eigenvektoren von A gibt. Sei λ_i der Eigenwert zu $v^{(i)}$. Ist $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so ist $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^{(i)}$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$Av = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v^{(i)} \quad (v^{(i)} \text{ Eigenvektoren})$$

$$\|v\|^2 = v^T v = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \quad (v^{(i)} \text{ orthonormal - Pythagoras})$$

$$v^T A v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \quad (\text{verwende erste Gleichung und Orthonormalität})$$

Aus den letzten beiden Gleichungen und $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ für alle i folgt $\lambda_1 \|v\|^2 \leq v^T A v \leq \lambda_n \|v\|^2$. In der ersten Ungleichung gilt Gleichheit genau dann, wenn $\alpha_i = 0$ für alle i mit $\lambda_i > \lambda_1$, also v ein Eigenvektor zu λ_1 ist. Analog für die zweite Ungleichung. \square

Aus dem Lemma folgt unmittelbar:

2.4.5 Satz

Sind A und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie in Lemma 2.4.4, so gilt:

- (a) A positiv definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind positiv.
- (b) A positiv semi-definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind ≥ 0 .
- (c) A negativ definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind negativ.
- (d) A negativ semi-definit \Leftrightarrow Alle Eigenwerte sind ≤ 0 .
- (e) A indefinit \Leftrightarrow Es gibt mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert.

Beispiel: Der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ entspricht die Bilinearform $B(v, w) = v_1 w_2 + v_2 w_1$ und die quadratische Form $q(v) = 2v_1 v_2$. B ist indefinit. Zum Beispiel ist $q(1, 1) > 0$, $q_4(1, -1) < 0$.

Die Indefinitheit folgt auch daraus, dass die Eigenwerte von A gleich 1 und -1 sind, oder auch daraus, dass $q(v) = \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2$ mit $\tilde{v}_1 = (v_1 + v_2)/\sqrt{2}$, $\tilde{v}_2 = (v_1 - v_2)/\sqrt{2}$. Mittels des Koordinatenwechsels $v \mapsto \tilde{v}$ ist also q äquivalent zum Beispiel q_2 oben. Dies ist eine Rotation. Man erhält also den Graphen von q , indem man den Graphen von q_2 um 45 Grad dreht.

Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix kann sehr kompliziert sein. Der folgende Satz liefert ein Kriterium, das praktischer ist. Zunächst eine Definition: Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine $n \times n$ -Matrix. Die **Hauptminoren** von A sind die Zahlen

$$A_k = \det(a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}, \quad k = 1, \dots, n$$

also die Determinanten der oberen linken quadratischen Teilmatrizen.

2.4.6 Satz (Hurwitz-Kriterium)

Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

A ist positiv definit \iff Alle Hauptminoren von A sind positiv.

Beweis: Siehe Bücher über Lineare Algebra. □

Für $n = 2$ sagt der Satz:

A positiv definit \iff Der Eintrag in der linken oberen Ecke ist positiv und $\det A$ ist positiv.

Bemerkungen:

(1) **Vorsicht:** Das Hurwitz-Kriterium gilt *nicht* analog für semi-definite Matrizen.

(2) Wie lautet das Hurwitz-Kriterium für negativ definite Matrizen?

Vorsicht: FALSCH wäre, dass alle Hauptminoren negativ sein müssten.

Richtig: A negativ definit $\iff A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$

Denn A negativ definit $\iff -A$ positiv definit, und der k -te Hauptminor von $-A$ ist gleich $(-1)^k$ mal dem k -ten Hauptminor von A , da bei der Determinante k Zeilen mit -1 multipliziert werden!

Beweis (von Satz 2.4.3): Zu (1) und (2): Sei $h \in V$ und $\varphi(t) = f(a + th)$. Falls f bei a ein lokales Minimum hat, so hat φ bei $t = 0$ ein lokales Minimum. Somit ist $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) \geq 0$. Wie beim Beweis des Satzes von Taylor gilt $\varphi'(0) = df|_a(h)$ und $\varphi''(0) = d^2f|_a(h, h)$. Also ist $df|_a(h) = 0$ und $d^2f|_a(h, h) \geq 0$ für alle $h \in V$.

Zu (3): Wir führen den Beweis unter der stärkeren Annahme, dass $f \in C^3(U)$ ist. Siehe Übung ???. Wir nehmen $V = \mathbb{R}^n$ an, auf diesen Fall kann mittels Wahl einer Basis reduziert werden.

Es ist zu zeigen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass aus $\|h\| < \varepsilon$ folgt, dass $f(a + h) \geq f(a)$ ist. Nach dem Satz von Taylor mit $k = 2$ ist $f(a + h) \geq f(a)$ wegen $df|_a = 0$ äquivalent zu

$$\frac{1}{2}d^2f|_a(h, h) + R_3(h) \geq 0.$$

Wie zeigt man dies? Nach Annahme ist der d^2f Term positiv für $h \neq 0$, wir müssen also zeigen, dass der Restterm nicht allzu negativ sein kann. Warum sollte das stimmen? Beachten Sie, dass $\frac{1}{2}d^2f|_a(h, h)$ quadratisch in h ist, aber $R_3(h)$ für $h \rightarrow 0$ kubisch verschwindet. Für kleine h dominiert ein definitiver quadratischer Term einen kubischen! Wir werden also zeigen:

(a) Es gibt ein $c > 0$, so dass $\frac{1}{2}d^2f|_a(h, h) \geq c\|h\|^2$ für alle h .

(b) Es gibt ein $C > 0$, so dass $|R_3(h)| \leq C\|h\|^3$ für alle h mit $\|h\| \leq \varepsilon$. Hierbei sei ε so gewählt, dass $\bar{K}_\varepsilon(a) \subset U$.

Beweis von (a): Sei A die Matrix von $d^2f|_a$, und sei λ_1 der kleinste Eigenwert von A . Nach Lemma 2.4.4 ist $\lambda_1 > 0$ und $d^2f|_a(h, h) \geq \lambda_1\|h\|^2$. Setze $c = \lambda_1/2$.

Beweis von (b): Es ist $R_3(h) = \frac{1}{3!}d^3f|_{a+\tau h}(h, h, h)$ für ein $\tau \in (0, 1)$. Betrachte die Funktion

$$F(b, \omega) = \frac{1}{6}d^3f|_b(\omega, \omega, \omega) \quad \text{für } b \in \bar{K}_\varepsilon(a), \omega \in S^{n-1} := \{\omega : \|\omega\| = 1\}.$$

Da $\overline{K_\varepsilon}(a) \times S^{n-1}$ kompakt ist, hat $|F|$ auf dieser Menge ein Maximum C . Aus $R_3(h) = \frac{1}{3!} d^3 f|_{a+\tau h}(h, h, h) = \|h\|^3 F(a + \tau h, \omega)$ mit $\omega = \frac{h}{\|h\|}$ folgt nun die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, dass aus (a) und (b) Teil (3) des Satzes folgt: Für $0 < \|h\| < \min\{c/C, \varepsilon\}$ ist

$$\frac{1}{2} d^2 f|_a(h, h) + R_3(h) \geq c\|h\|^2 - C\|h\|^3 = C\|h\|^2 \left(\frac{c}{C} - \|h\| \right) > 0,$$

also $f(a+h) > f(a)$. Daher hat f ein striktes lokales Minimum.

Die letzte Behauptung des Satzes ergibt sich sofort aus (1) und (2): Läge ein lokales Extremum vor, so wäre $d^2 f|_a$ semi-definit, also nicht indefinit. \square

Wir fassen zusammen:

Verfahren (zur Extremwertbestimmung): Um die lokalen Extrema einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor:

- (1) Bestimme alle Punkte a mit $df|_a = 0$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ für alle i . Diese Punkte heißen **kritische Punkte** von f .
- (2) Für jeden kritischen Punkt a berechne die Hesse-Matrix $H_f(a)$. Ist sie positiv definit, hat man ein lokales Minimum, ist sie negativ definit, hat man ein lokales Maximum. Ist sie indefinit, hat man einen Sattelpunkt. Falls sie semi-definit ist, kann man ohne weiteres keine Aussage machen.

Beachten Sie, dass wir hier nur die lokalen Extrema in der offenen Menge U behandeln. Randextrema erfordern weitere Überlegungen.

Beispiele:

- (1) Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist $df(x, y) = (2x \ 2y)$ und $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $df(x, y) = 0$ gilt genau für $x = y = 0$, und $H_f(0, 0)$ ist positiv definit, also ist $(0, 0)$ ein lokales Minimum. Offenbar ist es sogar ein globales Minimum.
- (2) Sei $f(x, y) = \cos x + \cos y$. Dann ist $\partial_x f = -\sin x$, $\partial_y f = -\sin y$. Die kritischen Punkte sind also die Punkte (x, y) mit $\sin x = \sin y = 0$. Dies sind genau die Punkte $p_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$. Die Hesse-Matrix ist $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$, und bei $p_{k,l}$ ist dies gleich $\begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{l+1} \end{pmatrix}$

Wir erhalten also:

- ▷ Bei allen $p_{k,l}$ mit k, l gerade liegen lokale Maxima.
- ▷ Bei allen $p_{k,l}$ mit k, l ungerade liegen lokale Minima.
- ▷ Bei allen anderen $p_{k,l}$ liegen Sattelpunkte.

2.5 Vertauschen von Differentiation und Integration

Darf man Ableiten und Integrieren bezüglich verschiedener Variablen vertauschen? Das heißt, stimmt folgendes?

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Die Antwort, wie so oft, ist: Ja, meistens. Also unter gewissen Bedingungen an f , die in den meisten interessanten Fällen erfüllt sind. (Es gibt auch Beispiele, wo es nicht stimmt, die sparen wir uns hier aber.)

Wir betrachten hier den Fall eigentlicher Integrale stetiger Funktionen. Siehe die Bemerkung am Ende des Abschnitts für eine Erweiterung.

2.5.1 Satz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ stetig.

(1) Die Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

ist stetig.

(2) Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, $\partial_{x_j} f$ existiert und ist stetig in $U \times [a, b]$. Dann ist F nach x_j partiell differenzierbar, und es gilt

$$\partial_{x_j} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \partial_{x_j} f(x, t) dt.$$

Im Beweis brauchen wir folgende Aussage:

2.5.2 Lemma

Sei $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in U$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon \text{ f\"ur alle } t \in [a, b].$$

Beachten Sie: F\"ur jedes feste t gibt es so ein δ wegen der Stetigkeit von f . Die Aussage ist, dass dasselbe δ f\"ur alle t funktioniert.

Beweis: Die Teilmenge $A = \{(x, t) : |f(x, t) - f(x_0, t)| \geq \varepsilon\} \subset U \times [a, b]$ ist abgeschlossen, die Menge $K = \{x_0\} \times [a, b]$ ist kompakt. Offenbar ist $A \cap K = \emptyset$. Nach \u00dcbung ?? ist der Abstand $\delta := \text{dist}(A, K)$ positiv. Nun ist $\text{dist}((x, t), K) = \|x - x_0\|$, und wenn dies kleiner als δ ist, so folgt $(x, t) \notin A$ und damit $|f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon$. \square

Siehe \u00dcbung ?? f\"ur einen anderen Beweis.

Beweis (von Satz 2.5.1): (1) Sei $x_0 \in U$, $\varepsilon > 0$. W\"ahle δ wie im Lemma, dann ist f\"ur $\|x - x_0\| < \delta$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(x_0, t)) dt \right| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} |f(x, t) - f(x_0, t)| \leq (b - a)\varepsilon$$

Daher ist F stetig in x_0 .

(2) Es gen\"ugt, den Beweis f\"ur $n = 1$ zu f\"uhren, der allgemeine Fall ist nur in der Notation umst\"andlicher. Sei $x_0 \in U$ und $K_r(x_0) \subset U$. F\"ur $|h| < r$ ist dann

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \int_a^b \underbrace{\frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h}}_{=\partial_x f(\xi_{h,t}, t)} dt$$

f\"ur ein $\xi_{h,t}$ zwischen x_0 und $x_0 + h$, nach dem Mittelwertsatz.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wenden das Lemma auf $\partial_x f$ an und erhalten δ , so dass $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\partial_x f(x, t) - \partial_x f(x_0, t)| < \varepsilon$ f\"ur alle t . F\"ur $|h| < \delta$ ist $|\xi_{h,t} - x_0| < \delta$, also $|\partial_x f(\xi_{h,t}, t) - \partial_x f(x_0, t)| < \varepsilon$. Damit folgt

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_a^b \partial_x f(x_0, t) dt \right| = \left| \int_a^b (\partial_x f(\xi_{h,t}, t) - \partial_x f(x_0, t)) dt \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$ existiert und gleich $\int_a^b \partial_x f(x_0, t) dt$ ist.

Beispiele: (1) Sei $f(x, t) = \cos xt$, wobei wir über $t \in [0, \pi]$ integrieren mit $x > 0$; also $n = 1, a = 0, b = \pi, U = (0, \infty)$. Wir berechnen zunächst

$$\int_0^{\pi} \cos xt \, dt = \frac{\sin xt}{x} \Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{\sin \pi x}{x}.$$

Leitet man die linke und rechte Seite ab und verwendet $\partial_x \cos xt = -t \sin xt$, folgt mit Satz 2.5.1

$$-\int_0^{\pi} t \sin xt \, dt = \frac{d}{dx} \frac{\sin \pi x}{x} = \frac{x\pi \cos \pi x - \sin \pi x}{x^2}.$$

Warum ist das interessant? Setzen wir zum Beispiel $x = 1$, dann folgt

$$\int_0^{\pi} t \sin t \, dt = -\frac{-\pi - 0}{1} = \pi.$$

Natürlich hätten wir das Integral links auch mit partieller Integration berechnen können, doch dies ist eine neue Methode.

Hätten wir mit der Aufgabe begonnen, das Integral $\int_0^{\pi} t \sin t \, dt$ zu berechnen, ließe sich unsere Methode so beschreiben:

- (a) Wir beobachten, dass man den ‚störenden‘ t -Faktor in $t \sin t$ so erhalten kann, dass man $\cos xt$ nach x ableitet und dann $x = 1$ setzt.
 - (b) Daher berechnen wir zunächst $\int_0^{\pi} \cos xt \, dt$, was einfach ist, leiten das Ergebnis nach x ab und setzen dann $x = 1$.
- (2) Manche Integrale lassen sich nicht mit unseren Standardmethoden berechnen, wohl aber mit einer Variation dieser neuen Methode! Hier ist ein Beispiel (dies ist ein uneigentliches Integral; unter geeigneten Voraussetzungen gilt der Satz auch dafür, siehe die Bemerkung am Ende des Kapitels; für den Moment rechnen wir drauf los, um zu sehen, was dies bringt).

Aufgabe: Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$.

Lösung: Eine Stammfunktion für den Integranden gibt es nicht in geschlossener Form (versuchen Sie, eine zu finden!). Wegen Symmetrie ist das gesuchte Integral gleich $2 \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$. Sei

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \, dt \quad \text{für } x \geq 0.$$

$F(x)$ kann man nicht direkt berechnen, wohl aber seine Ableitung! Für $x > 0$ ist

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (-t) e^{-tx} \, dt = - \int_0^{\infty} \sin t \cdot e^{-tx} \, dt = \dots = -\frac{1}{1+x^2}$$

mit Standard-Integrationstechniken. Das gesuchte Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = F(0)$ könnten wir wegen ($a > 0$ beliebig)

$$F(a) = F(0) + \int_0^a F'(x) \, dx = F(0) - \int_0^a \frac{1}{1+x^2} \, dx = F(0) - \arctan a$$

berechnen, wenn wir $F(a)$ für irgendein $a > 0$ kennen würden. Leider ist das nicht der Fall, das ist nicht einfacher als das ursprüngliche Problem. Was uns rettet, ist

$$F(a) \rightarrow 0 \quad \text{für } a \rightarrow \infty.$$

Damit folgt $0 = F(0) - \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a = F(0) - \frac{\pi}{2}$, also $F(0) = \frac{\pi}{2}$ und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

Für die Details siehe Übung ??.

Bemerkung: Was ist hier passiert? Wir wollten den störenden $\frac{1}{t}$ Term im Integranden $\frac{\sin t}{t}$ loswerden. Dazu könnten wir z.B. $\frac{\sin xt}{t}$ betrachten und nach x ableiten. Leider führt das nicht zum Ziel (versuchen Sie es). Stattdessen haben wir $\frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ betrachtet und nach x abgeleitet, was denselben Effekt hat und auf ein berechenbares Integral führt.

Im Unterschied zum ersten Beispiel haben wir Satz 2.5.1 rückwärts angewendet, d.h. wir haben das gesuchte Integral als Ableitung eines anderen, bekannten, geschrieben. Deshalb mussten wir danach noch einmal integrieren (nach x), wodurch der Arkustangens auftauchte.

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ hat übrigens große Bedeutung in der Optik. Man nennt es Fresnel-Integral.

- (3) Dieses Beispiel ist wieder einfacher, hat aber eine große Bedeutung. Für $x > 0$ ist $\partial_x e^{-xt} = -te^{-xt}$, also folgt mit

$$F(x) := \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = -\frac{e^{-xt}}{x} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{x}$$

durch mehrfaches Ableiten für $n \in \mathbb{N}_0$

$$F^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (-t)^n e^{-xt} dt = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

und daher bei $x = 1$:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$$

Dies bildet die Grundlage für die Definition der wichtigen Gamma-Funktion. Man hätte das Integral auch mit partieller Integration berechnen können.

Bemerkung: Beachten Sie, dass wir hier immer *bestimmte* Integrale berechnen. Weitere Methoden, um bestimmte Integrale von Funktionen zu berechnen, für die man keine Stammfunktionen finden kann, lernen Sie in der Funktionentheorie kennen.

Bemerkung: Will man Satz 2.5.1 auf uneigentliche Integrale ausweiten, muss man zusätzliche Bedingungen an f stellen. Genauer gilt für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ stetig:

- (1) Falls $|f(x, t)|$ durch über (a, b) integrierbare Funktionen majorisiert werden kann, lokal gleichmäßig in x , dann ist

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

stetig auf U .

- (2) Angenommen, $\partial_{x_j} f$ existiert und ist stetig in $U \times (a, b)$. Falls $|\partial_{x_j} f(x, t)|$ durch über (a, b) integrierbare Funktionen majorisiert werden kann, lokal gleichmäßig in x , dann ist

$$\partial_{x_j} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \partial_{x_j} f(x, t) dt.$$

Die Majorisierungsbedingung in (1) lautet im Einzelnen: Zu jedem $x_0 \in U$ existiert eine Umgebung U' und eine stetige Funktion $S : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f(x, t)| \leq S(t)$ für alle $x \in U'$, $t \in (a, b)$, und $\int_a^b S(t) dt < \infty$.

Die Bedingung in (2) lautet analog.

Dies beweist man am einfachsten mit Hilfe eines zentralen Satzes der Lebesgue'schen Integrationstheorie: Dem Satz über die majorisierte Konvergenz.

Die Majorisierungsbedingung ist in Beispiel (3) erfüllt: Zu $x_0 > 0$ setze $\varepsilon = x_0/2$ und $U' = (\varepsilon, \infty)$. Die Funktion $\partial_x e^{-xt} = -te^{-xt}$ wird für $x > \varepsilon$ durch die Funktion $S(t) = te^{-\varepsilon t}$ majorisiert, und S ist wegen $\varepsilon > 0$ über $(0, \infty)$ integrierbar.

3 Differentiation von Abbildungen

Nun beginnen wir die Diskussion des Ableitungsbegriffs im allgemeinen Fall einer Abbildung

$$f : U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^m$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$. Die Fälle $n = 1$ (Kurven) und $m = 1$ (Funktionen) kennen wir bereits.

Neben dem Finden einer vernünftigen Definition und der Anwendung des Ableitungsbegriffs auf konkrete Probleme (Auflösen von Gleichungen, Extremwertbestimmung mit Nebenbedingungen) wird es auch darum gehen, wie man sich solche Abbildungen vorstellen kann. Hier wird die schon bekannte Dualität – rechnerische und geometrische Bedeutung – wieder sehr zentral sein.

Wir werden meistens statt \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m beliebige normierte Vektorräume V, W zulassen. Wenn Sie wollen, können Sie diese in Gedanken immer durch $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ ersetzen. Wir werden aber auch Beispiele sehen, die die abstraktere Sprache rechtfertigen.

Die Sätze und Definitionen gelten in der gegebenen Formulierung für endlich-dimensionale V, W . Bei höheren Anwendungen braucht man aber auch unendlich-dimensionale V, W . Erstaunlicherweise macht das an den meisten Stellen fast keinen Unterschied. Die notwendigen kleinen Modifikationen sind als klein gedruckte Bemerkungen angegeben.

3.1 Definition, einfache Eigenschaften, Beispiele

Die Grundidee der Differentialrechnung ist die lineare Approximation. Das Differential einer Abbildung soll also die Bedeutung einer linearen Approximation haben. Das lässt sich fast wörtlich wie bei Funktionen formulieren.

3.1.1 Definition

Seien V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$ sei offen und $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow W$ heißt in a differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ gibt mit:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in V}} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

In diesem Fall schreibt man: $df|_a = L$ und nennt dies das **Differential von f bei a** .

Die Eindeutigkeit von L zeigt man wie im Fall von Funktionen. Mit

$$L(V, W) := \{\text{lineare Abbildungen } V \rightarrow W\}$$

ist also, falls f auf U differenzierbar ist,

$$df : U \rightarrow L(V, W).$$

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Der für uns wichtigste Fall ist der endlich-dimensionale, d. h. $\dim V < \infty, \dim W < \infty$. Für viele der folgenden Betrachtungen ist dies jedoch unwesentlich, allerdings muss im Fall $\dim V = \infty$ die Definition um die Forderung ergänzt werden, dass $L : V \rightarrow W$ stetig ist (dies ist für $\dim V < \infty$ automatisch der Fall). f heißt in diesem Fall Fréchet-differenzierbar in a . $L(V, W)$ ist für beliebige normierte Vektorräume V, W definiert als die Menge der stetigen linearen Abbildungen $V \rightarrow W$.

Bevor wir die Bedeutung des Differentials einer Abbildung untersuchen, leiten wir ein paar einfache Eigenschaften her und betrachten Beispiele.

Wir betrachten zunächst den wichtigsten Fall $W = \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann durch ihre m **Komponentenfunktionen** gegeben:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \text{ für alle } x \in U,$$

wobei jedes f_i eine Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Für Kurven (Satz ??) ließ sich die Ableitung und Differenzierbarkeit mittels der Komponenten beschreiben. Das geht auch für Abbildungen:

3.1.2 Satz

Sei V normierter Vektorraum, $U \subset V$ offen und $a \in U$. Die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ habe die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ differenzierbar in } a \iff f_1, \dots, f_m \text{ differenzierbar in } a,$$

und in diesem Fall lässt sich für $h \in V$ der Vektor $df|_a(h) \in \mathbb{R}^m$ komponentenweise berechnen:

$$df|_a(h) = \begin{pmatrix} df_{1|a}(h) \\ df_{2|a}(h) \\ \vdots \\ df_{m|a}(h) \end{pmatrix}$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$, so ist $df|_a$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ durch die **Jacobi-Matrix**

$$J_f(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wichtig: Um sich bei der Berechnung der Jacobi-Matrix nicht zu vertun, sollte man die Komponenten von f übereinander schreiben!

Beweis: Lineare Abbildungen $L : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind mittels $L(h) = \begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ L_m(h) \end{pmatrix}$ durch m -Tupel von Linearformen

$L_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann hat $\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|}$ die Komponenten $\frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{\|h\|}$, $i = 1, \dots, m$, und wegen Lemma 1.2.4 gilt

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in V}} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0 \iff \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in V}} \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - L_i(h)}{\|h\|} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Die Formel für die Jacobi-Matrix folgt dann aus Korollar 2.1.5. \square

Bemerkung (Differential von Kurven): Im Spezialfall $n = 1$ ist f eine Kurve, und wir schreiben meist γ

statt f . Die Jacobi-Matrix ist dann $\begin{pmatrix} \gamma'_1(a) \\ \vdots \\ \gamma'_m(a) \end{pmatrix}$, also der Ableitungsvektor $\gamma'(a)$, vgl. Satz ??.

Aus der ersten Aussage von Satz 3.1.2 folgt mit Hilfe von Satz 2.1.6:

3.1.3 Korollar (Hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Falls die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in einer Umgebung von a existieren und stetig in a sind, so ist f in a differenzierbar.

Beispiele:

(1) $n = m = 2, f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y \end{pmatrix}; J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$

(2) f affin linear, d. h. $f(x) = A(x) + b$ für eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ und $b \in W$. Dann ist

$$df|_a = A \quad \text{für alle } a \in V.$$

Denn
$$f(x+h) - f(x) - A(h) = \underbrace{(A(x+h) + b)}_{A(x)+A(h)} - (A(x) + b) - A(h) = 0$$

für alle $h \in V$. Für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ und $f(x) = Ax + b$ mit einer $m \times n$ -Matrix A und $b \in \mathbb{R}^m$ ist also die Jacobi-Matrix von f konstant gleich A .

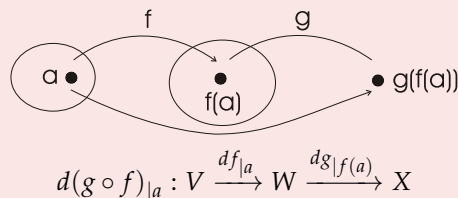
Die wichtige Kettenregel aus Analysis I hat eine hübsche Verallgemeinerung:

3.1.4 Satz (Kettenregel)

V, W, X seien normierte Vektorräume, $U \subset V$ und $U' \subset W$ offen. Seien $f : U \rightarrow W, g : U' \rightarrow X$ Abbildungen, mit $f(U) \subset U'$, so dass $g \circ f : U \rightarrow X$ definiert ist. Sei $a \in U$. Dann gilt:

Falls f in a differenzierbar und g in $f(a)$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar, und

$$d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$$



Kurz:

Das Differential der Komposition ist die Komposition der Differentiale!

Da Komposition linearer Abbildungen dem Matrixprodukt der darstellenden Matrizen entspricht, folgt daraus für $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m, X = \mathbb{R}^k$:

Die Jacobi-Matrix der Komposition ist das Matrix-Produkt der einzelnen Jacobi-Matrizen.

Im Fall $V = W = X = \mathbb{R}$ erhält man die altbekannte Kettenregel aus Analysis I,

$$(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Wichtig: In höheren Dimensionen muss man auf der rechten Seite auf die Reihenfolge der Faktoren achten.

Intuition für die Kettenregel: Man kann die Kettenregel gut verstehen, wenn man sich erinnert, dass das Differential von f annähernd die Änderung von $f(x)$ bei Änderung von x beschreibt.

Das ist am übersichtlichsten im Fall $a = 0, b = f(0) = 0, g(0) = 0$. Schreibe $L = df|_a, M = dg|_b$. Dann ist

$$f(h) \approx L(h), \quad g(k) \approx M(k)$$

für h, k nahe Null. Damit folgt $g(f(h)) \approx M(f(h)) \approx M(L(h))$ für h nahe Null, also ist das Differential von $g \circ f$ gleich $M \circ L$, wie behauptet.

Für den Beweis müssen wir nur die Fehler in diesen Approximationen genauer ansehen. Dafür ist folgendes Konzept nützlich, das auch später noch benötigt wird.

3.1.5 Definition

V, W seien normierte Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$. Für eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ sei die **Abbildungsnorm** (oder **Operatornorm**) definiert durch

$$\|A\|_{L(V,W)} := \sup_{h \in V, h \neq 0} \frac{\|A(h)\|_W}{\|h\|_V}$$

Falls $\dim V < \infty$, so ist $\|A\|_{L(V,W)} < \infty$, und $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ definiert eine Norm auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen $L(V, W)$ (Beweis als Übung). Direkt aus der Definition folgt

$$\|A(h)\|_W \leq C \|h\|_V \quad \text{für alle } h \in V, \quad \text{mit } C = \|A\|_{L(V,W)}.$$

Wesentlich ist hier, dass C nicht von h abhängt.

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Für unendlich-dimensionales V gibt es lineare Abbildungen $A : V \rightarrow W$ mit $\sup_{h \in V, h \neq 0} \frac{\|A(h)\|_W}{\|h\|_V} = \infty$. (Beispiel: $V =$ stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f(x) = 0$ für $|x| > N$ }, mit der Supremumsnorm, und $(Af)(x) = xf(x)$.)

Man kann aber leicht zeigen, dass eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ genau dann stetig ist, wenn $\sup_{h \in V, h \neq 0} \frac{\|A(h)\|_W}{\|h\|_V} < \infty$. Damit wird wiederum $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ zu einer Norm auf $L(V, W)$, dem Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $V \rightarrow W$. Dies wird genauer in der Funktionalanalysis behandelt.

Nach der Formulierung des Spezialfalls der Kettenregel, Satz 2.1.9, wurde eine heuristische Begründung angegeben, warum sie gilt. Diese gilt auch hier und führt zu folgendem Beweis.

Beweis (der Kettenregel): Sei $b = f(a)$. Schreibe $L = df|_a, M = dg|_b$. Nach Definition ist

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + r(h), \quad r(h) = o(\|h\|) \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

$$g(b+k) - g(b) = M(k) + s(k), \quad s(k) = o(\|k\|) \quad \text{für } k \rightarrow 0.$$

Hierbei ist $h \in V, k \in W$, und wir schreiben abkürzend $\|h\| := \|h\|_V, \|k\| := \|k\|_W$. Wir verwenden das mit $k = f(a+h) - f(a)$. Dann ist $b+k = f(a+h)$, also

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) &= g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(b+k) - g(b) \\ &= M(k) + s(k) = M(L(h) + r(h)) + s(k) \\ &= (M \circ L)(h) + r_2(h), \end{aligned}$$

wobei $r_2(h) = M(r(h)) + s(L(h) + r(h))$. Es bleibt zu zeigen, dass $r_2(h) = o(\|h\|)$ für $\|h\| \rightarrow 0$.

Sei $C = \|M\|_{L(W,X)}$. Für den ersten Summanden von $r_2(h)$ ist dann $\|M(r(h))\| \leq C \|r(h)\|$, und aus $r(h) = o(\|h\|)$ folgt $M(r(h)) = o(\|h\|)$.

Ähnlich verfährt man mit dem zweiten Summanden von $r_2(h)$: Zunächst ist $\|L(h)\| \leq C' \|h\|$, $C' := \|L\|_{L(V,W)}$. Wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\|r(h)\| \leq \|h\|$ für $\|h\|_V < \varepsilon$ gilt. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann $\|L(h) + r(h)\| \leq C'' \|h\|$ mit $C'' = C' + 1$, und daraus schließlich mit $s(k) = o(\|k\|)$, dass $s(L(h) + r(h)) = o(\|h\|)$ ist. \square

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen bleibt dieser Beweis korrekt, da auch dann per Definition das Differential stetig ist, also endliche Abbildungsnorm hat. Dies ist ein guter Grund, warum diese Annahme in der Definition gemacht wurde.

3.1.1 Geometrische Bedeutung des Differentials von Abbildungen

Die Jacobi-Matrix einer Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist der Vektor $\gamma'(t)$. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $\gamma(I) \subset U$, so können wir die **Bildkurve** $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ betrachten. Die Matrizenform der Kettenregel sagt dann $\tilde{\gamma}'(t_0) = J_f(a) \cdot \gamma'(t_0)$, falls γ in t_0 und f in $a = \gamma(t_0)$ differenzierbar sind. Für die lineare Abbildung $df|_a$ bedeutet das

$$\tilde{\gamma} = f \circ \gamma \implies \tilde{\gamma}'(t_0) = df|_a(\gamma'(t_0)), \quad a = \gamma(t_0)$$

Bemerkung: Dies gilt auch, wenn man $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ durch normierte Vektorräume V, W (die auch unendlich-dimensional sein dürfen) ersetzt. Dann ist per Definition (vgl. Definition ??)

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \in V$$

Daraus folgt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) - h\gamma'(t_0)}{h} = 0$, also

$$d\gamma|_{t_0}(h) = h\gamma'(t_0), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Dies ist ein Spezialfall des folgenden Zusammenhangs: Lineare Abbildungen $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow V$ lassen sich mit Vektoren $v \in V$ identifizieren (formal: es gibt einen natürlichen Isomorphismus $L(\mathbb{R}, V) \rightarrow V$), wie folgt:

Gegeben $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow V$, setze $v = \alpha(1)$. Gegeben $v \in V$, setze $\alpha(h) = hv$.

Die allgemeine Kettenregel gibt dann

$$h\tilde{\gamma}'(t_0) = d\tilde{\gamma}|_{t_0}(h) = df|_a(d\gamma|_{t_0}(h)) = df|_a(h\gamma'(t_0)) = hdf|_a(\gamma'(t_0))$$

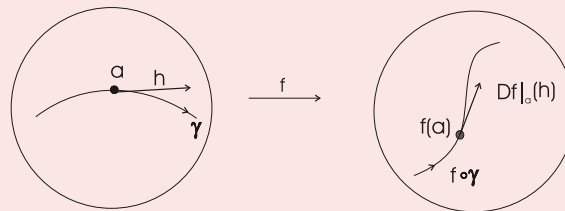
und die oben genannte Formel folgt nach Dividieren durch h .

Im Spezialfall $m = 1$, also $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, folgt daraus Satz 2.1.9, und im Allgemeinen erhalten wir folgende geometrische Interpretation des Differentials:

3.1.6 Satz (Geometrische Bedeutung des Differentials)

$f : U \xrightarrow{\subset V} W$ sei in $a \in U$ differenzierbar. Sei $h \in V$. Dann gilt:

Wenn sich x von a mit der Momentangeschwindigkeit h entfernt, dann entfernt sich $f(x)$ von $f(a)$ mit der Momentangeschwindigkeit $df|_a(h)$.



Das heißt: Sei $\gamma : I \rightarrow U$ eine Kurve derart, dass

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma'(0) = h.$$

(Hierbei sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$.)

Dann gilt für die Bildkurve $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$

$$\tilde{\gamma}(0) = f(a), \quad \tilde{\gamma}'(0) = df|_a(h)$$

Der Spezialfall $\gamma(t) = a + th$ ergibt die Formel, analog zur Richtungsableitung bei Funktionen:

$$df|_a(h) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a + th) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Diese folgt auch direkt aus der Definition des Differentials wie im Beweis von Satz 2.1.3.

Diese Formel ist manchmal sehr nützlich zur Berechnung des Differentials.

Beispiel: $V = W = M_n(\mathbb{R})$, $f(B) = B^2$. Die Abbildung f ist differenzierbar, da die Einträge von B^2 Polynome in den Einträgen von B sind. Was ist das Differential von f bei $B \in V$?

Für $H \in V$ ist $(B + tH)^2 = (B + tH)(B + tH) = B^2 + tBH + tHB + t^2H^2$, also

$$\begin{aligned} df|_B(H) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(B + tH) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (B + tH)^2 \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (B^2 + t(BH + HB) + t^2H^2) \\ &= (0 + (BH + HB) + 2tH^2)\Big|_{t=0} = BH + HB, \end{aligned}$$

also

$$df|_B(H) = BH + HB$$

Beachten Sie, dass H, B Matrizen sind, dass dies also nicht notwendig gleich $2BH$ ist!

In diesem Beispiel wäre es nicht sinnvoll, das Differential mittels der Jacobi-Matrix (also der partiellen Ableitungen) anzugeben. Probieren Sie es! Die Rechnung wäre sehr unübersichtlich und gäbe keine Einsicht. Das oben gewonnene Ergebnis werden wir später verwenden, um Wurzeln aus Matrizen zu ziehen.

Vorstellungen für Abbildungen

Der mathematische Begriff der Abbildung ist eine Abstraktion, die viele verschiedene Vorstellungen in sich vereint. Je nach Kontext kann eine Abbildung sehr verschiedene Bedeutung haben. Hier sind einige, die uns schon begegnet sind, und einige weitere. Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

▷ $m = 1$ (Funktionen):

- Höhenfunktion ($n = 2$, $f(x) =$ Höhe über NN am Ort x).
- Temperatur, Luftdruck ($n = 3$, $f(x) =$ Temperatur bzw. Luftdruck am Ort x).
- Helligkeitsverteilung eines Bildes ($n = 2$).
- Bevölkerungsdichte ($n = 2$; dies als Funktion zu betrachten ist eine starke Idealisierung).

Bedeutung der Ableitung: $\nabla f(x) =$ Richtung des stärksten Anstiegs bei x (am Berg, der Temperatur etc.), $\|\nabla f(x)\| =$ Steilheit des Anstiegs.

▷ $n = 3$, $m = 2$:

Abbildungen im umgangssprachlichen Sinn, z. B. Photo: $f(x) =$ Ort auf dem Photo, wo der reale Ort x abgebildet wird.

Bedeutung der Ableitung: Ein kleiner Pfeil h , der am Ort x angebracht ist, erscheint auf dem Photo als der Pfeil $df|_x(h)$, am Ort $f(x)$ angebracht.

Bei einem Film statt einem Photo bewegt sich das Bild eines Objektes mit Geschwindigkeit $df|_x(h)$, wenn sich das reale Objekt am Ort x mit Geschwindigkeit h bewegt.

▷ $n = m$:

- Vektorfeld: Kraftfeld, z. B. Gravitation, elektrische, magnetische Kraft ($f(x) =$ Kraft, die auf einen punktförmigen Körper, der sich am Ort x befindet, einwirkt).
- Vektorfeld: stationäre Strömung ($f(x) =$ Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens, das sich am Ort x befindet).

Bedeutung der Ableitung: Linearisierung des Vektorfelds (Wichtig für Differentialgleichungen: Falls $V(p) = 0$, so gleicht das – explizit berechenbare – Phasenportrait des linearen Vektorfelds $dV|_p$ nahe 0 dem Phasenportrait von V nahe p , unter schwachen Bedingungen an V).

- Verzerrung durch eine Linse ($n = m = 2$): fotografiere ein ebenes Bild durch eine Verzerrungslinse; $f(x) = \text{Ort auf dem Photo, wo der reale Ort } x \text{ abgebildet wird.}$
- Koordinatenwechsel, zum Beispiel Polarkoordinaten, siehe unten.

Visualisierungen für Abbildungen

Je nach Anwendung und je nach Dimension sind verschiedene Visualisierungen möglich.

- ▷ Graph (nur $n + m \leq 3$, da der Graph im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ liegt). Man erhält:
 - $n = m = 1$: Kurve in der Ebene.
 - $n = 2, m = 1$: Fläche im Raum.
 - $n = 1, m = 2$: Kurve im Raum (diese Darstellung ist aber unüblich).

Bedeutung der Ableitung: Steigung der Tangente bzw. Tangentialebene.

- ▷ Bildmenge ($n = 1, m = 2$ oder 3): Kurven im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 visualisiert man meist, indem man ihre Bildmenge zeichnet, evtl. mit Pfeilen für Durchlaufrichtung versehen und mit einzelnen markierten Punkten.

Bedeutung der Ableitung: Tangentialvektor an die Kurve.

- ▷ Niveaumengenportrait ($n = 2$ oder 3), d. h. Skizze der Niveaumengen $f^{-1}(c)$ für verschiedene Werte von c . Typische Niveaumengen sind:
 - $n = 2, m = 1$: Kurven in der Ebene (Beispiel: Höhenlinien auf Wanderkarten).
 - $n = 3, m = 1$: Flächen im Raum (etwa wie Zwiebelschalen).
 - $n = 3, m = 2$: Kurven im Raum.

(Vereinzelte Niveaumengen können auch kleinere Dimension haben, z.B. ein Punkt statt einer Kurve bei einem Maximum. Dies wird im Kapitel über den Satz über implizite Funktionen genauer untersucht.)

Bedeutung der Ableitung ($m = 1$): $\nabla f(x)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge von f , die durch x geht. $\|\nabla f(x)\|$ groß entspricht dicht beieinanderliegenden Niveaumengen (falls die c -Werte äquidistant gewählt sind, z. B. eine Höhenlinie für je 100 Meter Höhendifferenz).

- ▷ Vektorfeld: zeichne Pfeil an »jedem« Punkt, $n = m \leq 3$.
- ▷ Beispielphoto ($n = 3, m = 2$).

Dies sind statische Visualisierungen. Sie lassen sich in einem Bild zeichnen. Es gibt auch dynamische Visualisierungen, wo man sich eine Bewegung vorstellt (z. B. mittels Computer praktisch umsetzbar). Zum Beispiel stelle ich mir die Scherung $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ am liebsten dynamisch vor. Natürlich ließe sich das statisch durch Zeichnen eines Rechtecks und seines Bildes (eines Parallelogramms) verwirklichen.

Kurz und praktisch: Für konkrete Rechnungen ist es manchmal nützlich, die Kettenregel in folgender Form zu schreiben: Wir nennen die Variablen $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^k$. Wir schreiben $y = y(x)$ und $z = z(y)$ für die Funktionen f bzw. g . Dann ist

$$\frac{\partial(z \circ y)_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$$

wobei man am Schluss noch y durch $y(x)$ ersetzen muss. Kurz: Man ‚erweitert‘ mit y_j und summiert über j .

In der Literatur der angewandten Mathematik oder Physik ist es üblich, links $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$ zu schreiben, d.h. ‚man fasst z als Funktion von x auf‘. Dabei muss man sich aber bewusst sein, dass immer die Verkettung $z \circ \gamma$ gemeint ist.

Dies ist zum Beispiel beim Rechnen in Polarkoordinaten nützlich.

3.1.2 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten ordnen jedem Punkt $p \neq 0$ der Ebene die Zahlen

$r =$ Abstand von p zum Ursprung, $\varphi =$ Winkel der Strecke $\overline{0p}$ zur positiven x -Achse

zu. Sie sind oft beim Rechnen nützlich.

Mathematisch ist es meist günstiger, die umgekehrte Abbildung

$$P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

zu betrachten, die jedem Abstand r und Winkel φ den entsprechenden Punkt (x, y) zuordnet. Man nennt P die **Polarkoordinatenabbildung**.

Bemerkung: Warum ist P ‚besser‘ als die umgekehrte Abbildung $Q : (x, y) \mapsto (r, \varphi)$? Hier sind zwei eng verwandte Gründe:

- (1) Wegen $P(r, \varphi) = P(r, \varphi + 2\pi)$ für alle (r, φ) ist P nicht injektiv. Um eine Umkehrabbildung zu definieren, muss man daher zunächst den Definitionsbereich von P auf ein halboffenes φ -Intervall der Länge 2π einschränken, zum Beispiel auf $\varphi \in [0, 2\pi)$. Nun existiert die Umkehrung zwar, aber sie ist nicht stetig, denn bei der x -Achse springt der Winkel von 2π auf 0 .

Dagegen ist P unendlich oft differenzierbar.

- (2) Die Formel für Q ist kompliziert: Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $Q(x, y) = (r(x, y), \varphi(x, y))$ mit

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{falls } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Da ist doch P sehr viel handlicher! (Dies ist die Umkehrung von P eingeschränkt auf $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$.) Eine Lösung des ersten Problems ist, als Definitionsbereich von P die Quotientengruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ zu nehmen. Dann ist $P : (0, \infty) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bijektiv und differenzierbar, und die Umkehrung ist ebenfalls differenzierbar. Der Begriff ‚differenzierbar‘ ist hier sinnvoll, da er sich nur auf kleine Umgebungen von Punkten bezieht, und lokal sieht $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ wie \mathbb{R} aus.

Hier ein Bild (Q sollte links durch φ ersetzt werden, und links sollten die vertikalen Linien punktiert sein).

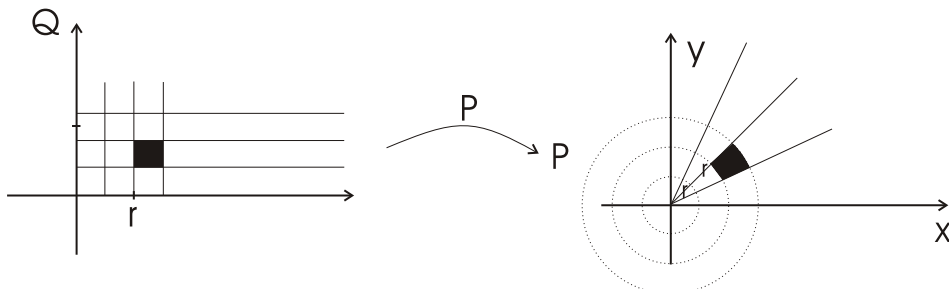


Abbildung 3.1

Die Jacobi-Matrix von P ist

$$dP|_{(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Differentials von P können wir die ‚Standard-Basisvektoren für Polarkoordinaten‘, e_r und e_φ , definieren: Seien e_1, e_2 die Standard-Basisvektoren im \mathbb{R}^2 . Für $p \in \mathbb{R}^2$ mit Polarkoordinaten (r, φ) , also $P(r, \varphi) = p$ setze

$$e_r(p) := dP|_{(r,\varphi)}(e_1), \quad e_\varphi(p) := dP|_{(r,\varphi)}(e_2).$$

Beachten Sie, dass e_r, e_φ im Unterschied zu e_1, e_2 vom Punkt, an dem sie angebracht sind, abhängen (mit anderen Worten, es sind nicht konstante Vektorfelder). Meist lässt man aber das Argument p in der Notation weg und verwendet x, y und r, φ auch vermischt, wenn das die Formeln vereinfacht. Zum Beispiel berechnen wir mit Hilfe der Jacobi-Matrix

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Siehe Abbildung ?? . $e_r(p)$ erhält man also aus p als Normalisierung $\frac{p}{\|p\|}$ und e_φ durch 90° Drehung.

Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so nennt man $\tilde{f} = f \circ P$ auch **f in Polarkoordinaten**. Die Definition bedeutet

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(x, y), \quad \text{falls } P(r, \varphi) = (x, y).$$

Für $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist zum Beispiel $\tilde{f}(r, \varphi) = r^2$, für $f(x, y) = x + y$ ist $\tilde{f}(r, \varphi) = r(\cos \varphi + \sin \varphi)$. Vorsicht: In der angewandten Mathematik und Physik schreibt man oft f statt \tilde{f} .

Die Kettenregel ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

wobei alles an entsprechenden Punkten auszuwerten ist. Das hätte man auch als

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = df(e_r), \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} = df(e_\varphi)$$

schreiben können, was wiederum direkt aus der Kettenregel in der Form von Satz 3.1.4 folgt, z.B. $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = d\tilde{f}(e_1) = df(dP(e_1)) = df(e_r)$.

Wir wollen noch den Gradienten von f mithilfe der partiellen Ableitungen von \tilde{f} ausdrücken. Dazu lösen wir zunächst nach $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ auf: Multipliziert man die Gleichung für $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ mit $\frac{x}{r}$ und subtrahiert $\frac{y}{r^2}$ mal die Gleichung für $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$, folgt mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$$

Ähnlich kann man nach $\frac{\partial f}{\partial y}$ auflösen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}.$$

Mit $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ erhalten wir die Formel für den **Gradienten in Polarkoordinaten**

$$\nabla f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} e_\varphi$$

Beachten Sie, dass der Koeffizient von e_φ nicht $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$ ist, wie man zunächst naiv erwarten könnte.

Dies lässt sich systematisch am besten im Kontext Riemannscher Mannigfaltigkeiten verstehen. Der wesentliche Punkt ist, dass (e_r, e_φ) keine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 ist, wohingegen $(e_r, \frac{1}{r} e_\varphi)$ eine ist.

Das Differential kann man ebenfalls in Polarkoordinaten schreiben: Aus $\tilde{f} = f \circ P$ folgt $f = \tilde{f} \circ Q$ (für eine beliebige Inverse Q von P) und daraus $df = d\tilde{f} \circ dQ$. Die Abbildung Q hat die Komponentenfunktionen r, φ , also ist nach Satz 3.1.2 $dQ(h) = \begin{pmatrix} dr(h) \\ d\varphi(h) \end{pmatrix}$ für $h \in \mathbb{R}^2$. Mit $d\tilde{f} = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi})$ folgt

$$df = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} dr + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} d\varphi$$

Diese Formel ist viel einfacher als die für den Gradienten! Sie hat keinen störenden $\frac{1}{r^2}$ Faktor. Ähnlich verhält es sich auch mit anderen Koordinatenwechseln: Das Differential ist wesentlich einfacher in neue Koordinaten umzurechnen als der Gradient. Im Wesentlichen kommt das daher, dass das Differential kanonisch, ohne Bezug auf ein Skalarprodukt, definiert ist.

3.1.3 Höhere Ableitungen

3.1.7 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **k -mal stetig differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k aller Komponentenfunktionen f_j auf U existieren und stetig sind. Der Raum dieser Abbildungen wird mit $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet.

Die k -te Ableitung wird dann zu einer symmetrischen k -multilinearen Abbildung

$$d^k f|_a : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \in U.$$

3.1.8 Lemma

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen aller f_j ist äquivalent zur Stetigkeit der Abbildung

$$df : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

wobei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit der Abbildungsnorm versehen ist.

Beweis als Übung.

Dies lässt sich leicht auf beliebige normierte Vektorräume und höhere Ableitungen verallgemeinern: Sind V, W normierte Räume, so wird $L(V, W)$ mit der Abbildungsnorm zu einem normierten Raum. Damit können wir auch die Abbildungsnorm auf $L(V, L(V, W))$ betrachten, analog auf $L(V, L(V, L(V, W)))$ usw. Das erlaubt uns, Stetigkeit der Ableitung und höhere Ableitungen systematisch wie folgt anzugehen. Wir betrachten hier nur zweite Ableitungen, höhere gehen ähnlich.

3.1.9 Definition

Seien V, W normierte Vektorräume, $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow W$.

- (1) f heißt **stetig differenzierbar** auf U , falls f in jedem $x \in U$ differenzierbar ist und die Abbildung

$$df : U \rightarrow L(V, W), \quad x \mapsto df|_x$$

stetig ist.

- (2) f heißt **zweimal stetig differenzierbar**, falls $df : U \rightarrow L(V, W)$ in jedem $x \in U$ differenzierbar ist und die Abbildung

$$d^2f : U \rightarrow L(V, L(V, W)), \quad x \mapsto d(df)|_x$$

stetig ist.

Dabei wird auf $L(V, W)$ und auf $L(V, L(V, W))$ die Abbildungsnorm verwendet.

Zunächst wollen wir das ein wenig vereinfachen. Was ist $L(V, L(V, W))$? Ein Element $\alpha \in L(V, L(V, W))$ ordnet jedem $v_1 \in V$ ein $\alpha(v_1) \in L(V, W)$ zu, also kann man $\alpha(v_1)$ auf ein $v_2 \in V$ anwenden und erhält $\alpha(v_1)(v_2) \in W$. Es gilt:

3.1.10 Lemma

Sei $\alpha \in L(V, L(V, W))$ und setze

$$\tilde{\alpha}(v_1, v_2) = \alpha(v_1)(v_2) \text{ für } v_1, v_2 \in V$$

Dann ist $\tilde{\alpha} : V \times V \rightarrow W$ bilinear. Die Abbildung $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ definiert einen Isomorphismus

$$L(V, L(V, W)) \rightarrow \{\text{bilineare Abbildungen } V \times V \rightarrow W\}.$$

Beweis: Zunächst bedeutet $\alpha \in L(V, L(V, W))$, dass die Zuordnung $V \rightarrow L(V, W)$, $v_1 \mapsto \alpha(v_1)$ linear ist. Also gilt für alle $v_1, v'_1 \in V$

$$\alpha(v_1 + v'_1) = \alpha(v_1) + \alpha(v'_1)$$

als Identität von Elementen von $L(V, W)$, was wiederum bedeutet, dass für alle $v_2 \in V$ gilt, dass

$$\alpha(v_1 + v'_1)(v_2) = \alpha(v_1)(v_2) + \alpha(v'_1)(v_2).$$

Analog folgt $\alpha(cv_1)(v_2) = c\alpha(v_1)(v_2)$ für $c \in \mathbb{R}$. Also ist $\tilde{\alpha}$ im ersten Argument linear. Da $\alpha(v_1) : V \rightarrow W$ linear ist für jedes v_1 , folgt auch die Linearität von $\tilde{\alpha}$ im zweiten Argument.

Damit ist gezeigt, dass $\tilde{\alpha}$ bilinear ist. Weiterhin ist die Abbildung $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ offenbar linear. Sie ist injektiv, da $\tilde{\alpha} = 0$ bedeutet, dass $\tilde{\alpha}(v_1, v_2) = 0$ für alle v_1, v_2 , und damit $\alpha = 0$ impliziert. Schließlich ist sie surjektiv, da man für bilineares $\tilde{\alpha} : V \times V \rightarrow W$ umgekehrt α durch $\alpha(v_1)(v_2) = \tilde{\alpha}(v_1, v_2)$ für $v_1, v_2 \in V$ definieren kann, und dieselben Rechnungen wie eben zeigen $\alpha \in L(V, L(V, W))$. \square

Es ist nun nicht schwierig, zu zeigen, dass die beiden Begriffe von höheren Ableitungen für $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ zusammenfallen (Übung).

Im Fall $\dim V = \infty$ sagt man, f ist zweimal Fréchet-differenzierbar, falls $df : V \rightarrow L(V, W)$ Fréchet-differenzierbar ist, und analog für höhere Ableitungen. Der Satz von Schwarz gilt wiederum analog. Für Details siehe zum Beispiel <http://www.iadm.uni-stuttgart.de/LstAnaMPhy/Weidl/ana2-14/skript/skript-ana2se29.html>.

3.2 Der Satz über die Umkehrabbildung

Wir erinnern uns an folgenden Satz der Analysis I: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \implies f : I \rightarrow f(I) \text{ invertierbar, und } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ für } y = f(x),$$

insbesondere ist f^{-1} stetig differenzierbar.¹

Frage: Gilt etwas Ähnliches in mehreren Dimensionen?

Antwort: Fast. In höheren Dimensionen kann man nicht mehr die volle Invertierbarkeit folgern, nur noch die lokale Invertierbarkeit. Der Beweis ist eine hübsche Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.

Zunächst brauchen wir einen Namen für die angestrebte Schlussfolgerung:

3.2.1 Definition

Seien V, W normierte Vektorräume und $U \subset V, \tilde{U} \subset W$ offen.

$f : U \rightarrow \tilde{U}$ heißt **(C^1 -)Diffeomorphismus** : \iff

- (1) $f \in C^1$,
- (2) f bijektiv,
- (3) $f^{-1} \in C^1$.

Das Differential eines Diffeomorphismus muss invertierbar sein:

3.2.2 Satz

$f : U \rightarrow \tilde{U}$ Diffeomorphismus mit $U \subset V, \tilde{U} \subset W$ offen, dann

- (1) $\dim V = \dim W$,
- (2) $df|_a$ invertierbar für alle $a \in U$, und $(df|_a)^{-1} = d(f^{-1})|_{f(a)}$.

Die Formel in (2) verallgemeinert die Regel über die Umkehrfunktion, Satz 12.2.3 in Analysis I.

Beweis: Die Identitätsabbildung $\text{Id}_U : U \rightarrow U, x \mapsto x$ hat für jedes $a \in U$ das Differential $d\text{Id}_U|_a = \text{Id}_V$, und analog für $\text{Id}_{\tilde{U}}$. Aus der Kettenregel folgt daher

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f = \text{Id}_U &\implies d(f^{-1})|_{f(a)} \circ df|_a = d\text{Id}_U|_a = \text{Id}_V \\ f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\tilde{U}} &\implies df|_a \circ d(f^{-1})|_{f(a)} = \text{Id}_W \end{aligned}$$

Daraus folgt (2). Damit ist $df|_a$ ein Vektorraumisomorphismus, also folgt (1). \square

Etwas profaner: (1) folgt, da nur quadratische Matrizen invertierbar sein können.

Beispiel: Das Differential der Polarkoordinatenabbildung $P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ (siehe Abschnitt 3.1.2) ist

$$dP|_{(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}$$

und die Einträge treten als Koeffizienten bei der Darstellung von $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ und $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$ mittels $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ auf, für $\tilde{f} = f \circ P$. Aus (Fußpunkte der Übersichtlichkeit halber weggelassen)

$$d(P^{-1}) = (dP)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

folgt dann die bereits vorher ‚zu Fuß‘ hergeleitete Darstellung von $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ mittels $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$.

¹Dies folgt aus Satz 11.3.8 in Analysis I über die Invertierbarkeit stetiger, streng monotoner Funktionen. Die strenge Monotonie von f folgt aus $f'(x) \neq 0$ für alle x , da nach dem Zwischenwertsatz f' auf I konstantes Vorzeichen haben muss. Ein Detail: Der Satz gilt auch, wenn f nur als differenzierbar vorausgesetzt wird. Denn der ‚Zwischenwertsatz für die Ableitung‘ gilt auch dann schon. (Beweis als Übung)

Bemerkung: Warum haben wir in Definition 3.2.1 nicht gleich $\dim V = \dim W$ angenommen, wenn es doch für Diffeomorphismen immer gilt? (In vielen Büchern wird dies getan.) Um zu verdeutlichen, dass wir hier etwas Nichttriviales bewiesen haben. Stellen wir uns folgende Frage:

(1) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bijektiv. Folgt daraus, dass $n = m$?

Anders herum gefragt (z. B. $n = 1, m = 2$): Hat die Ebene gleich viele Punkte wie die Gerade? Dies sollte Sie an den Anfang von Analysis I erinnern. Dort zeigten wir, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, dass also \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleich viele Punkte haben. Daher überrascht es nicht, dass die Antwort auf Frage (1) NEIN lautet. Dies beweist man in der Mengenlehre. Fragen wir nun

(2) Dieselbe Frage wie (1), mit f stetig.

Anders herum gefragt (wieder $n = 1, m = 2$): Gibt es eine stetige Kurve, die den ganzen \mathbb{R}^2 ausfüllt? Das ist schwer vorstellbar, es gibt sie aber wirklich (die sogenannten **raumfüllenden Kurven**, zuerst von Peano entdeckt). Also wieder NEIN. Was muss man denn noch von f verlangen, damit die Antwort Ja lautet?

(3) Dieselbe Frage wie (1), mit f und f^{-1} stetig.

Hier ist die Antwort tatsächlich JA, aber das ist recht schwierig zu zeigen (am besten mit algebraischer Topologie). Für $n = 1$ ist es nicht schwierig, siehe Übung ?? . Hieraus folgt natürlich auch Satz 3.2.2(1). Aber wie wir sahen, ist der Beweis unter der stärkeren Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f und f^{-1} sehr einfach.

Beispiele:

- ▷ Jede invertierbare lineare Abbildung ist ein Diffeomorphismus.
- ▷ Die Polarkoordinatenabbildung P ist kein Diffeomorphismus, da sie nicht injektiv ist: Es ist $P(r, \varphi) = P(r, \varphi + 2\pi)$ für alle (r, φ) . Schränkt man sie aber zum Beispiel auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ ein, erhält man einen Diffeomorphismus nach $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Dass die Umkehrabbildung C^1 ist, ist aus der Formel in der Bemerkung nach der Definition von P nicht unmittelbar zu entnehmen, folgt aber aus dem folgenden Satz.

3.2.3 Satz (Satz über die Umkehrabbildung)

Seien V, W endlich-dimensionale normierte Vektorräume, $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow W$ stetig differenzierbar. Sei $a \in U$ und $df|_a$ invertierbar. Dann ist f ein **lokaler Diffeomorphismus** nahe a , d. h. es gibt Umgebungen $U' \subset U$ von a , U'' von $f(a)$, so dass $f : U' \rightarrow U''$ ein Diffeomorphismus ist.

Warum ist das vernünftig? Nahe a wird f gut durch sein Differential $df|_a$ approximiert. Da nach Annahme $df|_a$ eine invertierbare lineare Abbildung, also insbesondere ein Diffeomorphismus ist, sollte f nahe a ähnliche Eigenschaften haben.

Andererseits steckt in dem Satz eine höchst nicht-triviale Aussage über die Auflösbarkeit von Gleichungssystemen, daher kann der Beweis nicht ganz einfach sein. Siehe die Beispiele nach dem Beweis. Im Beweis werden wir folgendes Lemma brauchen, das Satz 1.4.9 auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

3.2.4 Lemma (Schrankensatz)

V, W seien normierte Vektorräume und $U \subset V$ offen. $f : U \rightarrow W$ sei stetig differenzierbar. Seien $p, q \in U$. Falls die Strecke S von p nach q in U liegt, so gilt

$$\|f(q) - f(p)\|_W \leq C \|q - p\|_V, \quad C = \max_{x \in S} \|df|_x\|_{L(V,W)},$$

wobei $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ die Abbildungsnorm bezeichnet.

Die Umkehrung wie in Satz 1.4.9 gilt auch, ist aber nicht so wichtig. Aus dem Lemma folgt sofort:

Ist U konvex und $\|df_x\|_{L(V,W)} \leq C$ für alle $x \in U$, so ist f auf U Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C .

Beweis: Idee: Ähnlich wie beim Satz von Taylor reduzieren wir das Problem auf eine Dimension, indem wir die Strecke S parametrisieren: Sei $h = q - p$ und $\phi(t) = f(p + th)$ für $t \in [0, 1]$. Dann gilt $\phi(0) = f(p)$, $\phi(1) = f(q)$, also

$$f(q) - f(p) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt = \int_0^1 df|_{p+th}(h) dt$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel, also

$$\begin{aligned} \|f(q) - f(p)\|_W &\leq \int_0^1 \|df_{p+th}(h)\|_W dt && \text{nach der Dreiecksungleichung, Lemma 3.2.6} \\ &\leq \int_0^1 \|df_{p+th}\| \|h\|_V dt && \text{nach Definition der Operatornorm} \\ &\leq \int_0^1 L \|h\|_V dt = L \|h\|_V = L \|q - p\|_V \end{aligned}$$

□

Warum haben wir dies nicht analog zu Satz 1.4.9 bewiesen, mit Hilfe des Mittelwertsatzes? Weil es für Abbildungen $f : U \rightarrow W$ mit $\dim W > 1$ keinen Mittelwertsatz gibt! Siehe dazu auch Übung ??.

Beispiel: $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, dann $f(2\pi) - f(0) = 0$, aber es gibt kein $\tau \in (0, 2\pi)$ mit $f'(\tau) = 0$.

Im Beweis haben wir verwendet:

3.2.5 Definition

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ stetig. Definiere

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right)$$

3.2.6 Lemma

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^n . Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) ds \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$$

Eine analoge Aussage gilt für Kurven in beliebigen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen. Dies folgt sofort mittels Wahl einer Basis.

Dies ist eine kontinuierliche Version der Dreiecksungleichung

$$\|v_1 + \dots + v_N\| \leq \|v_1\| + \dots + \|v_N\|, \quad v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n,$$

welche durch Induktion aus der Dreiecksungleichung für zwei Vektoren ($N = 2$) folgt. Da Integrale als Grenzwerte von Summen dargestellt werden können, haben wir damit schon die Beweisidee formuliert.

Beweis: Für stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N f(t_{jN})$$

mit $t_{jN} = a + j \frac{b-a}{N}$. Indem man dies auf jedes $\gamma_i, i = 1 \dots, n$ anwendet, folgt mit Definition 3.2.5 und Lemma 1.2.4 dieselbe Formel mit f ersetzt durch γ . Aus der Dreiecksungleichung folgt für jedes N

$$\left\| \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N \gamma(t_{jN}) \right\| \leq \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_{jN})\|$$

Für $N \rightarrow \infty$ strebt die linke Seite gegen $\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\|$, da die Norm stetig ist, und die rechte Seite gegen $\int_a^b \|\gamma(t)\| dt$, da $f(t) = \|\gamma(t)\|$ stetig ist. Daraus folgt die Behauptung.

Hier ist ein anderer Beweis im Fall der euklidischen Norm. Mit folgendem hübschen Trick führen wir die Behauptung auf die eindimensionale Version, die aus den Grundlagen der Integrationstheorie bekannt ist, zurück:

Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\|v\| = \sup_{w \in \mathbb{R}^n, \|w\|=1} \langle v, w \rangle$, siehe Übung ?? . Wir wenden das auf $v = \int_a^b \gamma(t) dt$ an. Sei $w \in \mathbb{R}^n$

mit $\|w\| = 1$. Aus der Linearität des Integrals folgt mit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \int_a^b \gamma(t) dt, w \right\rangle = \sum_{i=1}^n \int_a^b \gamma_i(t) dt w_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) w_i dt \\ &= \int_a^b \langle \gamma(t), w \rangle dt. \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Schwarz ist $\langle \gamma(t), w \rangle \leq \|\gamma(t)\|$ für jedes t . Also folgt $\langle v, w \rangle \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$. Da dies für alle w gilt, folgt $\|v\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$.

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Im Fall $\dim W = \infty$ muss man etwas aufpassen: Damit das Integral $\int_0^1 \gamma(t) dt$ für eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ überhaupt definiert ist, muss man annehmen, dass W vollständig ist (siehe Beweis von Satz I.13.2.2 in Analysis I). Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt auch **Banachraum**. Die elementare Integrationstheorie läuft für Banachraum-wertige Funktionen genauso wie für reellwertige Funktionen.

Weiterhin brauchen wir folgende fundamentale Tatsache:

3.2.7 Lemma

Sei V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum. Sei

$$GL(V) := \{A \in L(V, V) : A \text{ ist invertierbar}\}$$

(1) $GL(V)$ ist eine offene Teilmenge von $L(V, V)$.

(2) Die Abbildung $GL(V) \rightarrow GL(V), A \mapsto A^{-1}$ ist stetig.

Oder äquivalent: Die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen ist eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$, und die Inversionsabbildung $A \mapsto A^{-1}$ ist stetig. Die Notation GL steht für ‚general linear group‘.

Der Beweis zeigt, dass die Inversionsabbildung sogar unendlich oft differenzierbar ist.

Beweis: Wir beweisen die Aussagen über Matrizen.

(1) Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Also ist

$$GL(\mathbb{R}^n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

wobei $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ die Determinantenabbildung ist. Nun ist die Abbildung \det stetig, da $\det A$ nach der Leibniz-Formel durch ein Polynom in den Einträgen der Matrix A gegeben ist. Da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R} ist, folgt die Behauptung.

(2) Nach der Kofaktorenformel ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof} A$, wobei die Einträge von $\operatorname{cof} A$ Polynome in den Einträgen von A sind. Daher ist $A \mapsto \operatorname{cof} A$ stetig. Da $A \mapsto \det A$ ebenfalls stetig ist, folgt die Behauptung. \square

Für Matrizen bzw. lineare Abbildungen gibt es folgende hübsche Verallgemeinerung der geometrischen Summenformel.

3.2.8 Lemma (Neumannsche Reihe)

Sei V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und $A : V \rightarrow V$ linear mit $\|A\| < 1$. Dann ist $\text{Id} - A$ invertierbar mit Inverser

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

Dies zeigt nochmal, dass Id im Innern von $\text{GL}(V)$ liegt.

Beweis: Zunächst gilt für die Abbildungsnorm die Ungleichung $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ für lineare Abbildungen $V \xrightarrow{B} W \xrightarrow{A} X$ zwischen normierten Vektorräumen V, W, X (Beweis als Übung). Für $V = W = X$ und $A = B$ folgt $\|A^2\| \leq \|A\|^2$, und induktiv $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Wir zeigen nun, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergiert. Da $L(V, V)$ mit der Abbildungsnorm $\|\cdot\|$ vollständig ist (denn jeder endlich-dimensionale normierte \mathbb{R} -Vektorraum ist vollständig), genügt es nach Satz 1.4.5, zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ konvergiert. Wegen $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ folgt die Konvergenz aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$, und diese konvergiert wegen $\|A\| < 1$.

Schließlich gilt $(\text{Id} - A) \sum_{k=0}^N A^k = \text{Id} - A^{N+1}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, und im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ folgt $(\text{Id} - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \text{Id}$. Analog folgt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) (\text{Id} - A) = \text{Id}$. \square

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Die Lemmata 3.2.7 und 3.2.8 gelten auch für $\dim V = \infty$, wenn V ein Banachraum ist. Der Beweis von Lemma 3.2.8 verläuft analog, wobei die Vollständigkeit von $L(V, V)$ auch hier leicht zu begründen ist. Daraus kann man dann Lemma 3.2.7 folgern, siehe Übung ???. Der angegebene Beweis von Lemma 3.2.7 funktioniert nicht, da es im unendlich-dimensionalen Fall keine Determinante gibt.

Beweis (des Satzes über die Umkehrabbildung): Wir arbeiten uns in drei Schritten von einem übersichtlichen Spezialfall zur allgemeinen Behauptung vor, getreu dem Motto: Wenn ein Problem kompliziert aussieht, betrachte zunächst ein einfacheres. Der Spezialfall (1. Schritt) enthält schon die wesentlichen Ideen.

1. Schritt: Wir zeigen:

Sei f in einer Umgebung U von 0 definiert und stetig differenzierbar, $f(0) = 0$, $df|_0 = \text{Id}$. Dann existieren offene Umgebungen $U' \subset U$ und U'' von 0, so dass $f : U' \rightarrow U''$ bijektiv, $df|_x$ invertierbar für alle $x \in U'$ und f^{-1} in 0 differenzierbar ist.

Beweis: Da f in 0 differenzierbar ist, gilt $f(x) - f(0) = df|_0(x) + r(x)$ mit $r(x) = o(x)$, wegen $f(0) = 0$, $df|_0 = \text{Id}$ also

$$f(x) = x + r(x) \quad \text{mit } r(x) = o(\|x\|) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Vorüberlegung: Um f zu invertieren, müssen wir zu gegebenem y ein x finden mit $f(x) = y$, also $x + r(x) = y$.

Die **zentrale Idee** ist nun, dies in ein Fixpunktproblem umzuschreiben:

$$x + r(x) = y \iff y - r(x) = x \iff T(x) = x$$

mit $T(x) = y - r(x)$.

Warum hat das eine Chance zu funktionieren, wenn x, y nahe 0 liegen? Der wesentliche Punkt ist, dass r und damit T unter den gegebenen Voraussetzungen eine Kontraktion ist, für x nahe 0. Es bleibt nur noch eine abgeschlossene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ zu finden, die von T in sich abgebildet wird. Da $r(x)$ wesentlich kleiner als x ist, ist das für kleine y nicht schwierig:

1a. Wähle $\delta > 0$ so, dass gilt: $\|dr|_x\| \leq \frac{1}{2}$ für $x \in X := \overline{K_{2\delta}(0)}$, und $X \subset U$.

Dies ist möglich, denn wegen $r(x) = f(x) - x$ ist mit f auch r stetig differenzierbar, und wegen $df|_0 = \text{Id}$ ist $dr|_0 = 0$. Da $dr|_x$ stetig von x abhängt, gibt es ein δ wie behauptet. Die zweite Bedingung ist erfüllbar, da U offen ist.

1b. Nach dem Schrankensatz folgt $\|r(x) - r(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ für alle $x, x' \in X$. Mit $x' = 0$ folgt insbesondere $\|r(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| \leq \delta$.

1c. Sei $\|y\| < \delta$ und definiere $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(x) = y - r(x)$.

Behauptung: X ist vollständig, $T(X) \subset K_{2\delta}(0) \subset X$, und $T : X \rightarrow X$ ist eine Kontraktion.

Beweis: $X = \overline{K_{2\delta}(0)}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n , also vollständig nach Lemma 1.4.2 und Satz 1.4.3. Für $x \in X$ ist

$$\|T(x)\| = \|y - r(x)\| \leq \|y\| + \|r(x)\| < \delta + \delta = 2\delta,$$

also $T(x) \in K_{2\delta}(0)$. Weiterhin ist $\|T(x) - T(x')\| = \|r(x') - r(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ für alle $x, x' \in X$, also ist T eine Kontraktion.

1d. Aus 1c. und dem Banachschen Fixpunktsatz folgt: Für jedes y mit $\|y\| < \delta$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $T(x) = x$, also $f(x) = y$. Wegen $x = T(x) \in K_{2\delta}(0)$ gilt sogar $x \in K_{2\delta}(0)$.

1e. Sei $U'' = K_\delta(0)$ und $U' = f^{-1}(U'') \cap K_{2\delta}(0)$. Da f stetig und U'' offen ist, ist U' offen. Weiterhin ist $f : U' \rightarrow U''$ nach 1d. bijektiv. Wegen $df|_x = \text{Id} + dr|_x$ und $\|dr|_x\| \leq \frac{1}{2}$ ist $df|_x$ nach Lemma 3.2.8 für alle $x \in U'$ invertierbar.

1f. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : U'' \rightarrow U'$ ist in 0 differenzierbar.

Beweis: Schreibe $g = f^{-1} : U'' \rightarrow U'$. Zunächst ist für $x \in U'$

$$\|f(x)\| = \|x + r(x)\| \geq \|x\| - \|r(x)\| \geq \|x\| - \frac{1}{2}\|x\| = \frac{1}{2}\|x\|.$$

Sei $y \in U''$. Für $x = g(y)$ ist $y = f(x)$, also folgt $\|y\| \geq \frac{1}{2}\|g(y)\|$, also $\|g(y)\| \leq 2\|y\|$.

Aus $f(x) = x + r(x)$ folgt $y = g(y) + r(g(y))$ für alle $y \in K_\delta(0)$, also

$$g(y) = y + \tilde{r}(y) \quad \text{mit } \tilde{r}(y) = -r(g(y)) = o(\|g(y)\|) = o(\|y\|) \quad (y \rightarrow 0).$$

Wegen $g(0) = 0$ sagt das genau, dass g in 0 differenzierbar ist mit Differential $dg|_0(y) = y$, also $dg|_0 = \text{Id}$.

2. Schritt: Wir zeigen:

Sei f in einer Umgebung U von $a \in \mathbb{R}^n$ definiert und stetig differenzierbar, und sei $df|_a$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen $U' \subset U$ von a und U'' von $f(a)$, so dass $f : U' \rightarrow U''$ bijektiv, $df|_x$ für alle $x \in U'$ invertierbar und f^{-1} in $f(a)$ differenzierbar ist.

Beweis:

- 2a. Sei zunächst $a = 0$, $f(0) = 0$ und $A := df|_0$ invertierbar. Setze $h = A^{-1} \circ f$. Dann gilt $h(0) = A^{-1}(0) = 0$ und $dh|_0 = A^{-1}df|_0 = \text{Id}$. Also können wir den 1. Schritt auf h anwenden, und aus $f = A \circ h$ folgt die Behauptung, im Einzelnen: Ist $h : U' \rightarrow \tilde{U}''$ bijektiv, so ist $f : U' \rightarrow U'' := A(\tilde{U}'')$ bijektiv, und mit \tilde{U}'' ist auch U'' offen, da A ein Homöomorphismus ist. Mit $dh|_x$ ist auch $df|_x = A \circ dh|_x$ invertierbar. Weiterhin ist $f^{-1} = h^{-1} \circ A^{-1}$ in 0 differenzierbar, da A in 0 differenzierbar ist, $A(0) = 0$ und h^{-1} in 0 differenzierbar ist.
- 2b. Seien nun $a, f(a)$ beliebig. Für $v \in \mathbb{R}^n$ sei $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x + v$ die Translation. Dies ist ein Diffeomorphismus mit Inverser T_{-v} und Differential Id an jedem Punkt. Motiviert durch

$$0 \xrightarrow{T_a} a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{T_{-f(a)}} 0$$

definieren wir $h = T_{-f(a)} \circ f \circ T_a$. Dann ist $h(0) = 0$, und aus Kettenregel und $d(T_v)|_p = \text{Id}$ für alle $v, p \in \mathbb{R}^n$ folgt $dh|_0 = df|_a$. Also erfüllt h die Bedingungen von 2a. Aus $f = T_{f(a)} \circ h \circ T_{-a}$ folgt dann die Behauptung, wenn man für $h : \tilde{U}' \rightarrow \tilde{U}''$ bijektiv $U' = T_a(\tilde{U}')$, $U'' = T_{f(a)}(\tilde{U}'')$ setzt.

3. Schritt: Es bleibt noch zu zeigen, dass f^{-1} in jedem Punkt $y \in U''$ differenzierbar ist und $d(f^{-1})|_y$ stetig von y abhängt. Die erste Behauptung folgt aus der Aussage im 2. Schritt, angewendet auf den Punkt $x = f^{-1}(y)$ statt a . Denn ebenfalls nach dem 2. Schritt ist $df|_x$ invertierbar. Die zweite Behauptung folgt aus $d(f^{-1})|_y = (df|_{f^{-1}(y)})^{-1}$ (siehe Satz 3.2.2, wobei in dessen Beweis die Stetigkeit von $d(f^{-1})$ nicht verwendet wurde), und aus der Stetigkeit von f^{-1} und Lemma 3.2.7(2). \square

Bemerkung: Wie kommt man darauf, die Gleichung $x + r(x) = y$ mittels des Fixpunktsatzes, also mittels Iteration, nach x aufzulösen? Mit folgender Überlegung: Wegen $r(x) = o(\|x\|)$ ist $r(x)$ sehr viel kleiner als x , für x nahe 0 (man sagt, es sei von kleinerer Ordnung als x). Daher muss das gesuchte x ziemlich nahe bei y liegen, d.h. $x_0 := y$ ist eine erste grobe Approximation von x . Das korrekte x muss die Gleichung $x = y - r(y - r(x))$ erfüllen (Einsetzen der ersten Gleichung in sich selbst). Das $r(x)$ macht hierbei einen sehr kleinen Fehler aus, da es ja innerhalb des schon kleinen r -Ausdrucks steht. Also sollte $x_1 = y - r(y)$ eine bessere Approximation für x sein. Setzt man dies nun wieder statt x in die erste Gleichung ein, sollte man erneut eine bessere Approximation erhalten etc.

Bemerkung (zum ∞ -dimensionalen Fall): Der Satz über die Umkehrabbildung gilt auch für Banachräume, mit demselben Beweis. In manchen Anwendungen (bei partiellen Differentialgleichungen) braucht man jedoch eine Version dieses Satzes auf Vektorräumen, deren Konvergenzbegriff (Topologie) nicht mittels einer Norm, sondern mittels eines ganzen unendlichen Systems von Normen gegeben ist, sogenannten Fréchet-Räumen. Dass für diese auch der Satz über die Umkehrabbildung gilt, ist sehr schwierig zu zeigen und war eine der großen Leistungen von John Nash (in den 1950er Jahren) – dem »Helden« aus dem Film *A Beautiful Mind*.

Wozu der Satz über die Umkehrabbildung?

Wir werden ihm im Folgenden immer wieder begegnen. Eine unmittelbare Anwendung ist jedoch die Auflösbarkeit von Gleichungssystemen in der Nähe einer bekannten Lösung.

Beispiel: Betrachte das Gleichungssystem $xe^y = \alpha$

$$\sin x + \sin y = \beta$$

Gegeben sind α, β , finde x, y . Das System *praktisch* nach x, y aufzulösen ist unmöglich. Wir kennen aber eine spezielle Lösung: Für $\alpha = \beta = 0$ ist $x = y = 0$ eine Lösung. Der Satz über die Umkehrabbildung zusammen mit Satz 3.2.2 liefert die folgenden Aussagen:

- (1) Für jedes (α, β) nahe Null gibt es genau eine Lösung (x, y) nahe Null.

(2) Für kleine α, β ist diese Lösung in erster Näherung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$, also $x \approx \alpha$,
 $y \approx \beta - \alpha$.

Genauer sagt (1): Es gibt Umgebungen U', U'' von $(0,0)$, so dass für jedes $(\alpha, \beta) \in U''$ genau eine Lösung $(x, y) \in U'$ existiert.

Denn mit $f(x, y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ \sin x + \sin y \end{pmatrix}$ sowie $a = \begin{pmatrix} 0,0 \\ x,y \end{pmatrix}$ $f(a) = \begin{pmatrix} 0,0 \\ \alpha,\beta \end{pmatrix}$ ist

$$df|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ \cos x & \cos y \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

das hat Determinante 1, ist also invertierbar. Also existieren U', U'' wie angegeben, so dass $f : U' \rightarrow U''$ bijektiv ist. Das ist gerade die Behauptung (1).

Zu (2): Nach Satz 3.2.2 lässt sich die Ableitung von f^{-1} bei $(0,0)$ zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ berechnen. (2) folgt dann mit Taylor, oder einfacher aus der Definition des Differentials.

Bemerkung: Der Banachsche Fixpunktsatz gibt ein Verfahren zur approximativen Bestimmung eines Fixpunkts an (approximativ: als Grenzwert einer explizit angebbaren Folge). Dies ergibt ein Verfahren zur approximativen Bestimmung der Lösung x von $f(x) = y$, unter den Voraussetzungen des Satzes über die Umkehrfunktion. Für ein Beispiel siehe Übung ??.

Hier ist noch eine hübsche Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung auf Matrizen:

Beispiel: Hat jedes $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Quadratwurzel?

D. h.: Gibt es ein $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B^2 = A$? Wir zeigen: **Ja**, wenn A nahe bei Id liegt. Betrachte

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ B &\longrightarrow B^2 \end{aligned}$$

Wir sahen, dass $df|_B(H) = BH + HB$. Für $B = \text{Id}$ also $df|_{\text{Id}}(H) = H + H = 2H$. Weil $df|_{\text{Id}} : H \rightarrow 2H$ invertierbar ist, können wir den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten: Es gibt Umgebungen U', U'' von Id, so dass $f : U' \rightarrow U''$ Diffeomorphismus ist, also

Für alle $A \in U''$ gibt es genau ein $B \in U'$ mit $B^2 = A$, und B hängt stetig (sogar differenzierbar) von A ab.

In dieser Aussage ist es wesentlich, sich sowohl bei A als auch bei B auf echte Teilmengen U'' bzw. U' von $M_n(\mathbb{R})$ einzuschränken:

- (a) Die Existenzaussage ist nicht für alle $A \in M_n(\mathbb{R})$ wahr, zum Beispiel hat die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Quadratwurzel (einfach ansetzen und ausrechnen, führt zu Widerspruch).
- (b) Die Eindeutigkeitsaussage ist nur dann wahr, wenn man nur solche B zulässt, die in einer gewissen Umgebung U' von Id liegen. Denn zum Beispiel für $A = \text{Id}$ hat die Gleichung $B^2 = \text{Id}$ mehrere Lösungen in $M_n(\mathbb{R})$, nämlich Id und $-\text{Id}$ (und weitere, falls $n > 1$).

Analoge Aussagen gelten für komplexe Matrizen. Eine genauere Untersuchung, welche Matrizen (auch weit weg von Id) Quadratwurzeln haben, erfordert aber einiges mehr an Algebra. Zum Beispiel hat die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auch keine komplexe Quadratwurzel.

Vergleichen wir die Aussage des Satzes über die Umkehrabbildung mit der Aussage für eine Dimension am Anfang dieses Abschnitts, stellt sich die

Frage: Angenommen, $df|_a$ ist für jedes $a \in U$ invertierbar. Folgt dann, dass f ein Diffeomorphismus $U \rightarrow f(U)$ ist? Also ein globaler, nicht ein lokaler Diffeomorphismus?

Antwort: Nein für $n \geq 2$.

Beispiel (Polarkoordinaten):

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad df = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$df|_{(r,\varphi)}$ ist invertierbar für $r \neq 0$. Trotzdem ist f nicht injektiv $(0, \infty) \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Bemerkung: Unter Zusatzvoraussetzungen kann die Antwort auch Ja lauten. Die berühmte **Jacobi-Vermutung** besagt folgendes:

Vermutung: Falls die Abbildung $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ polynomiell ist und $df|_a$ für jedes $a \in \mathbb{C}^n$ invertierbar ist, so ist f ein Diffeomorphismus $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Polynomiell bedeutet, dass die Komponentenfunktionen $f_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ von f Polynome sind. Die Vermutung besagt zusätzlich, dass das Inverse f^{-1} wieder polynomiell ist. Die Vermutung wurde 1939 aufgestellt und ist trotz vieler Beweisversuche bis heute selbst für $n = 2$ unbewiesen – und es gibt auch bis heute kein Gegenbeispiel.

3.3 Der Satz über implizite Funktionen

Der Satz über implizite Funktionen ist eines der zentralen Ergebnisse der Analysis. Er hat viele Gesichter. So sagt er interessante Dinge aus über

- ▷ das Auflösen von Gleichungen (und Gleichungssystemen)
- ▷ die Niveaumengen von Funktionen/Abbildungen
- ▷ die Klassifikation (»Normalformen«) von Abbildungen
- ▷ die Lösungen von Differentialgleichungen

und bildet ein zentrales Hilfsmittel bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten, also Flächen im Raum und deren höherdimensionalen Verallgemeinerungen.

Vorüberlegungen

Wir betrachten Abbildungen $f : U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^m$ mit $n \geq m$ und wollen zwei äquivalente Fragen studieren:

Ist die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ ein Graph?

Lässt sich die Gleichung $f(z) = c$ nach einigen der Variablen auflösen?

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}^m$ fixiert. Warum sind die beiden Fragen äquivalent? Betrachten wir $n = 2$, $m = 1$. Die Gleichung $f(x, y) = c$ nach y aufzulösen bedeutet, eine Funktion g zu finden mit

$$f(x, y) = c \iff y = g(x).$$

Dies lässt sich als $\{(x, y) : f(x, y) = c\} = \{(x, y) : y = g(x)\}$ schreiben, bedeutet also, dass $f^{-1}(c)$ genau der Graph von g ist.

Was können wir als Antwort erwarten? Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiele:

(a) $f(x, y) = y - x^2$. Es gilt: $f(x, y) = 0 \iff y = x^2$, also ist $f^{-1}(0)$ ein Graph.

(b) $f(x, y) = x - y^2$. Hier ist $f^{-1}(0)$ kein Graph einer Funktion $y = g(x)$, siehe Bild.

Aber: Nahe $(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ mit $y_0 > 0$: lokaler Graph von $y = \sqrt{x}$
 $y_0 < 0$: lokaler Graph von $y = -\sqrt{x}$.

Jedoch: Nahe $(x_0, y_0) = (0, 0)$: $f^{-1}(0)$ ist nicht einmal lokaler Graph.

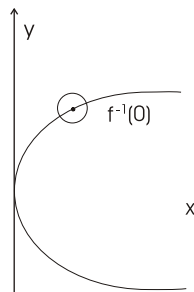


Abbildung 3.2

(c) $f(x, y) = x - y^3$. $f^{-1}(0)$ ist Graph der Funktion $y = \sqrt[3]{x}$. Diese ist aber in $x = 0$ nicht differenzierbar!

Hierbei bedeutet » $f^{-1}(c)$ ist **lokaler Graph nahe (x_0, y_0)** « folgendes: Es gibt eine Umgebung U_0 von (x_0, y_0) , so dass $f^{-1}(c) \cap U_0$ ein Graph ist.

Frage: Was macht den Unterschied? Wie kann man an f ablesen, ob $f^{-1}(c)$ lokaler Graph einer differenzierbaren Funktion ist oder nicht?

Um eine Antwort zu finden, stellen wir ein paar *heuristische* Überlegungen an. (Heuristik = Strategie, um etwas zu finden – ein wesentlicher, in der Lehre und in Büchern oft vernachlässigter Teil der Mathematik.) Dabei lassen wir uns von der geometrischen Vorstellung leiten.

Bleiben wir bei $f(x, y) = x - y^2$. Was ist anders bei $y_0 = 0$ als bei $y_0 \neq 0$? Was verhindert, dass $f^{-1}(0)$ nahe $y_0 = 0$ ein lokaler Graph ist?

Die **vertikale Tangente!** Denn ein Graph hat niemals eine vertikale Tangente.

Wie drückt sich das als Bedingung an f aus?

Vertikale Tangente bedeutet horizontale Normale (Senkrechte). Nach Satz 2.2.3 steht $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ senkrecht auf der Niveaumenge von f . Dieser Vektor ist horizontal, wenn seine zweite Komponente gleich Null ist.

Zusammenfassung: Wir haben für $M = f^{-1}(0)$ und einen beliebigen Punkt $p = (x_0, y_0)$ gezeigt:

▷ M hat vertikale Tangente bei $p \Rightarrow M$ ist nahe p kein lokaler Graph $y = g(x)$

▷ M hat vertikale Tangente bei $p \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$

Wir hätten gerne eine Aussage, wie man an f ablesen kann, ob M lokaler Graph ist. Die beiden genannten Implikationen legen nahe, dass die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ hierbei eine Rolle spielt. Sie ergeben aber noch keinen logischen Zusammenhang (beachte die Richtung der Implikationspfeile). Der Satz über implizite Funktionen sagt, dass genau so ein logischer Zusammenhang wirklich besteht.

Daher hat diese Heuristik zwar unsere Frage nicht vollständig gelöst, sie hat uns aber auf die richtige Fährte gebracht.

Der Fall *einer* Gleichung

Wir betrachten sofort den etwas allgemeineren Fall, dass x mehr-dimensional sein darf. Die gesuchte Funktion g ist dann eine Funktion mehrerer Variablen. Wir bezeichnen die Variablen in \mathbb{R}^n mit (x, y) , wobei $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

3.3.1 Satz (über implizite Funktionen, Spezialfall einer Gleichung)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $(x_0, y_0) \in U$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $c = f(x_0, y_0)$.

Angenommen, es gilt
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Dann gibt es Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von x_0 , $U'' \subset \mathbb{R}$ von y_0 und eine C^1 -Funktion $g : U' \rightarrow U''$, so dass gilt: Für alle $x \in U'$, $y \in U''$ ist

$$f(x, y) = c \iff y = g(x)$$

Der Satz hat zwei äquivalente Lesarten: Falls $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so gilt:

- ▷ Die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ ist ein lokaler Graph, genauer

$$f^{-1}(c) \cap (U' \times U'') = \text{Graph von } g$$

- ▷ Die Gleichung $f(x, y) = c$ lässt sich lokal nach y auflösen, genauer:

Ist (x_0, y_0) eine Lösung der Gleichung, so gibt es zu jedem x nahe x_0 (d.h. $x \in U'$) genau ein y nahe y_0 (d.h. $y \in U''$) mit $f(x, y) = c$, und die Funktion $x \mapsto y$ ist C^1 .

Bemerkung:

- ▷ Man sagt, g sei durch f implizit definiert. Eigentlich sollte es also heißen: Satz über implizit definierte Funktionen.

- ▷ Der Satz sagt nichts darüber aus, ob es für g eine Formel gibt. Das ist oft nicht der Fall, auch wenn f durch eine Formel gegeben ist. Es geht hier also um prinzipielle Auflösbarkeit, nicht um explizite.

- ▷ Die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für die lokale Auflösbarkeit.

Beispiel: $f(x, y) = y^2$, dann ist $f^{-1}(0)$ die x -Achse, also Graph von $g \equiv 0$, aber dort ist $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$.

- ▷ **Merkhilfe** für die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$:

Wenn man $f(x, y) = 0$ nach y auflösen will, muss die Gleichung auch »echt« von y abhängen. Daher die Ableitung nach y (und nicht etwa nach x).

Dies wird noch deutlicher, wenn man sich den Extremfall ansieht, wo $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ für *alle* (x, y) . Das hieße, dass f gar nicht von y abhängt, also y gar nicht in der Gleichung $f = 0$ auftaucht. Dann könnte man die Gleichung natürlich auch nicht nach y auflösen!

In diesem Sinne gilt folgende *abspeckte Merkversion des Satzes über implizite Funktionen*:

Ist (x_0, y_0) eine Lösung der Gleichung $f(x, y) = c$ und hängt f bei (x_0, y_0) »echt« von y ab, so lässt sich die Gleichung nahe (x_0, y_0) nach y auflösen.

- ▷ Die Idee der vertikalen Tangente hat uns zwar zur richtigen Bedingung geführt, aber sie entspricht nicht ganz genau unserer Frage; denn es gibt Beispiele, wo $f^{-1}(0)$ zwar keine vertikale Tangente hat, aber trotzdem kein lokaler Graph ist!

Beispiel: $f(x, y) = x^2 - y^2$ bei $(0, 0)$.

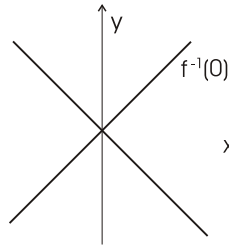
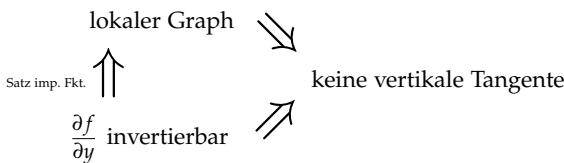


Abbildung 3.3

Mit anderen Worten: Die Umkehrungen der Implikationen, die wir in der Zusammenfassung der Vorüberlegungen formulierten, gelten nicht.

Die logischen Beziehungen sehen also wie folgt aus, wobei nicht eingezeichnete Implikationen auch nicht gelten.



Ähnlich wie beim Satz über die Umkehrfunktion kann man die Ableitungen der Funktion g mittels der Ableitungen von f berechnen:

3.3.2 Satz (Zusatz zum Satz über implizite Funktionen)

Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Satz 3.3.1. Dann gilt für $i = 1, \dots, n - 1$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Man sollte sich nicht diese Formel merken, sondern ihre Herleitung:

Beweis: Nach Definition von g gilt die Gleichung $f(x, g(x)) = c$ für alle x . Leitet man dies nach x_i ab und verwendet die Kettenregel, erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

wobei die f -Ableitungen bei $(x, g(x))$ und die g -Ableitung bei x ausgewertet wird. Setzt man $x = x_0$, folgt die Behauptung. \square

Beispiel: $x^2 + y^2 + \sin y = 0$. Eine Lösung ist $x_0 = y_0 = 0$.

Wegen $\frac{\partial(x^2+y^2+\sin y)}{\partial y}(0,0) = (2y + \cos y)|_{y=0} = 1 \neq 0$ lässt sich die Gleichung lokal nach y auflösen.

Es ist üblich, für die Lösung $y = y(x)$ statt $g(x)$ zu schreiben. Differenzieren nach x (mit y als Funktion von x) liefert

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + \sin y = 0 \quad \text{für alle } x \\ \Rightarrow & 2x + 2yy' + y' \cos y = 0 \\ \Rightarrow & y' = - \frac{2x}{2y + \cos y} \end{aligned}$$

Dies drückt y' für beliebige Lösungen als Funktion von x, y aus. Bei $x = 0, y = 0$ folgt $y'(0) = 0$.

Man kann die zweite (oder auch die dritte) Gleichung nochmal ableiten und erhält

$$2 + 2yy'' + 2(y')^2 + y'' \cos y - (y')^2 \sin y = 0$$

Dies lässt sich nach y'' umstellen. Bei $x = 0, y = 0$ ist $y' = 0$, also $2 + y'' = 0$, also $y''(0) = -2$.

Analog kann man auch höhere Ableitungen von y bei $x = 0$ berechnen.

Beweis (von Satz 3.3.1 über implizite Funktionen): Um den Blick auf's Wesentliche zu lenken, nehmen wir zunächst $n = 2$ an.

Idee: Wir wollen den Satz über die Umkehrabbildung verwenden. Dazu ergänzen wir eine »triviale« Gleichung für x : D. h. statt nur $f(x, y) = c$ nach y aufzulösen, wollen wir das System

$$\begin{aligned}x &= \xi \\ f(x, y) &= c\end{aligned}$$

nach x, y als Funktionen von ξ, c auflösen. Insbesondere ist dann y eine Funktion von ξ, c ; wegen $x = \xi$ ist es damit eine Funktion von x, c und daher für festes c eine Funktion von x , wie gewünscht.

Genauer und etwas formaler: Setze $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$. Die Jacobi-Matrix von F ist $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Diese Matrix hat Determinante $\frac{\partial f}{\partial y}$, und dies ist nach Voraussetzung bei (x_0, y_0) ungleich Null. Also ist $dF|_{(x_0, y_0)}$ invertierbar, und nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es Umgebungen U_0 von (x_0, y_0) und U_1 von $F(x_0, y_0) = (x_0, c)$, so dass $F : U_0 \rightarrow U_1$ ein Diffeomorphismus ist, also eine C^1 -Inverse $G : U_1 \rightarrow U_0$ besitzt. Schreibe $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$, dann ist also für alle $(x, y) \in U_0, (\xi, \eta) \in U_1$

$$\begin{aligned}x = \xi & & \iff & & x = G_1(\xi, \eta) \\ f(x, y) = \eta & & & & y = G_2(\xi, \eta)\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $x = \xi$ oben links folgt, dass die obere rechte Gleichung auch $x = \xi$ lauten muss, also $G_1(\xi, \eta) = \xi$ für alle (ξ, η) . Definiere die Funktion g durch $g(x) = G_2(x, c)$. Damit folgt schließlich

$$f(x, y) = c \iff F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(x, c) \iff y = G_2(x, c) = g(x)$$

was zu zeigen war. Die Umgebungen U' von x_0 und U'' von y_0 muss man nur so wählen, dass das Rechteck $U' \times U''$ in U_0 enthalten ist.

Der Beweis für $n > 2$ läuft exakt gleich, außer dass x, ξ jetzt $(n-1)$ -Tupel sind und dF eine $n \times n$ -Matrix der Form $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ * & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ ist, wobei I_{n-1} die $(n-1) \times (n-1)$ -Einheitsmatrix, 0 eine Spalte von $n-1$ Nullen und $*$ eine Zeile von $n-1$ unwichtigen Einträgen ist. \square

Bemerkung:

- ▷ Der Beweis zeigt sogar etwas mehr: Die Lösung y der Gleichung $f(x, y) = c$ hängt nicht nur glatt von x ab, sondern auch von c , wenn man dies variiert. Diese Abhängigkeit ist gerade durch die Funktion G_2 gegeben.
- ▷ Geometrische Bedeutung der Abbildung F : Wir stellen uns F als Abbildung von der (x, y) -Ebene in die (ξ, η) -Ebene vor. F bildet dann die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ auf eine gerade Strecke $\eta = c$ ab. Diese ist parallel zur ξ -Achse. Die Höhenlinien von f werden also durch die Abbildung F geradegebogen. (Hier fehlt noch ein Bild)

Der Fall *mehrerer* Gleichungen

Wir betrachten nun ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= c_1 \\ &\vdots \\ f_m(x, y) &= c_m \end{aligned}$$

(wobei x und y mehrere Komponenten haben dürfen) und fragen, ob es sich nach y als Funktion von x auflösen lässt. Für lineare Gleichungssysteme wissen wir, dass es eine Chance auf Auflösbarkeit, also eine eindeutige Lösung, nur dann gibt, wenn

$$\text{Anzahl der Unbekannten} = \text{Anzahl der Gleichungen}$$

ist. Hier sind die Unbekannten die Komponenten von y . Da differenzierbare Abbildungen durch lineare approximiert werden (Definition des Differentials!), ist es vernünftig, anzunehmen, dass y genau m Komponenten hat, also $y \in \mathbb{R}^m$.

Wir schreiben das Gleichungssystem kurz als $f(x, y) = c$, wobei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$. Sei n die

Gesamtzahl der Komponenten von x und y . Also $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^n$. Statt einer partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ haben wir nun eine $m \times m$ -Matrix

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} := \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right)_{i,j=1, \dots, m}$$

3.3.3 Satz (über implizite Funktionen, allgemeiner Fall)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ derart, dass $(x_0, y_0) \in U$. Sei $c = f(x_0, y_0)$.

Angenommen, die Matrix $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0)$ ist invertierbar.

Dann gibt es Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von x_0 , $U'' \subset \mathbb{R}^m$ von y_0 und eine C^1 -Abbildung $g : U' \rightarrow U''$, so dass gilt: Für alle $x \in U'$, $y \in U''$ ist

$$f(x, y) = c \iff y = g(x)$$

Die Bemerkungen nach Satz 3.3.1 und nach dessen Beweis gelten alle auch hier, mutatis mutandis. (Zu deutsch: wobei geändert werden muss, was verschieden ist.)

Die Niveaumenge hat die Dimension $n - m$, da sie von den $n - m$ Variablen x_1, \dots, x_{n-m} parametrisiert wird. Siehe die Beispiele weiter unten.

Beweis: Der Beweis von Satz 3.3.1 kann fast wörtlich übernommen werden: Wieder setzen wir $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$, eine Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^n . Die Jacobimatrix von F ist nun eine Blockmatrix der

Form $\begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ * & \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \end{pmatrix}$, wobei I_{n-m} die Einheitsmatrix der Größe $n - m$, 0 die Null-Matrix der Größe $(n - m) \times m$ und $*$ eine unwichtige Matrix der Größe $m \times (n - m)$ ist. Die Determinante dieser Matrix ist $\det I_{n-m} \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}$, und nach Voraussetzung ist dies bei (x_0, y_0) ungleich Null. Der

Satz über die Umkehrabbildung gibt die lokale Invertierbarkeit von F , und aus der Inversen kann man wie vorher die Abbildung g ablesen. \square

Wir haben auch wieder eine Formel für die Ableitung(-smatrix) von g :

3.3.4 Satz (Zusatz zum allgemeinen Satz über implizite Funktionen)

Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Satz 3.3.3. Dann gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial y}$ kurz für $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}$ steht usw.

Da es sich hier um Matrizen handelt, ist im Produkt rechts die Reihenfolge wichtig.

Beweis: Wiederum leiten wir $f(x, g(x)) = c$ nach x ab und verwenden dabei die Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

wobei die f -Ableitungen bei $(x, g(x))$ und die g -Ableitung bei x ausgewertet wird. Setzt man $x = x_0$, folgt die Behauptung durch Umstellen. \square

Beispiele: Sei $n = 3$. Wir bezeichnen die Variablen in \mathbb{R}^3 mit (x, y, z) .

(1) $m = 1$: Die Niveaumenge einer Funktion in \mathbb{R}^3 ist typischerweise eine Fläche:

Sei $p = (x_0, y_0, z_0)$, $c = f(p)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Dann ist nach Satz 3.3.1

$$f^{-1}(c) \cap U_0 = \{(x, y, z) : z = g(x, y)\}$$

für eine Funktion g und eine Umgebung U_0 von p ; das ist eine Fläche.

Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $p = (0, 0, 1)$, also $c = 1$. Es ist $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \neq 0$ bei p .

Löse $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach z auf: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

(Warum die positive Wurzel? Damit bei $x = y = 0$ der Wert $z = 1$ herauskommt, also der Punkt p .)

Die Niveaumenge $f^{-1}(1)$ ist die Kugel; die obere Halbkugel lässt sich als Graph über der (x, y) -Ebene schreiben.

(2) $m = 2$: Die Niveaumenge zweier Funktionen in \mathbb{R}^3 ist typischerweise eine Kurve:

Sei $p = (x_0, y_0, z_0)$, $c_1 = f_1(p)$, $c_2 = f_2(p)$ und $\det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}(p) \neq 0$. Dann ist nach Satz 3.3.3 mit $f = (f_1, f_2)$, $c = (c_1, c_2)$

$$f^{-1}(c) \cap U_0 = \{(x, y, z) : y = g_1(x), z = g_2(x)\}$$

für Funktionen g_1, g_2 und eine Umgebung U_0 von p , das ist eine Kurve, da auf der rechten Seite der einzige freie Parameter x ist.

Beachte, dass $f^{-1}(c) = \{(x, y, z) : f_1(x, y, z) = c_1, f_2(x, y, z) = c_2\} = f_1^{-1}(c_1) \cap f_2^{-1}(c_2)$ der Schnitt zweier Flächen ist. Es überrascht daher nicht, dass eine Kurve herauskommt.

Beispiel: $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f_2(x, y, z) = x - y$, $p = (0, 0, 1)$, also $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Es ist $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{bei } p}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar.

Löse $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y = 0$ nach y, z als Funktionen von x auf, erhalte $y = x$, $z = \sqrt{1 - 2x^2}$. Dies ist eine Kurve, der Schnitt der Kugel mit der Ebene $x = y$.

Beispiele: In Spezialfällen reduziert sich der Satz über implizite Funktionen auf uns schon bekannte Sätze.

- (1) Eine Gleichung (oder ein System) der Form $h(y) - x = 0$ wobei $h : U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ist. Die Gleichung $h(y) - x = 0$ nach y aufzulösen bedeutet eine Abbildung g zu bestimmen mit $h(y) = x \iff y = g(x)$, d.h. die Umkehrabbildung von h zu finden. Sei etwa $h(0) = 0$. Mit $f(x, y) = h(y) - x$ sagt der Satz über implizite Funktionen, dass die Auflösung lokal nahe 0 möglich ist, falls $d_y f|_{(0,0)}$ invertierbar ist. Nun ist $d_y f|_{(0,0)} = dh|_0$, also ist dies genau die Bedingung im Satz über die Umkehrabbildung.
- (2) Falls f bezüglich y linear ist, d. h. $f(x, y) = A(x)y$ mit einer $m \times m$ -Matrix $A(x)$ (genauer: einer C^1 -Abbildung $A : U_1 \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^k} M_m(\mathbb{R})$), so ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = A(x)$.

Der Satz über implizite Funktionen sagt also: Falls $A(a)$ invertierbar ist, so ist $A(x)y = c$ nach y für x nahe a (und alle y) auflösbar.

Für $x = a$ ist das lineare Algebra, und die Aussage für x nahe a folgt daraus, dass A stetig und die Menge der invertierbaren Matrizen offen ist, siehe Lemma 3.2.7.

4 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

4.1 Definition und Charakterisierung als Niveaumenge

Der Begriff der Untermannigfaltigkeit verallgemeinert die Begriffe Kurve und Fläche auf beliebige Dimensionen. Wichtig ist dabei, dass die Kurven, Flächen etc. »keine Ecken und Kanten« haben. Zunächst müssen wir uns überlegen, wie man das mathematisch ausdrückt.

Sie kennen das bereits: Ein Graph einer Funktion hat »keine Ecken«, wenn die Funktion überall differenzierbar ist.

Wir möchten allerdings auch Mengen betrachten, die nicht Funktionsgraphen sind, z. B. diese:

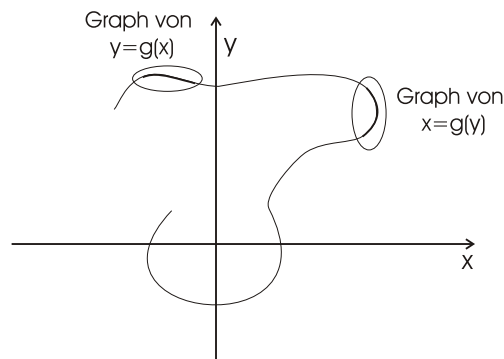


Abbildung 4.1

Beobachtung: Für jeden Punkt p auf dieser Kurve existiert eine Umgebung, so dass

- ▷ entweder die Kurve in dieser Umgebung ein Graph über der x -Achse ist
- ▷ oder die Kurve in dieser Umgebung ein Graph über der y -Achse ist.

(Bei den meisten Punkten stimmt sogar beides.)

Sprechweise: Ein Graph über der x -Achse ist eine Menge der Form $\{(x, y) : y = g(x)\}$. Ein Graph über der y -Achse ist eine Menge der Form $\{(x, y) : x = g(y)\}$.

Wichtige Bemerkung: Wir interessieren uns hier für *Teilmengen* des \mathbb{R}^n , also im Fall von Kurven für unparametrisierte Kurven.

Dies führt zu folgender Definition:

4.1.1 Definition

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n** , falls sie überall lokal Graph über einer geeigneten Auswahl von k Koordinaten ist.

Das heißt: Für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p , eine Permutation π von $\{1, \dots, n\}$, eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine C^1 -Abbildung $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass

$$M \cap U = \{(x_1, \dots, x_n) : x'' = g(x'), x' \in U'\}$$

wobei $x' = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)})$, $x'' = (x_{\pi(k+1)}, \dots, x_{\pi(n)})$.

Wir wollen eine äquivalente Charakterisierung geben und brauchen dafür folgenden Begriff.

4.1.2 Definition

Seien $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Funktionen auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. f_1, \dots, f_m heißen **unabhängig bei $x \in U$** , falls die Vektoren $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)$ linear unabhängig sind.

4.1.3 Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. M ist genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn sie überall lokal als gemeinsame Niveaumenge von $n - k$ unabhängigen Funktionen dargestellt werden kann.

Das heißt: Für jedes $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p sowie C^1 -Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ und Zahlen $c_1, \dots, c_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$M \cap U = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_{n-k}^{-1}(c_{n-k})$$

und f_1, \dots, f_{n-k} bei jedem $x \in M \cap U$ unabhängig sind.

Spezialfall Hyperflächen: Eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n heißt **Hyperfläche**. Z.B. Kurven in der Ebene oder Flächen im Raum. Hier braucht man nur *eine* Funktion $f = f_1$. Unabhängigkeit bedeutet dann einfach $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in M \cap U$.

Man hätte statt der c_i auch Nullen schreiben können, da man dies durch Ändern der f_i (Addieren einer Konstante) immer erreichen kann: Falls $h_i = f_i - c_i$, so ist $f_i(x) = c_i \iff h_i(x) = 0$ für alle x , also $f_i^{-1}(c_i) = h_i^{-1}(0)$. Außerdem $\nabla f_i = \nabla h_i$.

Untermannigfaltigkeiten treten meist als Niveaumengen auf, daher ist diese Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten mindestens genauso wichtig wie die erste Definition.

Bemerkung: Die angegebene Formulierung ist für Beispielrechnungen günstig, für ein tieferes Verständnis und den Beweis ist es aber günstig, die Bedingung mittels der Abbildung $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ zu formulieren:

▷ Mit $c = (c_1, \dots, c_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist offenbar

$$f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_{n-k}^{-1}(c_{n-k}) = f^{-1}(c)$$

d. h. gemeinsame Niveaumenge der f_i = Niveaumenge von f

▷ $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)$ linear unabhängig $\iff df|_x$ ist surjektiv

Beweis: $df|_x$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, also dargestellt durch eine $(n - k) \times n$ -Matrix, die Jacobi-Matrix $J_f(x)$. Deren Zeilen sind $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)$, als Zeilenvektoren geschrieben. Damit gilt:

$\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)$ linear unabhängig $\iff \text{Rang } J_f(x) = n - k \iff \dim(\text{Bild } df|_x) = n - k$
 $\iff df|_x$ ist surjektiv.

Beweis (von Satz 4.1.3): 1. Sei M Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $p \in M$. Wähle U, U', g, π wie in der Definition und setze $f(x) = x'' - g(x')$ für $x \in U$. Offenbar ist dann $f^{-1}(0) = \{x : x'' = g(x')\}$. Für den Rang der Jacobi-Matrix $J_f(x)$ ist eine Umordnung der Koordinaten offenbar unerheblich, daher können wir

$\pi = \text{id}$ annehmen. Dann hat $J_f(x)$ die Form
$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
 und damit offenbar den Rang

$n - k$. Also gilt die Bedingung des Satzes.

2. Angenommen, die Bedingung des Satzes gilt. Dann ist $\text{Rang } J_f(x) = n - k$, also hat $J_f(x)$ $n - k$ linear unabhängige Spalten. Nach Permutation der Koordinaten können wir annehmen, dass dies die Spalten $k + 1, \dots, n$ sind. Das heißt, die quadratische Matrix $\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)}$ ist invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist dann für eine Umgebung U_0 von $p: f^{-1}(c) \cap U_0 =$ der Graph einer Abbildung $x'' = g(x')$. \square

Bemerkung: Der Beweis zeigt, dass die lineare Unabhängigkeit von $\nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-k}$ in einem Punkt p bereits genügt, damit die gemeinsame Niveaumenge der f_i in einer Umgebung von p eine Untermannigfaltigkeit ist.

Beispiele: Zunächst Kurven in der Ebene, also $k = 1, n = 2$:

- ▷ Graph einer C^1 -Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ offen: Der Graph $\{(x, g(x)) : x \in I\}$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 (nach Definition, mit $U' = I, U = I \times \mathbb{R}$ und $\pi = \text{id}$).
- ▷ Kreis $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = f^{-1}(1)$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$. Wegen $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)^T \neq 0$ auf S^1 (da S^1 nicht den Nullpunkt enthält) ist S^1 eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 .

Darstellung mittels lokaler Graphen: Sei

$$g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

g_1, g_2 sind C^1 -Funktionen $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, und ihre Graphen (über der x -Achse) überdecken $S^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$. (Beachte: g_1, g_2 sind zwar auch bei $x = \pm 1$ definiert, aber dort nicht differenzierbar!) Definition 4.1.1 ist damit für alle Punkte $p \in S^1 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ erfüllt. Um auch die Punkte $(\pm 1, 0)$ zu erreichen, vertauschen wir die Koordinaten: Die Graphen von g_1, g_2 über der y -Achse, d.h. $\{(g_i(y), y) : y \in (-1, 1)\}$ für $i = 1, 2$, überdecken $S^1 \setminus \{(0, \pm 1)\}$, insbesondere also $(\pm 1, 0)$.

- ▷ $M =$ die Vereinigung mehrerer disjunkter Kreise ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, z.B. $M = S^1_{(0,0),1} \cup S^1_{(0,5),2}$, wobei $S^1_{p,r} := \{q \in \mathbb{R}^2 : \|q - p\| = r\}$.
- ▷ Orbit einer regulären injektiven Kurve: Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Kurve, $I \subset \mathbb{R}$ offen. γ sei **regulär**, d.h. $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$, und injektiv. Sei $M = \gamma(I)$.

Übung: Zeigen Sie, dass M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist, unter folgender Annahme: I ist beschränkt und γ hat eine injektive stetige Fortsetzung nach \bar{I} . (Hinweis: Satz 6.1.5) (Hier fehlt noch ein Bild: Ein Fall, wo die Bedingung nicht erfüllt ist und M keine Untermannigfaltigkeit ist)

Bemerkung: Die analoge Aussage gilt für Kurven im \mathbb{R}^n .

Nun einige Flächen im \mathbb{R}^3 , d.h. $k = 2, n = 3$:

- ▷ Graph einer C^1 -Funktion $g : U' \rightarrow \mathbb{R}, U' \subset \mathbb{R}^2$ offen: Der Graph $\{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in U'\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 (nach Definition).
- ▷ Die Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Beweis analog zu S^1 mittels $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Für die Darstellung mittels lokaler Graphen braucht man die Funktionen

$$g_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad g_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

definiert auf $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Ihre Graphen überdecken alle Punkte auf S^2 , außer dem Äquator, wo $x^2 + y^2 = 1$. Nimmt man noch die Graphen von $g_i(x, z)$ und von $g_i(y, z)$ hinzu, für $i = 1, 2$, hat man die ganze Sphäre überdeckt.

- ▷ Der Doppelkegel $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2\}$ ist keine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Anschaulich: weil er in $(x, y, z) = 0$ eine Spitze hat. Übung: Beweisen Sie dies rigoros!

Man kann zwar $K = f^{-1}(0)$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ schreiben, aber $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)^T$ verschwindet für $(x, y, z) = 0$, und dieser Punkt liegt auf K .



Abbildung 4.2. Die obere Hälfte $z \geq 0$ des Doppelkegels: keine Untermannigfaltigkeit.

- ▷ $K \setminus \{0\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

Schließlich zwei Beispiele mit $k = 1, n = 3$:

- ▷ Graph einer C^1 -Abbildung $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ offen: Der Graph $\{(x, g(x)) : x \in I\}$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 (nach Definition). Z.B. $g(x) = (x^2, x^3)$ auf $I = \mathbb{R}$ ergibt $M = \{(x, x^2, x^3) : x \in \mathbb{R}\}$.

- ▷ Schnitt einer Sphäre mit einer Ebene. Sei $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f_2(x, y, z) = z$. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$M_a = f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(a)$$

Ist M_a Untermannigfaltigkeit? $\nabla f_1 = (2x, 2y, 2z)^T$, $\nabla f_2 = (0, 0, 1)^T$ sind linear unabhängig nur für $x = y = 0$, also auf der z -Achse. Im Falle $|a| < 1$ enthält M_a keinen solchen Punkt, denn für $(x, y, z) \in M$ mit $x = y = 0$ gilt $z = \pm 1$, also $a = \pm 1$.

Also nach Satz 4.1.3:

$$|a| < 1 \Rightarrow M_a \text{ ist Untermannigfaltigkeit der Dimension } 1$$

(anschaulich klar: ein Kreis). Für $a = 1$ ist die Bedingung des Satzes nicht erfüllt, daher gibt der Satz keine Information darüber, ob M eine Untermannigfaltigkeit ist. Offenbar ist $M_1 = \{(0, 0, 1)\}$ trotzdem eine Untermannigfaltigkeit, allerdings der Dimension 0. Analog für $a = -1$.

Wir formulieren Satz 4.1.3 noch einmal um.

4.1.4 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung.

- ▷ $p \in U$ heißt **regulärer Punkt** von $f \iff df|_p$ ist surjektiv.
- ▷ $c \in \mathbb{R}^m$ heißt **regulärer Wert** \iff Alle $p \in f^{-1}(c)$ sind reguläre Punkte.

4.1.5 Satz (Satz vom regulären Wert)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung und c ein regulärer Wert von f .

Dann ist $f^{-1}(c)$ eine $(n - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Beweis: Sei $f = (f_1, \dots, f_m)$. Nach den Bemerkungen nach Satz 4.1.3 bedeutet Surjektivität von $df|_p$, dass die Gradienten $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)$ linear unabhängig sind. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1.3 (wobei die f_i hier M global, nicht nur lokal, definieren). \square

4.2 Tangential- und Normalraum

Was bedeutet es für einen Vektor, tangential an eine Untermannigfaltigkeit M in einem Punkt p zu sein? Dies lässt sich auf verschiedene Weisen präzisieren. Wir nehmen folgendes als Definition und leiten dann alternative Charakterisierungen und Berechnungsmethoden her.

4.2.1 Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $p \in M$.

$v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M in p \Leftrightarrow es gibt eine in M verlaufende Kurve durch p , die bei p den Tangentialvektor v hat.

Formal:

$$\exists I \subset \mathbb{R} \text{ offen, } 0 \in I \quad \exists \gamma : I \rightarrow M \text{ } C^1\text{-Kurve : } \begin{aligned} \gamma(0) &= p \\ \gamma'(0) &= v \end{aligned}$$

Der **Tangentialraum** an M in p ist

$$T_p M = \{\text{Tangentialvektoren an } M \text{ in } p\}.$$

Beispiel: $M = \{(x, y) : y = x^2\}$, $p = (1, 1)$. Wählt man $\gamma(t) = (t - 1, (t - 1)^2)$, so verläuft γ in M und $\gamma(0) = p$. Damit ist $\gamma'(0) = (1, 2) \in T_p M$. Wählt man $\gamma(t) = p$ für alle t , so folgt $\gamma'(0) = (0, 0) \in T_p M$.

Wir werden gleich sehen, dass $T_p M$ ein ein-dimensionaler Vektorraum ist, also von $(1, 2)$ aufgespannt wird.

Bemerkung: Wichtig: Im Fall $M = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ (Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$) hatten wir bei der Einführung des Differentials die Tangentialhyperebene betrachtet. *Der Tangentialraum ist nicht dasselbe!*

Genauer: Sei $p = (x, f(x)) \in M$. Die dort betrachtete Tangentialebene im Punkt p ist $p + T_p M := \{p + v : v \in T_p M\}$, d.h. man verschiebt $T_p M$ um den Vektor p , so dass der Nullpunkt von $T_p M$ im Punkt p zu liegen kommt. Man nennt dies auch den **affinen Tangentialraum**.

Man stellt sich Tangentialvektoren als Vektoren vor, die in p angeheftet sind.

Diese Definition des Tangentialraums ist viel nützlicher, da man so einen Vektorraum erhält, wie der folgende Satz zeigt.

4.2.2 Satz

Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Sei $p \in M$.

Dann ist $T_p M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

Beweis: Wir zeigen dies, indem wir M nahe p lokal als Graph darstellen und damit eine konkrete Formel für $T_p M$ angeben. Nach Definition ist (nach Umordnung der Koordinaten)

$$M \cap U = \{(x', x'') : x'' = g(x'), x' \in U'\}$$

für eine Umgebung U von p und eine Funktion $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $U' \subset \mathbb{R}^k$ offen. Daher definiert jede Kurve $\tilde{\gamma} : I \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^k$ eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M \cap U$ mittels

$$\gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), g(\tilde{\gamma}(t)))$$

und umgekehrt ist jedes $\gamma : I \rightarrow M \cap U$ von dieser Form. Wegen $\gamma'(t) = (\tilde{\gamma}'(t), dg|_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\gamma}'(t)))$ (Kettenregel) folgt

$$T_p M = \{(\tilde{v}, dg|_p(\tilde{v})) : \tilde{v} \in \mathbb{R}^k\},$$

denn zu beliebigem $\tilde{v} \in \mathbb{R}^k$ können wir einfach $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{p} + t\tilde{v}$ wählen, wobei $p = (\tilde{p}, g(\tilde{p}))$, und dies erfüllt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$. Wir müssen noch den Definitionsbereich von $\tilde{\gamma}$ angeben: Da U' offen und $\tilde{\gamma}$ stetig ist,

ist die Menge $\tilde{\gamma}^{-1}(U')$ offen, daher enthält sie mit dem Punkt \tilde{p} auch ein offenes Intervall I um \tilde{p} . Dann ist $\tilde{\gamma}(I) \subset U'$ wie gewünscht.

Also ist $T_p M$ Bild der injektiven linearen Abbildung $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{v} \rightarrow (\tilde{v}, dg|_{\tilde{p}}(\tilde{v}))$, somit ist es ein k -dimensionaler Untervektorraum. □

Bemerkung: Warum haben wir für den Beweis nicht direkt die Definition des Tangentialraums verwendet? Das wäre problematisch. Denn: Seien $v, w \in T_p M$. Wir wollen $v + w \in T_p M$ zeigen. Seien γ_v, γ_w entsprechende Kurven, d.h. $\gamma_v(0) = \gamma_w(0) = p, \gamma'_v(0) = v, \gamma'_w(0) = w$. Wie findet man eine Kurve γ mit $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v + w$? Ein natürlicher Versuch wäre, $\gamma(t) = \gamma_v(t) + \gamma_w(t) - p$ zu setzen, das erfüllt diese Bedingungen. Das Problem ist aber, dass dieses γ nicht unbedingt in M verläuft!

4.2.3 Definition

Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Sei $p \in M$.

$N_p M = (T_p M)^\perp$ heißt **Normalraum** an M im Punkt p .

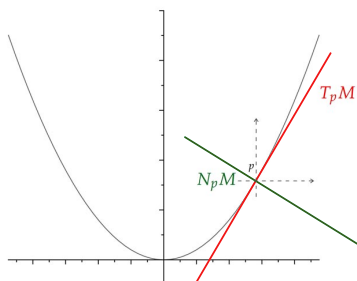


Abbildung 4.3

Frage: Wie berechnet man $T_p M$ und $N_p M$?

- ▷ Falls M lokal als Graph gegeben ist: Siehe den Beweis von Satz 4.2.2, für $T_p M$. Dann lässt sich $N_p M$ durch Auflösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen.
- ▷ Falls M lokal als Niveaumenge gegeben ist:

4.2.4 Satz (Tangential- und Normalraum von Niveaumengen)

Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Sei $p \in M$.

Angenommen, $M \cap U = f^{-1}(c)$ für eine Umgebung U von p , wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit $df|_p$ surjektiv.

Sei $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$. Dann gilt:

$$T_p M = \ker df|_p$$

$$N_p M = \text{span}\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)\}$$

Die zweite Aussage verallgemeinert die uns bekannte Tatsache, dass ∇f immer senkrecht auf $f^{-1}(0)$ steht, für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst $T_p M \subset \ker df|_p$. Sei $v \in T_p M$. Sei γ wie in der Definition vom $T_p M$, also

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v, \quad \gamma(I) \subset M.$$

Dann ist $f(\gamma(t)) = c$ für alle $t \in I$. Somit gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = df|_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = df|_p(v)$$

d. h. $v \in \ker df|_p$.

Damit ist $T_p M \subset \ker df|_p$ bewiesen. Da beides Vektorräume sind und

$$\dim \ker df|_p = n - \underbrace{\dim \text{Bild}(df|_p)}_{n-k} = k = \dim T_p M$$

gilt, folgt $T_p M = \ker df|_p$.

Wir schreiben dies um: Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} v \in T_p M &\Leftrightarrow df|_p(v) = 0, \quad \text{und mit } df|_p(v) = \begin{pmatrix} df_1|_p(v) \\ \vdots \\ df_{n-k}|_p(v) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow df_1|_p(v) = 0, \dots, df_{n-k}|_p(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \perp \nabla f_1(p), \dots, v \perp \nabla f_{n-k}(p) \end{aligned}$$

Also $T_p M = (\text{span}\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)\})^\perp$ und damit $N_p M = (T_p M)^\perp = \text{span}\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)\}$. \square

4.3 Extrema mit Nebenbedingungen

Problem: Es seien zwei Funktionen $f, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Finde ein Extremum von F auf $f^{-1}(0)$! Mit anderen Worten: Wo ist $F(x)$ maximal / minimal unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$?

Beispiel: Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1$ ist $x^2 + y^2$ minimal? Also

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} \min \\ f(x, y) &= xy - 1 = 0 \end{aligned}$$

Anschaulich ist klar: Bei einem Minimum p von F auf $f^{-1}(0)$ muss die Niveaumenge von F tangential an $f^{-1}(0)$ sein. Denn würde die Niveaumenge von F die Kurve $f^{-1}(0)$ schneiden, so müsste F in einer Richtung entlang dieser Kurve abnehmen, man hätte also kein Minimum. Da die Gradienten senkrecht auf den Niveaumengen stehen, muss also $\nabla F(p)$ parallel zu $\nabla f(p)$ sein, also

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(p) = \lambda \nabla f(p).$$

Im unserem Beispiel also $(2x, 2y) = \lambda(y, x)$. Außerdem muss die Nebenbedingung erfüllt sein. Also

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda y \\ 2y &= \lambda x \\ xy - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Das sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten x, y, λ . Da aufgrund der Nebenbedingung $x, y \neq 0$, folgt aus den ersten beiden Gleichungen:

$$4y = \lambda^2 y \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

$$\triangleright \lambda = 2: x = y \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1;$$

$$\triangleright \lambda = -2: x = -y \Rightarrow -x^2 = 1, \text{ also keine Lösung.}$$

Damit sind $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ die einzigen Kandidaten für lokale Extrema. Es bleibt zu prüfen, ob es sich wirklich um Minima handelt: Die Menge $\{(x, y) : xy = 1\}$ besteht aus zwei Hyperbeln. Betrachten wir nur die Hyperbel im ersten Quadranten $x > 0, y > 0$ (Symmetrie!). Offenbar gilt $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, wenn man auf der Hyperbel entlang einer Asymptote gegen unendlich geht. Daher muss es ein Minimum geben. Dieses kann nach den Überlegungen oben nur bei $(1, 1)$ liegen.

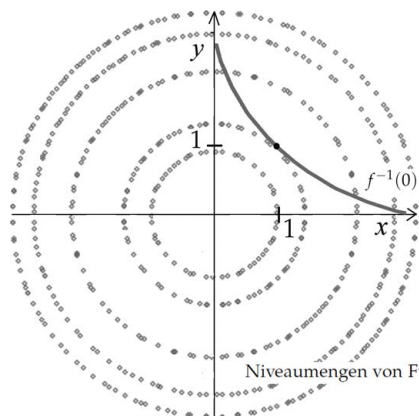


Abbildung 4.4

Wir wollen die Überlegung, die zur Bedingung $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla F(p) = \lambda \nabla f(p)$ geführt hat, nun präzisieren und verallgemeinern. Wir schreiben $F|_M$ für die Einschränkung der Funktion F auf M .

4.3.1 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei U eine offene Umgebung von M .

Falls $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion ist, für die $F|_M$ in $p \in M$ ein lokales Extremum hat, folgt:

$$\nabla F|_p \in N_p M$$

Beweis: Sei $v \in T_p M$ und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Dann hat die Abbildung $t \mapsto F(\gamma(t))$ in $t = 0$ ein lokales Extremum. Es folgt:

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = dF|_p(v) = \langle \nabla F(p), v \rangle$$

D.h. $\nabla F(p) \perp v$ für alle $v \in T_p M$, und das bedeutet $\nabla F(p) \in N_p M$. □

Für den folgenden Satz brauchen wir ein weiteres Lemma, das auch von allgemeinem Interesse ist:

4.3.2 Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V_1, \dots, V_m : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Sei $p \in U$. Dann ist die Menge

$$\{p \in U : V_1(p), \dots, V_m(p) \text{ sind linear unabhängige}\}$$

offen.

Dies verallgemeinert Lemma 3.2.7(1), welches dem Fall $m = n$ entspricht.

Beweis: Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn für die Matrix $A = (v_1, \dots, v_m)$ gilt, dass die $m \times m$ -Matrix $A^T A$ invertierbar ist.¹ Betrachte nun die Funktion

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \det [A(p)^T A(p)], \quad A(p) = (V_1(p), \dots, V_m(p))$$

Also ist $f(p) \neq 0$ genau dann, wenn $V_1(p), \dots, V_m(p)$ linear unabhängig sind. Die Menge dieser p ist also $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, und da f stetig ist, ist diese Menge offen. □

¹Beweis: v_1, \dots, v_m sind linear unabhängig genau dann, wenn aus $Ax = 0$ mit $x \in \mathbb{R}^m$ folgt, dass $x = 0$ ist (schreibe das Produkt Ax aus!), d.h. wenn A injektiv ist. Ist nun $A^T A$ invertierbar, so ist es injektiv, also ist A injektiv. Ist umgekehrt A injektiv und $A^T Ax = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^m$, so folgt $\langle A^T Ax, x \rangle = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, also ist $A^T A$ injektiv.

4.3.3 Satz (Extrema mit Nebenbedingungen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F, f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien C^1 -Funktionen und $c \in \mathbb{R}^m$. Sei

$$M = \{x \in U : f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m\}$$

und $p \in M$. Angenommen,

- ▷ $F|_M$ hat in $p \in M$ ein lokales Extremum,
- ▷ die Vektoren $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)$ sind linear unabhängig,

Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla F(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(p)$$

Die λ_i heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

Beweis: Nach Lemma 4.3.2 gibt es eine offene Umgebung $U' \subset U$ von p , so dass $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ auf ganz U' linear unabhängig sind, d.h. alle $q \in U'$ sind reguläre Punkte von $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nach dem Satz vom regulären Wert, Satz 4.1.5, ist $M \cap U'$ eine Untermannigfaltigkeit.

Nach Lemma 4.3.1 und Satz 4.2.4 ist $\nabla F(p) \in N_p M = \text{span}\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)\}$, und das ist genau die Behauptung. \square

Damit ergibt sich:

Verfahren: Um die Extrema von $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen $f_1(p) = 0, \dots, f_m(p) = 0$ zu bestimmen, geht man wie folgt vor:

1. Schritt: Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(p) &= 0, \\ \partial_{x_1} F(p) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_{x_1} f_i(p), \\ &\vdots \\ \partial_{x_n} F(p) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_{x_n} f_i(p) \end{aligned}$$

Das sind $m + n$ Gleichungen für die $m + n$ Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_m, p_1, \dots, p_n$ (wobei $p = (p_1, \dots, p_n)$). Sei \mathcal{K} die Menge der Lösungen p (die ›Kandidatenmenge‹), die λ_i sind für das Folgende unwichtig.

2. Schritt: Prüfe nach, ob $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x)$ für alle x im Suchbereich $M = \{x \in U : f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0\}$ linear unabhängig sind. Sei \mathcal{K}' die Menge der Punkte in U , wo das *nicht* der Fall ist. Da der Satz für diese Punkte nicht anwendbar ist, müssen wir diese gesondert untersuchen.

3. Schritt: Nun muss man für jeden Punkt in $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$ entscheiden, ob es sich um ein lokales Extremum handelt. Dies geht oft durch andere Überlegungen, siehe die Beispiele.

Bemerkung: Für lokale Extrema ohne Nebenbedingungen haben wir Bedingungen an die Hesse-Matrix kennengelernt, die manchmal zeigen, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. Gibt es

dafür einen Ersatz im Fall mit Nebenbedingungen?

Antwort: Ja. Dies ist eine (herausfordernde) Übung.

Beispiele: ▷ Siehe das Beispiel am Anfang des Kapitels.

- ▷ Bestimme die Extremwerte von $5x + y - 3z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Hierbei ist $F(x, y, z) = 5x + y - 3z$, $f_1(x, y, z) = x + y + z$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

1. Schritt: Wir rechnen zunächst drauf los. Die Multiplikatorbedingung lautet

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Wir können hieraus x, y, z eliminieren, indem wir diese drei Gleichungen addieren und $x + y + z = 0$ verwenden. Es folgt $5 + 1 - 3 = \lambda_1(1 + 1 + 1) + \lambda_2 \cdot 0$, also $\lambda_1 = 1$. Einsetzen ergibt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Addiert man die Quadrate dieser drei Gleichungen und verwendet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, folgt $32 = 4\lambda_2^2$, also $\lambda_2 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$. Daraus ergeben sich die beiden einzigen Kandidaten für lokale Extrema

$$p_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Gibt es vielleicht noch weitere Kandidaten?

Die Vektoren $\nabla f_1 = (1, 1, 1)^T$ und $\nabla f_2 = (2x, 2y, 2z)^T$ sind für alle $(x, y, z) \in M = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(1)$ linear unabhängig, denn für diese gilt $x + y + z = 0$ und $(x, y, z) \neq 0$, und damit kann $(2x, 2y, 2z)^T$ kein Vielfaches von $(1, 1, 1)^T$ sein. Damit ist M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Also kann es keine weiteren Extrema außer p_{\pm} geben.

3. Schritt: M ist kompakt, denn es ist abgeschlossen (da durch Gleichungen stetiger Funktionen definiert) und beschränkt (da in der Einheitskugel enthalten). Also muss F auf M ein Maximum und ein Minimum annehmen. Daher muss eins von p_{\pm} das Maximum sein und eins das Minimum. Wegen $F(p_{\pm}) = \pm 8/\sqrt{2}$ folgt, dass p_+ das Maximum ist und p_- das Minimum ist.

Bemerkung: Was ist die Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren?

Die λ_i dienen zunächst nur als Hilfsvariable, deren Werte am Ende für die Lösung irrelevant sind. Sie haben jedoch auch eine konkrete Bedeutung:

$\lambda_i =$ Änderungsrate des Extremalwertes von F , wenn man den vorgeschriebenen Wert von f_i ändert (und die anderen f_j gleich lässt).

D.h. man betrachtet als Nebenbedingung $f_i(x) = c_i$. Dann hängt der Extremalpunkt und damit der Extremalwert von c_i ab, und λ_i ist die Ableitung des Extremalwertes nach c_i . Streng genommen gilt dies nur unter einer zusätzlichen Bedingung, die die (lokale) Eindeutigkeit des Extremalpunktes garantiert. Anstatt dies genauer zu erklären, wollen wir es an einem einfachen Beispiel nachprüfen.

Beispiel (aus den mathematischen Wirtschaftswissenschaften): Ein Mensch braucht zum Leben Brot und Wein. Angenommen, er möchte sein Kapital K so für Brot und Wein ausgeben, dass er damit so zufrieden

wie möglich ist (oder, wie die Ökonomen sagen würden: dass er den größten Nutzen davon hat). Wieviel Wein und wieviel Brot muss er kaufen?

Sehen wir erst die Kosten an. Wein koste w Euro pro Liter, Brot koste b Euro pro Kilogramm. Seien W, B die Mengen an Wein und Brot, dann folgt

$$wW + bB = K$$

Nun zum Nutzen: Wir nehmen an, dass sich der Nutzen von W Litern Wein und B Kilogramm Brot wie folgt quantifizieren lässt:

$$N(W, B) = \alpha \log W + \beta \log B, \quad \alpha = 0,7, \beta = 0,3$$

(Warum? Dies drückt aus, dass z.B. eine Verdoppelung der Menge eines Gutes immer zur selben Zufriedenheitssteigerung führt, unabhängig vom Ausgangswert; zusätzlich drückt es aus, dass Verdoppelung der Weinmenge die Zufriedenheit stärker erhöht als Verdoppelung der Brotmenge...)

Wir wollen also $N(W, B)$ unter der Nebenbedingung $f(W, B) = wW + bB = K$ maximieren. Aus $\nabla N = \lambda \nabla f$ folgt

$$\frac{\alpha}{W} = \lambda w, \quad \frac{\beta}{B} = \lambda b$$

Um λ zu eliminieren, dividieren wir die zweite durch die erste Gleichung und erhalten

$$\frac{W}{B} = \frac{\alpha b}{\beta w} \quad (*)$$

Mit Hilfe der Nebenbedingung können wir daraus W, B berechnen: Der Einfachheit halber sei $w = b = 1$. Dann sagt (*), dass sich die Mengen von Wein und Brot zueinander wie α zu β verhalten, wegen $\alpha + \beta = 1$ folgt also

$$W = \alpha K = 0,7K, \quad B = \beta K = 0,3K$$

Der sich daraus ergebende Nutzen (man sieht leicht, dass es der *Maximalnutzen* ist – Übung) ist

$$N_{\max}(K) = N(\alpha K, \beta K) = \alpha \log(\alpha K) + \beta \log(\beta K) = \log K + \alpha \log \alpha + \beta \log \beta$$

Außerdem erhält man $\lambda = \frac{\alpha}{W} = \frac{1}{K}$. Wir sehen $\lambda = \frac{dN_{\max}}{dK}$. Also:

$\lambda =$ Ableitung des Maximalnutzens nach dem eingesetzten Kapital

\approx Zunahme des Maximalnutzens, wenn man die Kapitalmenge um 1 Euro erhöht.

Man kann zeigen, dass dies kein Zufall ist, sondern für beliebige Nutzenfunktionen gilt.

Bemerkung: In der Ökonomie verwendet man häufig die sogenannte Cobb-Douglas-Nutzenfunktion $\tilde{N}(W, B) = W^\alpha B^\beta$. Es gilt $N = \log \tilde{N}$. Da N eine streng monoton wachsende Funktion von \tilde{N} ist, haben beide dieselben Extrema.

Teil III
Differentialgleichungen

Wir befassen uns nun mit Differentialgleichungen: Lösungsmethoden, ihre geometrische Bedeutung und ihr Ursprung in Anwendungen. Von Anfang an sei gesagt, dass viele Differentialgleichungen nicht explizit lösbar sind: Man weiß zwar, dass – unter recht schwachen Voraussetzungen – eine Lösung existiert (dazu lernen wir später einen Satz kennen), aber es gibt oft keine explizite Formel für die Lösung. Sie kennen das schon von Integralen: Für manche Integrale gibt es keine geschlossene Formel. Die Verfahren, die wir kennenlernen, funktionieren daher nur für spezielle Klassen von Gleichungen.

Wir befassen uns in diesem Buch nur mit **gewöhnlichen Differentialgleichungen**. Das heißt, dass die gesuchte Funktion nur von *einer* Variablen abhängt. Hängt die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab und kommen daher in der Gleichung ihre partiellen Ableitungen vor (diese lernen wir später kennen), so spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

5 Erste Schritte: Integration, Separation der Variablen

Als Einstieg betrachten wir Differentialgleichungen erster Ordnung. Das sind Gleichungen, in denen eine unbekannte Funktion (meist mit y bezeichnet), ihre erste Ableitung y' und die Variable, von der y abhängt (meist mit x bezeichnet), vorkommen. Also zum Beispiel $y = y'$ oder $\sin y + \sin y' = x$ oder $y' + e^{y'} = x + y$. Wir nehmen der Einfachheit zunächst immer an, dass die Gleichung so gegeben ist, dass y' nur auf der linken Seite vorkommt und dort allein steht; also Gleichungen der Form

$$y' = F(x, y),$$

wobei $F(x, y)$ ein gegebener Ausdruck (d.h. eine Funktion) in x und y ist. Dies ist eine Kurzschreibweise. Sie bedeutet, dass man eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ sucht ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall), die die Gleichung

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

für alle x im Definitionsbereich I von y erfüllt. Genauer gesagt werden wir zwei Typen von Problemen begegnen:

Problem 1: Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung. Das heißt: Bestimme alle Funktionen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(x) = F(x, y(x))$ für alle $x \in I$.

Problem 2: Das **Anfangswertproblem (AWP)**: Gegeben ist ein Punkt (x_0, y_0) , zu bestimmen sind alle Lösungen y der Differentialgleichung, die zusätzlich die **Anfangsbedingung (AB)** $y(x_0) = y_0$ erfüllen. (Meistens wird es genau eine solche Lösung geben.)

Dabei gilt grundsätzlich für Differentialgleichungen:

- (1) Der Definitionsbereich einer Lösung soll immer ein Intervall sein.
- (2) Wir suchen immer **maximale** Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. solche mit **maximalem Definitionsbereich** I . Das heißt, y soll sich nicht auf eine Lösung $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{I} \supsetneq I$ fortsetzen lassen.

Die erste Bedingung ist sinnvoll, da z.B. eine auf $(0, 1) \cup (1, 2)$ definierte Lösung in Wirklichkeit aus zwei voneinander unabhängigen Lösungen (eine auf $(0, 1)$ und eine auf $(1, 2)$) zusammengesetzt ist.

Die zweite Bedingung ist offensichtlich vernünftig und stellt insbesondere sicher, dass wir Eindeutigkeitsaussagen machen können. Denn mit einer Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist natürlich die Einschränkung von y auf jede Teilmenge von I Lösung (aber nicht maximale).

Das Lösen von Differentialgleichungen ist eng mit der Integration verwandt. Dies sieht man am deutlichsten beim einfachsten Typ $y' = F(x)$. Aber auch manche andere Gleichungen lassen sich mit Hilfe von Integrationen lösen, aber nicht alle. In diesem Kapitel betrachten wir nur solche Gleichungen, für die eine Reduktion auf Integrationen möglich ist.

Schreibweise: Wir schreiben Funktionen meist als $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ oder einfach y . Der Ausdruck $y \equiv a$ bezeichnet eine Funktion, die konstant gleich a ist.

5.1 Der einfachste Fall: $y' = F(x)$

Hängt die rechte Seite der Differentialgleichung nicht von y ab, so kann man sie einfach durch Integrieren lösen.

Beispiel: Wir wollen die Differentialgleichung $y' = x^2$ lösen. Das geht so:

$$y' = x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Also ist $y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ die allgemeine Lösung. Das heißt, es gibt unendlich viele Lösungen, für jedes $C \in \mathbb{R}$ eine.

Lösen wir nun das AWP mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) Einsetzen in die allgemeine Lösung und Auflösen nach C :

$$y(1) = \frac{1}{3}1^3 + C = 2$$

$$\Rightarrow C = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}$$

(2) Direkt mit Verwendung des bestimmten Integrals: Nach dem Hauptsatz ist $y_{\text{allg}}(x) = C + \int_a^x t^2 dt$ eine Lösung der DGL für beliebige $a, C \in \mathbb{R}$. Nehmen wir $a = 1$, lässt sich C besonders schnell berechnen: Denn $y(1) = C + \int_1^1 t^2 dt = C$, also muss $C = 2$ sein. Also ist die Lösung

$$y(x) = 2 + \int_1^x t^2 dt.$$

Rechnen Sie nach, dass dies mit der zuerst gefundenen Lösung übereinstimmt!

Die zweite Methode lautet allgemein:

5.1.1 Satz

Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$.

Das Anfangswertproblem $y' = F(x), y(x_0) = y_0$ hat eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t) dt$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass die Formel eine Lösung des Anfangswertproblems gibt: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass $y'(x) = 0 + F(x)$ für alle x gilt. Weiterhin ist $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(t) dt = y_0$, also ist y eine Lösung des AWP.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösung. Falls z irgendeine Lösung ist, so muss gelten:

$$(y - z)' = y' - z' = F(x) - F(x) = 0 \text{ für alle } x \Rightarrow y - z = \text{const}$$

Also können sich die Lösungen nur um eine Konstante unterscheiden. Mit der Anfangsbedingung folgt:

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = y_0 \Rightarrow (y - z)(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

Die Konstante ist daher Null. Also ist $y = z$. □

Beispiel: Wir wollen die DGL $y' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, mit AB $y(2) = 5$ lösen. Nach dem Satz ist

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t) dt$$

$$\Rightarrow y(x) = 5 + \int_2^x \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow y(x) = 5 + \log x - \log 2$$

Fazit: Das Lösen der einfachsten Art von Differentialgleichung, $y' = F(x)$, ist äquivalent zum Integrieren von F .

5.2 Separation der Variablen

Die Separation der Variablen ist eine mächtige Methode, mit der man viele Differentialgleichungen erster Ordnung lösen kann. Wir illustrieren die Methode zunächst an einem Beispiel und rechtfertigen sie danach.

5.2.1 Das Verfahren im Beispiel

Beispiel: Wir wollen die DGL $y' = 2x \cdot y^2$ lösen.

1. Schreibe $\frac{dy}{dx}$ statt y' und forme dann (formal) so um, dass links nur die Variable y vorkommt, rechts nur x («Separation«):

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = 2x dx \quad (y \neq 0)$$

2. Bilde das Integral:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx$$

Bestimme Stammfunktionen beider Seiten separat: $\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$, $\int 2x dx = x^2$ und schreibe die Integrationskonstante nur rechts hin:

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

3. Löse nun nach y auf (wenn möglich).

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

4. Führe die Gegenprobe durch: Nach der Kettenregel ist

$$y' = (2x + 0) \frac{1}{(x^2 + C)^2} = 2x \cdot y^2$$

also ist das gefundene y tatsächlich eine Lösung.

5. Suche nach *verlorenen* Lösungen: In Schritt 1 mussten wir annehmen, dass $y \neq 0$ ist. Also ist zu überprüfen, ob es Lösungen gibt, die den Wert $y = 0$ annehmen. Dies ist der Fall: Die Funktion y , die konstant gleich Null ist, erfüllt $y'(x) = 0 = 2x \cdot y(x)^2$ für alle x .

Zu den Definitionsbereichen der Lösungen siehe unten.

5.2.2 Implizit definierte Funktionen

Da man im 3. Schritt nicht immer nach y auflösen kann, führen wir folgenden Sprechweise ein: Wir betrachten eine Gleichung (keine Differentialgleichung), in der die Variablen x und y auftreten. Schreiben wir diese als

$$G(x, y) = H(x, y)$$

Hierbei sind $G, H : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$. Wir sagen, eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ wird **implizit** durch diese Gleichung definiert, wenn $G(x, y(x)) = H(x, y(x))$ für alle $x \in I$ gilt. Dabei muss natürlich $(x, y(x)) \in U$ für alle $x \in I$ sein.

Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von y in der Lösungsmenge der Gleichung enthalten ist:

$$\{(x, y(x)) : x \in I\} \subset \{(x, y) : G(x, y) = H(x, y)\}.$$

Praktisch bestimmen wir eine implizit definierte Funktion, indem wir nach y auflösen.

Beispiele: (1) Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$: Lösen wir nach y auf, erhalten wir $y^2 = 1 - x^2$ und daraus die beiden Lösungen

$$y_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{oder} \quad y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

jeweils für $x \in I = [-1, 1]$. Es können also mehrere Funktionen durch dieselbe Gleichung implizit definiert werden.

Geometrisch ist das klar: Die Lösungsmenge $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ist der Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 1, und er ist die Vereinigung zweier Graphen, des oberen und des unteren Halbkreises.

Natürlich könnte man weitere Funktionen hinschreiben, die durch diese Gleichung definiert sind, z.B. indem man y_1 auf $I = [0, 1]$ einschränkt oder indem man y_1 auf $[-1, 0]$ und y_2 auf $(0, 1]$ verwendet – diese Funktion hätte einen Sprung bei $x = 0$.

Doch y_1, y_2 sind die einzigen *stetigen* Lösungen mit *maximalem Definitionsbereich*.

(2) Die Gleichung $y + e^y = x$: Auflösen nach y würde bedeuten, die Umkehrfunktion der Funktion $g(y) = y + e^y$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen. Nach einem Satz der Analysis I existiert die Umkehrfunktion und bildet $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ab, da g streng monoton wächst – denn es ist $g'(y) = 1 + e^y > 1$ für alle y – und da $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = -\infty$, $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \infty$ gilt.

Diese Gleichung definiert also eine eindeutige Funktion auf \mathbb{R} . Man kann diese aber nicht als geschlossenen Ausdruck in ›elementaren‹ Funktionen ausdrücken.

(3) Die Gleichung $x = 1$ definiert keine Funktion $y = y(x)$.

Die Frage, wann eine Gleichung eine Funktion definiert (d.h. nach y auflösbar ist) und wann diese differenzierbar ist, wird durch den Satz über implizite Funktionen, Satz 3.3.1, beantwortet.

5.2.3 Rechtfertigung des Verfahrens

Nach dem Beispiel zur Separation der Variablen stellen sich Fragen:

- ▷ Wann und warum funktioniert das Verfahren? Das ist nicht selbstverständlich, denn die zwischen- durch verwendeten formalen Ausdrücke $\frac{dy}{y^2}$ und $2x dx$ haben für sich keinen Sinn.
- ▷ Können wir sicher sein, alle Lösungen gefunden zu haben?

5.2.1 Satz (Separation der Variablen)

Sei eine Differentialgleichung folgender Form gegeben:

$$y' = a(x) \cdot b(y)$$

Es gelte:

- (a) $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : J \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig, $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle,
- (b) $b(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.

Dann gilt:

- (1) Sei $B(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{b(y)}$ und $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$. Dann ist

$$B(y) = A(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

implizite Lösung der Differentialgleichung. Das heißt, jede durch diese Gleichung implizit definierte differenzierbare Funktion ist Lösung der Differentialgleichung.

- (2) Falls b stetig differenzierbar ist, so hat das Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ für beliebiges $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ eine *eindeutige* Lösung.

Falls $b(y_0) = 0$ für ein y_0 ist, so ist $y \equiv y_0$ eine Lösung.

Teil (1) des Satzes spiegelt genau das oben durchgeführte Verfahren wider:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y), \quad \text{dann} \quad \frac{dy}{b(y)} = a(x) dx,$$

und Integrieren (2. Schritt) ergibt $B(y) = A(x) + C$.

Beweis: (1) Zu zeigen: Jede differenzierbare Funktion $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$, für die $B(y(x)) = A(x) + C \quad \forall x$ gilt, erfüllt die DGL. Leite nach x ab und verwende die Kettenregel, dann folgt:

$$y(x)' \cdot \underbrace{\left(\frac{B'(y(x))}{1}\right)}_{\frac{1}{b(y(x))}} = \underbrace{A'(x)}_{a(x)}, \quad \text{also} \quad y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

(Ableiten ist erlaubt, denn A, B sind differenzierbar nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da $a, \frac{1}{b}$ stetig sind.)

(2) werden wir später beweisen (Satz 8.2.10).

Ist $b(y_0) = 0$ und $y \equiv y_0$, so folgt $y'(x) = 0$ und $a(x)b(y(x)) = a(x)b(y_0) = 0$ für alle x , also ist y Lösung. \square

Einige Punkte zur Vorsicht:

Bemerkungen:

- (1) Im Satz ist die Gleichung für $x \in I$ definiert. Es kann vorkommen, dass einige oder alle Lösungen nur auf einem kleineren Intervall $I' \subset I$ definiert sind. Siehe Beispiel (2) unten.
- (2) Falls b nicht stetig differenzierbar ist, kann das Anfangswertproblem mehrere Lösungen haben. Siehe Beispiel (3) unten.

Die Existenzaussage in (2) gilt schon, wenn b nur stetig ist. Denn nach dem Satz über implizite Funktionen, Satz 3.3.1, folgt aus $B'(y_0) = \frac{1}{b(y_0)} \neq 0$, dass die Gleichung $B(y) = A(x) + C$ mit $C = B(y_0) - A(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 nach y auflösbar ist.

Beispiele:

(1) $y' = a \cdot y, a \in \mathbb{R}$.

Dies ist wahrscheinlich die wichtigste DGL überhaupt. Wir lösen

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \quad \stackrel{y \neq 0}{\iff} \quad \frac{dy}{y} = a dx \iff \log |y| = ax + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\iff |y| = e^{ax+C} = e^C e^{ax} = C' e^{ax}$$

mit $C' = e^C > 0$. Wir erhalten für jedes $C' > 0$ die beiden Lösungen $y = C' e^{ax}$ und $y = -C' e^{ax}$, anders geschrieben $y = C'' e^{ax}$ mit $C'' \neq 0$.

Zusätzlich ist $y \equiv 0$ eine Lösung. Schreiben wir dies als $0 \cdot e^{ax}$ und schreiben wir C statt C'' , erhalten wir die Lösungen $y(x) = C e^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$). Gegenprobe: $y' = C a e^{ax} = a y$.

Sind das alle Lösungen? Ja, wie man mit dem Argument unter (c) im nächsten Beispiel sehen kann. (Für ein anderes einfaches Argument siehe den Beweis von Satz 7.1.2.)

$$\boxed{y' = a y \iff y(x) = C e^{ax} \quad (C \in \mathbb{R})}$$

(2) $y' = 2x y^2$. Lösungen: $y \equiv 0$ und $y_C = -\frac{1}{x^2 - C} = \frac{1}{C - x^2}$ für $C \in \mathbb{R}$.

(Wie oben hergeleitet. Wir schreiben $-C$ statt C , das macht das Folgende etwas hübscher.)

(a) Was sind die Definitionsbereiche der Lösungen?

Die DGL ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Falls $C \geq 0$, so ist y_C jedoch bei den Punkten $x = \pm\sqrt{C}$ nicht definiert. Da der Definitionsbereich einer Lösung immer ein Intervall sein soll, ergeben sich die Lösungen:

- ▷ $y \equiv 0$, und y_C mit $C < 0$, jeweils auf \mathbb{R} definiert.
- ▷ für $C = 0$ zwei Lösungen, eine auf $(-\infty, 0)$ und eine auf $(0, \infty)$
- ▷ für $C > 0$ drei Lösungen, eine auf $(-\infty, -\sqrt{C})$, eine auf $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$ und eine auf (\sqrt{C}, ∞) .

Die Formel ist in jedem Fall $y_C(x) = \frac{1}{C - x^2}$.

(b) Wie löst man das AWP?

Beispiel: AB $y(2) = 1$. Aus $1 = y(2) = \frac{1}{C - 2^2}$ folgt $C = 5$. Welches der Intervalle $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, \infty)$ ist der Definitionsbereich der Lösung?

Damit die AB sinnvoll ist, muss 2 im Definitionsbereich liegen. Also ist die Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{5 - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

Wir halten fest:

Für das Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0$ müssen wir die Lösung nehmen, deren Definitionsbereich x_0 enthält.

Lösung des AWP für beliebige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$: Ist $y_0 = 0$, so ist $y \equiv 0$ die Lösung. Ist $y_0 \neq 0$, so folgt

$$y_0 = \frac{1}{C - x_0^2} \Rightarrow C = \frac{1}{y_0} + x_0^2$$

und je nach Vorzeichen von C und (falls $C \geq 0$) Lage von x_0 bezüglich $\pm\sqrt{C}$ ergibt sich der Definitionsbereich.

(c) Haben wir alle Lösungen gefunden?

Ja, denn nach Teil (2) des Satzes hat das AWP für beliebige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung. Da wir diese eben angegeben haben, gibt es keine anderen Lösungen. (Jede Lösung der DGL ist auch Lösung eines AWP: nimm ein beliebiges x_0 im Definitionsbereich und setze $y_0 = y(x_0)$.)

Am besten versteht man das, wenn man alle Lösungen in ein Diagramm einträgt.

$$(3) y' = \sqrt{y}.$$

Hierbei ist nur $y \geq 0$ zugelassen, also $I = \mathbb{R}$, $J = [0, \infty)$ in Satz 5.2.1.

▷ Die konstante Nullfunktion $y \equiv 0$ ist offensichtlich eine Lösung.

▷ Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \stackrel{y \neq 0}{\iff} \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int dx \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = x + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x + C)^2$$

Probe:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (x + C) = \frac{1}{2} \cdot (x + C)$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}|x + C|$$

Das heißt: $y = \frac{1}{4} \cdot (x + C)^2$ ist nur für $x + C \geq 0$ eine Lösung!

Wo lag der Fehler? Nach dem Satz ist jede differenzierbare Funktion $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$, für die ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $2\sqrt{y(x)} = x + C$ für alle $x \in I'$, eine Lösung der DGL. Da die Wurzel immer ≥ 0 ist, kann eine solche Lösung nur für $x + C \geq 0$ definiert sein. Diese Bedingung ging beim Quadrieren verloren.

Wir fragen trotzdem, ob sich die Funktion $y : [-C, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer Lösung auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt.

Wie könnte so eine Fortsetzung aussehen? Aus der Gleichung $y' = \sqrt{y}$ können wir ablesen, dass $y' \geq 0$ ist, das heißt jede Lösung y ist monoton wachsend. Da $y(-C) = 0$ ist und immer $y \geq 0$ sein muss, wäre

$$y_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (x + C)^2 & \text{falls } x \geq -C \\ 0 & \text{falls } x \leq -C \end{cases}$$

die einzig mögliche Fortsetzung. Prüfen wir nach, ob das eine Lösung ist:

▷ y_C ist differenzierbar: Das ist klar bei allen $x \neq -C$, und bei $x = -C$ ist sowohl die rechts- als auch die linksseitige Ableitung gleich Null, also ist y_C auch dort differenzierbar.

▷ y_C erfüllt die DGL: Bei allen $x \neq -C$ haben wir das schon geprüft, und bei $x = -C$ ist $y'_C(-C) = 0 = \sqrt{y_C(-C)}$.

Also ist y_C tatsächlich eine Lösung. Es ergeben sich somit die folgenden Lösungen:

▷ $y \equiv 0$.

▷ $y_C, C \in \mathbb{R}$.

Insbesondere hat das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen, nämlich jedes y_C mit $C < 0$, und auch $y \equiv 0$.

Dies widerspricht nicht Satz 5.2.1(2), da $b(y) = \sqrt{y}$ bei $y = 0$ nicht differenzierbar ist. (Teil (1) ist anwendbar, da b stetig bei 0 ist.)

Siehe Übung ?? für die Frage der Eindeutigkeit.

$$(4) y' = \frac{1}{1 + e^y}.$$

Separation der Variablen: $\int (1 + e^y) dy = \int dx$, also $y + e^y = x + C$.

Dies lässt sich nicht explizit nach y auflösen. Aber die Gleichung definiert für jedes $C \in \mathbb{R}$ eindeutig eine Funktion y auf \mathbb{R} . (Vgl. Beispiel (2) im Abschnitt »Implizit definierte Funktionen«.)

5.3 Der Ursprung von Differentialgleichungen

Woher kommen Differentialgleichungen? Meistens steht die Beobachtung von gewissen Naturgesetzen am Anfang. Oft lassen sich diese Gesetze in Formeln fassen, das heißt mathematisch modellieren. Diese Formeln sind häufig Differentialgleichungen oder lassen sich zumindest durch Differentialgleichungen annähern. Um konkrete, sowohl qualitative als auch quantitative, Voraussagen über die so modellierten Prozesse machen zu können, müssen wir Lösungen für die gefundenen Gleichungen finden. Wir geben zwei Beispiele.

5.3.1 Ungebremstes Wachstum

Ein einfaches Beispiel ist eine idealisierte Population in einer idealisierten Umgebung, d.h. kein Lebewesen stirbt jemals und jedes Lebewesen bekommt pro Zeiteinheit eine konstante Anzahl von Nachkommen. Formal:

$y(t)$ = Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt t

a = Vermehrungsrate = Anzahl der Nachkommen pro Individuum pro Zeiteinheit (1)

Falls nur zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{Z}$ Nachkommen produziert werden, folgt

$$y(t+1) = y(t) + a \cdot y(t)$$

Das heißt, zum Zeitpunkt $t+1$ gibt es soviele Individuen wie vorher ($y(t)$) plus die Anzahl der Nachkommen, die jedes Individuum bekommen hat ($a \cdot y(t)$). Die folgende Schreibweise wird uns gleich nützlicher sein:

$$y(t+1) - y(t) = a \cdot y(t)$$

Realistischer ist es jedoch, anzunehmen, dass zu beliebigen Zeiten $t \in \mathbb{R}$ (nicht bloß $t \in \mathbb{Z}$) Nachkommen produziert werden, und zwar in etwa gleichmäßig verteilt. Also werden es z.B. in einem Zeitintervall der Länge $\frac{1}{2}$ nur halb so viele Nachkommen geben wie in einem Zeitintervall der Länge 1. Allgemeiner für kleine h :

$$y(t+h) - y(t) = h \cdot a \cdot y(t) \quad \text{also:} \quad \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = a \cdot y(t)$$

Zumindest für große Populationen ist dies auch für sehr kleine h sinnvoll, daher nähern wir diese Gleichung durch ihren Grenzfalle für $h \rightarrow 0$ an und erhalten die Differentialgleichung

$$y'(t) = a \cdot y(t)$$

(Man merkt hier schon, dass allerhand Fragen auftauchen, z.B. ob dieses Modell, d.h. im Wesentlichen dieser Grenzübergang, gerechtfertigt ist. Dies ist Thema der Kunst der ›Modellierung‹. Das Modell beschreibt jedoch viele Populationen in gewissen Grenzen erstaunlich gut.)

Als Lösung kennen wir schon $y(t) = Ce^{at}$, also exponentielles Wachstum. Ist y_0 die Population zum Zeitpunkt $t = 0$, folgt $y_0 = y(0) = Ce^0 = C$. Die Lösung ist also

$$y(t) = y_0 e^{at}$$

Dies zeigt schon die Grenzen des Modells: Wegen $y(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ kann dies nicht die korrekte Lösung für große t sein, d.h. das Modell (also die Differentialgleichung) muss modifiziert werden.

5.3.2 Ausfließen einer Flüssigkeit

Ein etwas komplizierteres Beispiel ist das Ausfließen von Flüssigkeiten aus einem Behälter. Hier – wie in den meisten physikalischen Prozessen – ergibt sich direkt eine Differentialgleichung, ohne weitere Approximationen. Wir idealisieren die Situation wieder und nehmen an, es handele sich um eine perfekt homogene Flüssigkeit, bei der auch keine Wirbel beim Ausfließen aus dem Loch entstehen.

Gesucht ist die Wasserstandshöhe $h(t)$ als Funktion von der Zeit t . Das sogenannte **Gesetz von Torricelli** besagt, dass die Ausflussgeschwindigkeit immer proportional zur Wurzel von h ist. Außerdem ist sie proportional zur Abnahme­geschwindigkeit der Höhe des Flüssigkeitsspiegels (wir nehmen an, dass der Behälter zylindrisch ist). Zusammengefasst, mit v als die Ausflussgeschwindigkeit ergibt sich:

$$v \sim \sqrt{h}$$

$$v \sim h'$$

Damit folgt:

$$h' \sim \sqrt{h} \quad \text{das heißt: } h' = -a \cdot \sqrt{h} \quad \text{mit } a > 0 \text{ konstant}$$

Wir wählen $-a$ als Proportionalitätsfaktor, weil bei positiver Ausflussgeschwindigkeit der Flüssigkeitsspiegel absinkt. Die Größe a kann dabei aus dem Behälterquerschnitt, dem Lochquerschnitt und der Erdbeschleunigung bestimmt werden.

Wir vereinfachen die Gleichung etwas und betrachten stattdessen die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y}$$

Die Gleichung für h lässt sich einfach auf diese zurückführen: Wie das gehen sollte, sehen wir am besten, indem wir $h' = \frac{dh}{dt}$ schreiben. Teilen wir die Gleichung $\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{h}$ durch $-a$ und ziehen die Konstante $-a$ formal in das dt , ergibt sich $\frac{dh}{a(-at)} = \sqrt{h}$. Dies zeigt, dass wir die neue Variable $x = -at$ einführen und $y(x) = h(t) = h(-\frac{x}{a})$ setzen sollten. Damit ergibt sich dann tatsächlich

$$y'(x) = -\frac{1}{a}h'(-\frac{x}{a}) = -\frac{1}{a}(-a)\sqrt{h(-\frac{x}{a})} = \sqrt{y(x)}$$

Verwenden wir die oben hergeleiteten Lösungen, erhalten wir:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (-a \cdot t + C)^2 & \text{falls } t \leq \frac{C}{a} \\ 0 & \text{falls } t \geq \frac{C}{a} \end{cases}$$

C lässt sich dabei aus dem Anfangswert $h(0) = h_0 > 0$ zu $C = 2\sqrt{h_0}$ bestimmen.

Ergebnis: Der Behälter ist nach der Zeit $\frac{2\sqrt{h_0}}{a}$ leer. Danach bleibt h konstant gleich Null.

(Das letzte Ergebnis ist nicht überraschend, war aber in der mathematischen Herleitung nicht offensichtlich.)

6 Geometrie von Differentialgleichungen: Kurven und Vektorfelder

In diesem Kapitel führen wir Kurven und Vektorfelder ein und sehen, wie eine einfache Fragestellung über sie zu Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung führt.

6.1 Kurven

Unter einer Kurve stellen wir uns eine möglicherweise gekrümmte Linie vor, die wir mit einem Stift durchgehend zeichnen können. Die folgende Definition schließt direkt an diese Vorstellung an.

6.1.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Eine **parametrisierte Kurve** in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Eine **unparametrisierte Kurve** in \mathbb{R}^n ist das Bild $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ einer parametrisierten Kurve.

Die Menge $\gamma(I)$ heißt der **Orbit** von γ .

Für jedes $t \in I$ ist $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$, daher können wir $\gamma(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ für gewisse $y_i(t) \in \mathbb{R}$ schreiben.¹ Dies definiert Funktionen $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$, die **Komponenten** von γ .

Im Fall $n = 2$ schreiben wir oft $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Beispiele: (Immer $I = \mathbb{R}$, $n = 2$).

- (1) $\gamma(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Der Orbit ist eine Gerade durch den Nullpunkt mit Steigung 2.
- (2) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ der Einheitskreis um den Nullpunkt, unendlich oft durchlaufen. Siehe Abb. 6.2.
- (3) Der Graph einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, ist die Menge $\{(x, f(x)) : x \in I\}$. Er ist eine unparametrisierte Kurve und kann mittels

$$t \mapsto (t, f(t))$$

parametrisiert werden. Man nennt dies eine **Parametrisierung als Graph**.

Andererseits können wir f selbst als Kurve in \mathbb{R} auffassen, sein Orbit ist einfach ein Intervall und damit recht uninteressant.

Vorstellung: Man betrachtet $t \in I$ als Zeitpunkte. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschreibt den Weg eines Objekts (Teilchen, Bus) im Zeitintervall I , *inklusive Fahrplan* (d.h. wann ist der Bus wo?). Der Orbit von γ ist nur der Weg, ohne Fahrplan.

Manchmal gibt es Fahrplanänderungen:

¹Häufig schreibt man auch $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ oder $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Die Wahl des Buchstaben y ist durch die spätere Anwendung bei Differentialgleichungen motiviert.

6.1.2 Definition

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $\varphi : J \rightarrow I$ stetig und bijektiv. Für eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die parametrisierte Kurve $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ eine **Umparametrisierung** von γ .

Es ist also $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$ für $s \in J$. Offensichtlich haben γ und $\tilde{\gamma}$ denselben Orbit, sie durchlaufen ihn nur mit unterschiedlichen Zeitplänen.

Es vermeidet Verwirrung, wenn man für Variablen in I und J verschiedene Buchstaben verwendet, z.B. $t \in I, s \in J$. Damit ordnet φ jedem Zeitpunkt $s \in J$ den Zeitpunkt $t = \varphi(s) \in I$ zu, und wenn s, t in dieser Beziehung stehen, gilt $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$.

Beispiel: $\tilde{\gamma}(s) = (5s, 10s)$, $s \in \mathbb{R}$. Dies ist eine Umparametrisierung von $\gamma(t) = (t, 2t)$ im Beispiel (1) oben. Hierbei ist $\varphi(s) = 5s$. $\tilde{\gamma}$ durchläuft dieselbe Gerade wie γ , nur fünf mal so schnell.

Bemerkungen: (1) Der Begriff ›Kurve‹ kann eine parametrisierte oder eine unparametrisierte Kurve bezeichnen. Im ersten Fall also eine Abbildung, im zweiten eine Menge. Was gemeint ist, muss man dem Kontext entnehmen. Statt unparametrisierter Kurve sagt man auch **Weg**, **Trajektorie** oder **Spur**. In diesem Buch bezeichnet ›Kurve‹ stets eine parametrisierte Kurve, wenn nicht explizit anders angegeben.

(2) Der Orbit einer Kurve kann ein Punkt sein (wenn γ konstant ist). Überraschender ist, dass er auch eine ganze Fläche ausfüllen kann (sogenannte flächenfüllende Kurve, z.B. die sogenannte Hilbert-Kurve). Das kann aber für differenzierbare Kurven (s. unten) nicht passieren.

Die folgende Definition ist physikalisch motiviert. Bewegt sich ein Objekt vom Ort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ nach $x_1 \in \mathbb{R}^3$ in der Zeit s , so nennt man den Quotienten $\frac{\text{Deplatzierung}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{x_1 - x_0}{s}$ seine mittlere Geschwindigkeit. Dies ist ein Vektor in \mathbb{R}^3 .

6.1.3 Definition (Ableitung einer Kurve)

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurve. Für $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \neq t_1$ heißt

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** zwischen t_0 und t_1 . Falls der Grenzwert

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$$

existiert, so heißt $\gamma'(t_0)$ **Momentangeschwindigkeit(-svektor)** oder **Ableitung** von γ zum Zeitpunkt t_0 , und γ **differenzierbar** in t_0 .

γ heißt **stetig differenzierbar**, wenn es in jedem $t_0 \in I$ differenzierbar und $\gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist.

Abbildung 6.1 zeigt, dass der Vektor $\gamma'(t_0)$ tangential an die Kurve γ (genauer: ihren Orbit) im Punkt $\gamma(t_0)$ ist.

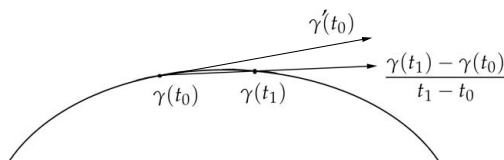


Abbildung 6.1. Mittlerer und momentaner Geschwindigkeitsvektor

Im Fall $n = 1$ ist das offensichtlich die alte Definition der Ableitung, und in höheren Dimensionen können wir die Ableitung so berechnen, wie wir es uns erhoffen würden:

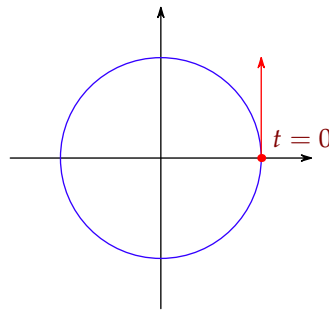


Abbildung 6.2. Der Einheitskreis

6.1.4 Proposition

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$.

γ ist differenzierbar in $t \in I$ genau dann, wenn jedes $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ in t differenzierbar ist ($i = 1, \dots, n$), und in diesem Fall ist

$$\gamma'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t))$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t)}{t_1 - t} &= \frac{(y_1(t_1), \dots, y_n(t_1)) - (y_1(t), \dots, y_n(t))}{t_1 - t} \\ &= \frac{(y_1(t_1) - y_1(t), \dots, y_n(t_1) - y_n(t))}{t_1 - t} \\ &= \left(\frac{y_1(t_1) - y_1(t)}{t_1 - t}, \dots, \frac{y_n(t_1) - y_n(t)}{t_1 - t} \right) \end{aligned}$$

daher folgt der Satz direkt aus Lemma 1.2.4 und der Definition der Ableitung für Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Beispiele:

(1) $\gamma(t) = (t, 2t)$, dann $\gamma'(t) = (1, 2)$ für alle t . Die Gerade wird mit konstantem Geschwindigkeitsvektor durchlaufen.

(2) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, dann $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, z.B. $\gamma'(0) = (0, 1)$. Siehe Abb. 6.2.

Schreiben wir $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, so ist $\gamma'(t) = (-y'(t), x'(t))$, das ist der um 90 Grad gedrehte Vektor $(x'(t), y'(t))$. Dies entspricht der Tatsache, dass die Tangente an einen Kreis immer senkrecht zum Radius steht (und der Kreis gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird).

(3) $\gamma(t) = (t, f(t))$, die Parametrisierung des Graphen von f . Dann ist $\gamma'(t) = (1, f'(t))$.

Die Steigung von $\gamma'(t)$ ist $f'(t)/1 = f'(t)$, wie erwartet.

Welche Kurven in \mathbb{R}^2 sind Graphen einer (differenzierbaren) Funktion? *

Anschaulich gesprochen hat der Graph einer differenzierbaren Funktion keine ‚Ecken‘. Hat der Orbit einer differenzierbaren Kurve auch keine ‚Ecken‘?

Das ist falsch!

Beispiel: $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, die Neilsche Parabel.

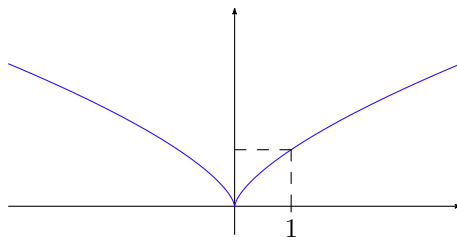


Abbildung 6.3. Neilsche Parabel

Der Orbit ist genau der Graph der Funktion

$$f(x) = |x|^{2/3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Wie kommt man darauf? Setze $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$ und finde eine Relation zwischen $x(t)$ und $y(t)$, in der t nicht vorkommt: $y(t) = x(t)^{2/3}$. Dies gilt jedenfalls für $t > 0$. Schauen wir genauer hin, sehen wir, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $y(t) = |x(t)|^{2/3}$.

Damit ist der Orbit Teil des Graphen von f . Er ist sogar der ganze Graph, da die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t) = t^3$ surjektiv ist, also jeder x -Wert vorkommt.

Die Funktion f ist offenbar in $x = 0$ nicht differenzierbar², die Kurve $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ ist aber im entsprechenden Punkt $t = 0$ differenzierbar. Wie passt das zusammen?

Aus $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ sehen wir $\gamma'(0) = (0, 0)$. Also bleibt γ zum Zeitpunkt $t = 0$ für einen Moment stehen. Danach läuft es in entgegengesetzter Richtung weiter.

Wir fragen nun allgemeiner, wie man einer Kurve ansehen kann, ob ihr Orbit als Graph einer Funktion darstellbar ist, und ob diese Funktion differenzierbar ist.

Wir schreiben $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, um Funktionen X, Y von Punkten x, y zu unterscheiden.

6.1.5 Satz

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ eine Kurve.

- (1) Sei X injektiv. Dann ist der Orbit von γ gleich dem Graphen der stetigen Funktion

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = Y \circ X^{-1}$$

wobei $J = X(I)$ und $X^{-1} : J \rightarrow I$ die Umkehrabbildung von $X : I \rightarrow J$ ist.

- (2) Sei γ stetig differenzierbar, und es gelte

$$X'(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann ist X injektiv und die Funktion f aus (1) ist stetig differenzierbar. Für $t \in I$, $x = X(t)$ gilt

$$f'(x) = \frac{Y'(t)}{X'(t)}$$

Praktisch: Um $f(x)$ zu bestimmen, löst man die Gleichung $X(t) = x$ nach t auf – das ergibt $t = X^{-1}(x)$ – und setzt dann dieses t in $Y(t)$ ein: $f(x) = Y(X^{-1}(x))$.

Die Formel für die Ableitung von f kann man sich am einfachsten so merken:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY/dt}{dX/dt}$$

²Genauer wird die Tangente an den Orbit vertikal bei $t = 0$, denn $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$ für $x > 0$.

Beweis: (1) Sei $J = X(I)$. Ist $X : I \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv, so ist X als Abbildung $I \rightarrow J$ bijektiv und damit ist die Umkehrabbildung $X^{-1} : J \rightarrow I$ definiert und stetig.

Liegt (x, y) auf dem Orbit von γ , so ist $x = X(t), y = Y(t)$ für ein $t \in I$. Dann folgt $t = X^{-1}(x)$ und daher $y = Y(t) = Y(X^{-1}(x)) = f(x)$ für $f := Y \circ X^{-1}$. Also gilt $\text{Orbit}(\gamma) \subset \text{Graph}(f)$.

Ist umgekehrt $(x, y) \in \text{Graph}(f)$ mit dem angegebenen f , so ist $y = f(x) = Y(X^{-1}(x))$, also gilt für $t = X^{-1}(x)$, dass $y = Y(t), x = X(t)$. Also ist $\text{Graph}(f) \subset \text{Orbit}(\gamma)$.

(2) X kann auf I das Vorzeichen nicht wechseln. Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz, da I ein Intervall ist, $X'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ und X' stetig ist.

Daher ist X streng monoton auf I und damit injektiv. Wir können also $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (1) wählen.

Sei $t \in I$. Wegen $X'(t) \neq 0$ folgt aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass X^{-1} bei $x = X(t)$ differenzierbar ist mit $(X^{-1})'(x) = 1/X'(t)$. Die Kettenregel ergibt nun $f'(x) = Y'(X^{-1}(x))(X^{-1})'(x) = \frac{Y'(t)}{X'(t)}$. Da X', Y' und X^{-1} stetig sind, ist auch f' stetig.

Ist der Orbit kein Graph, so kann er in vielen Fällen in Teile aufgeteilt werden, die Graphen sind. Zum Beispiel ist folgender Orbit die Vereinigung der Graphen von drei Funktionen:

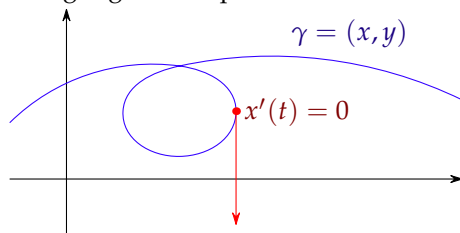


Abbildung 6.4

Beispiele:

(1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$.

$X(t) = \cos t$ ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend und daher injektiv, mit Bildmenge $[-1, 1]$. Also ist der Orbit von γ Graph einer Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnung von f : Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist \arccos . Für $x \in [-1, 1]$, $x = \cos t$ ist also

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin t \\ &= \sin(\arccos x) \\ &= \sqrt{1 - [\cos(\arccos x)]^2} \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Hierbei ist die Wurzel positiv zu nehmen, da $\sin t \geq 0$ für $t \in [0, \pi]$ ist.

Die Ableitung $X'(t) = -\sin t \neq 0$ für alle $t \in (0, \pi)$, verschwindet aber bei $t = 0, \pi$. Dem entspricht die vertikale Tangente an den Graph von f in den Punkten $x = \pm 1$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) Die Zykloide: Markiere einen Punkt auf einem Fahrradreifen. Welche Kurve beschreibt der Punkt, wenn das Fahrrad in einer geraden Linie fährt?

Der Einfachheit halber seien Radius des Rades und Geschwindigkeit gleich 1. Das Rad rolle entlang der x -Achse nach rechts, zum Zeitpunkt $t = 0$ berühre es die x -Achse im Nullpunkt, und der markierte Punkt sei bei $t = 0$ gleich dem Berührungspunkt.

Der Mittelpunkt des Rades beschreibt die Kurve $m(t) = (t, 1)$, da er konstante Höhe 1 hat und sich mit Geschwindigkeit 1 nach rechts bewegt. Bis zur Zeit $t > 0$ hat sich der Kreisbogen vom markierten zum momentanen Berührungspunkt auf das Intervall $[0, t]$ der x -Achse abgerollt, also ist seine Länge gleich t . Nach Definition des Bogenmaßes folgt für den Ort des markierten Punktes zur Zeit t :

$$\gamma(t) = m(t) - (\sin t, \cos t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

Also $X(t) = t - \sin(t)$, und wegen $X'(t) = 1 - \cos t > 0$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ (einer diskreten Menge) ist X auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend. Offenbar ist $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$, also ist die Zykloide Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ stetig differenzierbar ist. Eine Formel für f lässt sich nicht angeben, da man zur Bestimmung von X^{-1} die Gleichung $t - \sin t = x$ nach t auflösen müsste. Dafür existiert keine geschlossene Formel. Es ist

$$f'(x) = \frac{Y'(t)}{X'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad \text{falls } x = X(t),$$

dies ist aber auch nur eine »unvollständige« (implizite) Formel für f' , da ja t nicht explizit aus x bestimmt werden kann.

Trotzdem ist diese Formel nützlich, zum Beispiel zeigt sie, auf welchen (Zeit-)Intervallen f monoton wächst oder fällt.

- Bemerkung:** (1) Die Bedingungen in Satz 6.1.5 sind hinreichend, aber nicht notwendig. Statt der Mengengleichheit $\text{Orbit}(\gamma) = \text{Graph}(f)$ könnten wir die stärkere Forderung stellen, dass γ als Graph umparametrisiert werden kann. Dann ist die Bedingung in Teil (1) des Satzes notwendig, und auch die in Teil (2), wenn wir fordern, dass die Umparametrisierung differenzierbar ist. Siehe Übung ??.
- (2) Teil (2) des Satzes gilt auch, wenn γ bloß differenzierbar ist (dann ist f auch bloß differenzierbar). Dann es gilt der *Zwischenwertsatz für die Ableitung*: Ist $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x_0) < 0$, $f'(x_1) > 0$ für $x_0, x_1 \in J$, so gibt es ein ξ zwischen x_0 und x_1 mit $f'(\xi) = 0$. Beachte, dass f' nicht stetig sein muss. Siehe Analysis I.

6.2 Vektorfelder und ihre Integralkurven

6.2.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld** auf U .

Man stellt sich Vektorfelder wie folgt vor: An jedem Punkt $p \in U$ ist ein Vektor (Pfeil) $V(p)$ angeklebt. Vektorfelder treten zum Beispiel bei der Beschreibung von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen auf: $V(p)$ ist der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens am Ort p . Hierbei ist an eine Momentaufnahme gedacht, d. h. man sieht sich alle Orte p zum selben Zeitpunkt an. Hängt das resultierende Vektorfeld nicht vom Zeitpunkt ab, so spricht man von einer **stationären Strömung**. Ändert es sich mit der Zeit, dann spricht man von einem **zeitabhängigen Vektorfeld**, das mathematisch durch eine Abbildung $I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $I \subset \mathbb{R}$ (Zeit), $U \subset \mathbb{R}^n$ (Ort) zu beschreiben ist.

Beispiele: ($n = 2$, schreibe $p = (x, y)$).

- (1) Konstante Vektorfelder, z. B. $V(x, y) = (1, 2)$.

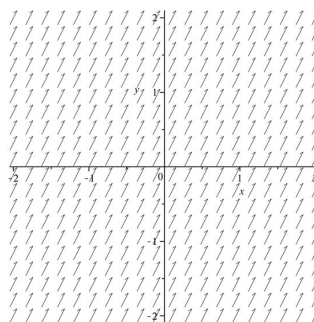


Abbildung 6.5

(2) Radiales Vektorfeld $V(x, y) = (x, y)$.

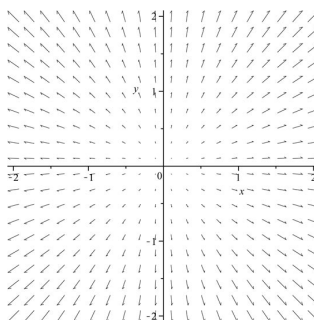


Abbildung 6.6

(3) $V(x, y) = (-y, x)$; zum Skizzieren ist es nützlich, zu bemerken, dass $(x, y) \cdot (-y, x) = x(-y) + yx = 0$ (Skalarprodukt), das heißt, dass $V(x, y)$ immer senkrecht auf (x, y) steht.

Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob es zu einem gegebenen Vektorfeld V Kurven gibt, die in jedem ihrer Punkte p genau $V(p)$ als Geschwindigkeitsvektor haben. Solche Kurven heißen Integralkurven von V .

Physikalische Bedeutung: Ist V das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen auf Integralkurven.

6.2.2 Definition

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Integralkurve** des Vektorfeldes $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, falls $\gamma(t) \in U$ und $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung: Das Bestimmen der Integralkurven von (explizit gegebenen) Vektorfeldern ist eines der grundlegenden Probleme der Physik. Will man zum Beispiel den Lauf der Planeten oder die komplizierte Bewegung eines Kreisels oder den Flug einer Kanonenkugel (alles historisch wichtige Beispiele) beschreiben, oder auch das Wetter vorhersagen, so muss man im Wesentlichen Integralkurven von Vektorfeldern bestimmen.

Wie findet man Integralkurven? In einigen Fällen kann man raten (Bild scharf anschauen):

Beispiele:

(1) $V(x, y) = (1, 2)$ hat die Integralkurven $\gamma(t) = p_0 + t(1, 2)$ für beliebiges $p_0 \in \mathbb{R}^2$.

(2) $V(x, y) = (-y, x)$. Die Gleichung $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ lautet ausgeschrieben für $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$(x'(t), y'(t)) = (-y(t), x(t))$$

Wir hatten bereits in Beispiel 2 nach Proposition 6.1.4 eine Lösung gesehen: $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Allgemeiner ist $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ für jedes $r \geq 0$ eine Lösung. Diese beschreibt einen Kreis vom Radius r um den Nullpunkt, der mit konstanter Absolutgeschwindigkeit r durchlaufen wird.

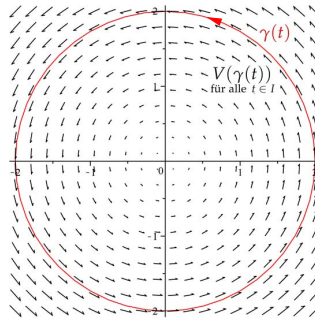


Abbildung 6.7

Bemerkung: Es gibt im Allgemeinen unendlich viele Integalkurven, durch jeden Anfangspunkt eine (im Beispiel für jedes $r \geq 0$ eine, und man könnte diese noch umparametrisieren, indem man t durch $t + a$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ ersetzt). Dies werden wir später allgemein unter gewissen Bedingungen an V beweisen, siehe Satz 8.4.2.

6.2.1 Vektorfelder und Differentialgleichungssysteme

Im Beispiel $V(x, y) = (-y, x)$ sahen wir, dass eine Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ genau dann eine Integalkurve ist, wenn $(x'(t), y'(t)) = (-y(t), x(t))$ für alle t gilt. Schreiben wir dies aus und lassen das Argument t der Kürze halber weg, erhalten wir

$$x' = -y, \quad y' = x$$

Dies ist ein System von zwei Differentialgleichungen für die zwei unbekannten Funktionen x und y .

Allgemein hat ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= F_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

für n unbekannte Funktionen y_1, \dots, y_n und n gegebene Ausdrücke F_1, \dots, F_n . Es erleichtert den Überblick, wenn wir hierfür eine kompakte Notation einführen: Wir schreiben

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad F(t, y) = \begin{pmatrix} F_1(t, y) \\ \vdots \\ F_n(t, y) \end{pmatrix}$$

6.2.3 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Die Gleichung

$$y' = F(t, y) \quad (*)$$

heißt **System von n Differentialgleichungen erster Ordnung**. Eine differenzierbare Kurve

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall})$$

heißt **Lösung** des Systems, falls für alle $t \in I$ gilt:

$$(t, y(t)) \in \Omega \quad \text{und} \quad y'(t) = F(t, y(t))$$

Das **Anfangswertproblem** für $(*)$ besteht darin, zu gegebenem $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine Lösung mit

$$y(t_0) = y_0$$

zu finden. $(*)$ heißt **autonom**, falls F nicht von t abhängt.

Bemerkung: Für ein autonomes System kann F als Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ (statt \mathbb{R}^{n+1}) aufgefasst werden.

Für die, die's formal etwas genauer mögen: $\triangleright F$ unabhängig von t bedeutet, dass erstens $\Omega = \mathbb{R} \times U$ für eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist, und zweitens, dass ein $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert mit $F(t, y) = \tilde{F}(y)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $y \in U$. Aus Faulheit, und um die Notation nicht zu überladen, schreibt man statt \tilde{F} oft einfach wieder F .

Autonome Systeme entsprechen genau Vektorfeldern in folgendem Sinn:

6.2.4 Proposition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Dann sind äquivalent:

- (i) y ist Lösung des autonomen Systems $y' = F(y)$.
- (ii) y ist eine Integralkurve des Vektorfelds F .

Beweis: Das folgt direkt aus der Definition. □

Nicht-autonome Systeme kann man durch einen Trick auf autonome Systeme zurückführen: Wir fassen t als zusätzliche unabhängige Variable auf. Wegen $\frac{dt}{dt} = 1$ ist $y' = F(t, y)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} t' &= 1 \\ y' &= F(t, y) \end{aligned}$$

Damit folgt:

6.2.5 Proposition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Dann sind äquivalent:

- (i) y ist Lösung des Systems $y' = F(t, y)$.
- (ii) Die Kurve $\gamma(t) = (t, y(t))$ in \mathbb{R}^{n+1} ist Integralkurve des Vektorfelds $V(t, y) = (1, F(t, y))$.

Im Fall $n = 1$ sagt dies, dass das Lösen einer Gleichung $y' = F(t, y)$ äquivalent zum Bestimmen der Integralkurven des zwei-dimensionalen Vektorfelds $(1, F(t, y))$ ist. Die Integralkurve γ ist dabei eine Parametrisierung des Graphs der Funktion $t \mapsto y(t)$.

Wir fassen zusammen:

Die Integralkurven eines n -dimensionalen Vektorfeldes bestimmen



Ein autonomes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung lösen

sowie

Die Integralkurven eines $(n + 1)$ -dimensionalen Vektorfeldes mit erster Komponente 1 bestimmen



Ein nicht-autonomes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung lösen

7 Lineare Differentialgleichungen

Bisher können wir Differentialgleichungen nur durch Separation der Variablen lösen. Jedoch lassen sich die Variablen selbst in so einfachen Gleichungen wie

$$y' = x^2 + y$$

nicht separieren. Diese Gleichung hat aber eine andere besondere Eigenschaft: sie ist linear. In diesem Kapitel werden Sie lernen, was dies genau bedeutet und warum es uns erlaubt, sie explizit zu lösen.

Lineare Differentialgleichungen haben bessere Eigenschaften als allgemeine Differentialgleichungen. Zum Beispiel sind die Lösungen auf dem ganzen Definitionsbereich der Gleichung definiert, die Lösungen bilden einen (affinen) Unterraum des Funktionenraums, dessen Dimension gleich der Ordnung der Gleichung ist, und sowohl für die allgemeine lineare Gleichung erster Ordnung als auch für lineare Gleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten (also autonome lineare Gleichungen) gibt es explizite Lösungsverfahren.

In diesem Kapitel werden Grundkenntnisse der Linearen Algebra verwendet. Einige davon werden in Abschnitt 7.3 wiederholt.

7.1 Die lineare Gleichung erster Ordnung

Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$y' = ay + b$$

mit stetigen Funktionen a, b . Diese lässt sich mit Hilfe eines einfachen Tricks immer mit Hilfe von höchstens zwei Integrationen auflösen.

Der einfachste Fall ist die Gleichung $y' = b$, deren Lösung $y = \int b$ ist. Der allgemeine Fall lässt sich darauf zurückführen, mit Hilfe folgender einfacher aber fundamentaler Rechnung.

7.1.1 Lemma

Seien A und y differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$z = e^{-A}y \implies z' = e^{-A}(y' - ay), \quad \text{wobei } a = A'$$

Beweis: Einfach Ketten- und Produktregel anwenden:

$$z' = (e^{-A}y)' = (-e^{-A}A')y + e^{-A}y' = e^{-A}(-A'y + y') = e^{-A}(y' - ay). \quad \square$$

Um die Gleichung $y' = ay + b$ zu lösen, subtrahieren wir ay , finden A mit $A' = a$, multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit e^{-A} und wenden das Lemma an:

$$y' = ay + b \iff e^{-A}(y' - ay) = e^{-A}b \iff z' = e^{-A}b \quad \text{mit } z = e^{-A}y.$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung $z = \int e^{-A}b$. Mit $y = e^A z$ folgt der erste Teil des folgenden Satzes.

7.1.2 Satz

Seien $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und A eine Stammfunktion von a .

(1) Die allgemeine Lösung der Gleichung $y' = ay + b$ ist

$$y = e^A \int e^{-A} b$$

(2) Das Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0$ hat eine eindeutige Lösung für alle $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Teil (1) lässt sich auch so formulieren: Sei c eine Stammfunktion von $e^{-A}b$. Dann ist die allgemeine Lösung der Gleichung $y' = ay + b$ gegeben durch

$$(*) \quad y(x) = e^{A(x)} (c(x) + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

Beweis: Wir müssen nur noch Teil (2) beweisen. Mit der Umformulierung ist $y(x_0) = y_0$ äquivalent zu $y_0 = e^{A(x_0)} (c(x_0) + C)$. Dies lässt sich eindeutig nach C auflösen: $C = e^{-A(x_0)} y_0 - c(x_0)$. \square

Beispiel: $y' = x^2 + y$. Hier ist $a(x) = 1$ und $b(x) = x^2$. Eine Stammfunktion von a ist $A(x) = x$. Also ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y &= e^x \int e^{-x} x^2 dx = \dots = e^x (e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + C) \\ &= -x^2 - 2x - 2 + Ce^x \end{aligned}$$

wobei bei den Punkten zweimal partiell integriert wird.

7.2 Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen**7.2.1 Definition**

Eine Differentialgleichung, die sich in der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

mit $n \in \mathbb{N}$ schreiben lässt, heißt **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung**.

Hierbei sind $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Die Funktionen a_k heißen **Koeffizienten**, die Funktion b die **Inhomogenität** der Gleichung.

Ist $b \equiv 0$, so heißt die lineare Gleichung **homogen**.

Der Grund für diese Bezeichnung ist folgender. Zur Erinnerung: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so bezeichnet $C^0(I)$ die Menge der stetigen und $C^n(I)$ die Menge der n mal stetig differenzierbaren Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$). Dies sind Vektorräume.

7.2.2 Lemma

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann ist

$$P : C^n(I) \rightarrow C^0(I), \quad P(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

eine lineare Abbildung.

Beweis: Da die a_k stetig sind und $y \in C^n(I) \Rightarrow y^{(k)} \in C^{n-k}(I) \subset C^0(I)$ gilt, bildet P in der Tat $C^n(I)$ nach $C^0(I)$ ab.

Linearität von P bedeutet $P(y+z) = P(y) + P(z)$ und $P(cy) = cP(y)$ für alle $y, z \in C^n(I)$ und $c \in \mathbb{R}$. Diese Identitäten sind leicht nachzuprüfen. (Übung) \square

Beispiele: (1) $y' = y$ und $y'' + xy = 0$ sind linear und homogen, $I = \mathbb{R}$.

(2) $y' = x^2 + y$ ist linear und inhomogen, $I = \mathbb{R}$.

(3) $xy' = 1$ ist äquivalent zu $y' - \frac{1}{x} = 0$. Je nachdem, ob man als Definitionsbereich $I = (0, \infty)$ oder $I = (-\infty, 0)$ wählt, erhält man zwei verschiedene lineare Gleichungen.

Dass $x = 0$ eine besondere Rolle spielt, sieht man an den Lösungen: $y = C \log x$ auf $(0, \infty)$ bzw. $y = C \log(-x)$ auf $(-\infty, 0)$. Diese sind bei $x = 0$ nicht definiert.

(4) Die Gleichung $y' = y^2$ ist nicht linear.

Bemerkungen: (1) Die in Definition 7.2.1 gegebene Form heißt die **Standardform** der Gleichung. Dabei ist der Koeffizient der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ gleich eins. Dies führt zu klaren Aussagen über die Lösungsmenge, wie wir sehen werden.

(2) Steht vor der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ ein Koeffizient a_n , so kann man die Gleichung durch a_n teilen und damit in die Standardform bringen. Hat a_n Nullstellen, muss man gegebenenfalls den Definitionsbereich verkleinern, wie in Beispiel (3) oben.

(3) Oft schreibt man die x -Abhängigkeit der a_k und von b hin, also z.B. $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, um daran zu erinnern, dass dies keine Konstanten sein müssen.

Eine fundamentale Beziehung zwischen homogenen und inhomogenen linearen Gleichungen ergibt sich aus folgendem Satz der linearen Algebra.

7.2.3 Satz (Beziehung zwischen homogenen und inhomogenen linearen Gleichungen)

Seien V, W Vektorräume, $P : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $b \in W$. Außerdem sei $y_{\text{inh}} \in V$ so, dass $P(y_{\text{inh}}) = b$. Dann gilt:

$$\{y : P(y) = b\} = \{y_{\text{inh}} + y_{\text{h}} : P(y_{\text{h}}) = 0\}$$

Man sagt:

$$\begin{aligned} &\text{Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung } P(y) = b \\ &= \\ &\text{eine spezielle Lösung } y_{\text{inh}} \text{ der inhomogenen Gleichung} \\ &+ \\ &\text{allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung } P(y_{\text{h}}) = 0 \end{aligned}$$

Der einfache Beweis sei Ihnen als Übung überlassen.

Die lineare Gleichung erster Ordnung hatten wir bereits mit Satz 7.1.2 gelöst. Wir leiten die Lösung erneut mit Hilfe von Satz 7.2.3 her.

Wir schreiben die Gleichung als $y' = ay + b$, oder $y' - ay = b$ in Standardform.

(1) Wir lösen die homogene Gleichung $y' - ay = 0$ durch Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = a(x)y \quad \stackrel{y \neq 0}{\iff} \quad \frac{dy}{y} = a(x) dx &\Leftrightarrow \log |y| = \int a(x) dx = A(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow |y| = e^{A(x)+C} = e^C e^{A(x)} = C' e^{A(x)} \end{aligned}$$

und mit denselben Überlegungen wie im Fall $y' = y$ erhalten wir

$$y_{\text{h}} = C e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

(2) Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir folgenden Ansatz:

$$y_{\text{inh}} = e^{A(x)}c(x)$$

für eine noch zu bestimmende Funktion c . Leiten wir $c = e^{-A}y_{\text{inh}}$ ab, erhalten wir mit Lemma 7.1.1

$$c' = e^{-A}(y'_{\text{inh}} - ay_{\text{inh}}) = e^{-A}b.$$

Damit¹ können wir für c eine beliebige Stammfunktion von $e^{-A}b$ wählen.

Insgesamt ergibt sich wieder die nach Satz 7.1.2 angegebene allgemeine Lösung (*), wobei $y_{\text{inh}} = e^{-A(x)}c(x)$ und $y_{\text{h}} = e^{-A(x)}C$ ist.

Bemerkungen: (1) Die angegebene Methode zur Konstruktion der inhomogenen Lösung heißt **Variation der Konstanten**: Man ersetzt die Konstante in der Lösung der homogenen Gleichung durch eine Funktion, leitet für diese eine Gleichung her, die man dann lösen kann. Diese Methode lässt sich auf Systeme erster Ordnung verallgemeinern, siehe Satz 8.5.17.

(2) Wir haben oben $e^{-A}c$ geschrieben. Natürlich ist dies dasselbe wie ce^{-A} . Jedoch werden wir später die Methode auf Systeme linearer Differentialgleichungen verallgemeinern, dann ist nur die Reihenfolge $e^{-A}c$ sinnvoll (und auch $e^{-A}C$ statt Ce^{-A}).

7.3 Der Vektorraum der Funktionen

Neben den reellwertigen betrachten wir im Folgenden auch komplexwertige Funktionen, vor allem aus folgendem Grund: Obwohl die meisten Differentialgleichungen reell sind (d. h. nur reelle Zahlen in ihnen vorkommen) und wir hauptsächlich an ihren reellwertigen Lösungen interessiert sind, ist es manchmal einfacher, zunächst die komplexwertigen Lösungen zu bestimmen und dann aus diesen die reellwertigen. Siehe Satz 7.5.3. Allerdings wird der *Definitionsbereich* der Funktionen immer eine Teilmenge von \mathbb{R} sein.

Um die Aussagen, die sowohl im Reellen als auch im Komplexen gelten, nicht doppelt formulieren zu müssen, verwenden wir folgende Notation:

Schreibweise:

- ▷ \mathbb{K} steht immer für \mathbb{R} oder \mathbb{C} .
- ▷ Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{F}(M, \mathbb{K}) = \{\text{Funktionen } M \rightarrow \mathbb{K}\}$.
- ▷ Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $C^n(I, \mathbb{K}) = \{n\text{-mal stetig differenzierbare Funktionen } I \rightarrow \mathbb{K}\}$ und $C^0(I, \mathbb{K}) = \{\text{stetige Funktionen } I \rightarrow \mathbb{K}\}$
- ▷ Statt $C^n(I, \mathbb{R})$ schreiben wir auch oft $C^n(I)$.

Wir wiederholen nun einige Grundbegriffe der Linearen Algebra im Kontext des \mathbb{K} -Vektorraums $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$.

¹Man hätte auch $e^A c$ in die Gleichung für y einsetzen können:

$$y' - ay = (e^A c)' - ae^A c = A' e^A c + e^A c' - ae^A c = ae^A c + e^A c' - ae^A c = e^A c'.$$

Damit dies gleich b ist, muss $e^A c' = b$, also $c' = e^{-A}b$ sein.

7.3.1 Definition

Seien $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$. Eine **\mathbb{K} -Linearkombination** von f_1, \dots, f_N ist eine Funktion der Form $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_N f_N$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{K}$.

Die Menge $\{f_1, \dots, f_N\}$ heißt **\mathbb{K} -linear unabhängig**, wenn gilt: Erfüllt eine Linearkombination die Gleichung

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_N f_N(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M,$$

so folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$.

Eine beliebige Menge S von Funktionen $M \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **\mathbb{K} -linear unabhängig**, wenn jede endliche Teilmenge von S \mathbb{K} -linear unabhängig ist.

Dies entspricht den allgemeinen Definitionen der Linearen Algebra, denn:

- ▷ Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ sind per Definition gleich genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt.
- ▷ Das Nullelement in $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ ist die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in M$.

Falls unwichtig oder aus dem Kontext klar ist, was \mathbb{K} ist, sagt man auch einfach Linearkombination statt \mathbb{K} -Linearkombination etc.

Bemerkung: Äquivalent zur linearen Unabhängigkeit von f_1, \dots, f_N ist:

Keine der Funktionen f_i läßt sich als Linearkombination der *übrigen* Funktionen f_j schreiben, d. h. für jedes i gilt: Es gibt *keine* $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{K}$ mit $\beta_i = 0$ und $f_i = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_N f_N$.

Beispiele:

- (1) Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind \mathbb{R} -linear unabhängig, denn:

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Setzen wir $x = 0$ ein, erhalten wir $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0$, also $\alpha_2 = 0$.

Setzen wir $x = \frac{\pi}{2}$ ein, erhalten wir $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$, also $\alpha_1 = 0$.

Damit folgt insgesamt: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

- (2) Betrachten wir $f_0, \dots, f_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_i(x) = x^i$ für $i = 0, \dots, N$. Auch diese Funktionen sind \mathbb{R} -linear unabhängig. Dies folgt direkt aus dem Identitätssatz für Polynome: Hat ein Polynom $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_N x^N$ für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert Null, so folgt $\alpha_0 = \dots = \alpha_N = 0$.

- (3) Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Sind die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \sin(x + \varphi)$ \mathbb{R} -linear unabhängig?

Nein, denn nach einem der Additionstheoreme für den Sinus gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + \varphi) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \quad \text{mit } \alpha_1 = \cos \varphi, \alpha_2 = \sin \varphi.$$

Also läßt sich $\sin(x + \varphi)$ als Linearkombination von $\sin x$ und $\cos x$ schreiben. Mit obiger Alternativcharakterisierung der linearen (Un-)Abhängigkeit folgt also die Behauptung.

- (4) Die Funktionen in den Beispielen (1), (2) lassen sich auch als Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auffassen, denn $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Dieselben Argumente zeigen, dass sie auch \mathbb{C} -linear unabhängig sind.

Allgemein gilt: \mathbb{C} -lineare Unabhängigkeit impliziert \mathbb{R} -lineare Unabhängigkeit, aber nicht umgekehrt.

Beispiel: Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = e^{ix}$ sind \mathbb{R} -linear unabhängig, aber \mathbb{C} -linear *abhängig*!

Die \mathbb{C} -lineare Abhängigkeit folgt aus der Eulerschen Identität:

$$e^{ix} = 1 \cdot \cos x + i \cdot \sin x$$

Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reell, und es gelte

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 e^{ix} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 0$ folgt $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Für $x = \frac{\pi}{2}$ folgt $\alpha_1 + i\alpha_3 = 0$. Da α_1, α_3 reell sind, folgt daraus $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ und damit auch $\alpha_2 = 0$.

Etwas genauer formuliert: $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ kann nicht nur als \mathbb{C} -Vektorraum, sondern auch als \mathbb{R} -Vektorraum aufgefasst werden (indem man Skalarmultiplikation nur mit reellen Zahlen erlaubt).

Dann sind f_1, f_2, f_3 im \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ linear abhängig, aber im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ linear unabhängig.

Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ immer als \mathbb{K} -Vektorraum.

7.3.2 Definition

Sei U ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$. Dann sei

$$\dim_{\mathbb{K}} U := \sup\{N \in \mathbb{N} : \text{es gibt } \mathbb{K}\text{-linear unabhängige } f_1, \dots, f_N \in U\}$$

die (\mathbb{K} -)Dimension von U .

Wenn \mathbb{K} aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch einfach $\dim U$. Es kann auch $\dim U = \infty$ sein. Dies bedeutet, dass es beliebig viele linear unabhängige Elemente gibt.

Beispiel: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Der Untervektorraum $\{f : f \text{ ist ein Polynom auf } \mathbb{R} \text{ mit } \deg f \leq n\}$ von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ hat die \mathbb{K} -Dimension $n + 1$, denn die Funktionen $1, x, \dots, x^n$ sind linear unabhängig und alle weiteren Polynome in dieser Menge lassen sich bereits als Linearkombinationen von diesen darstellen.

Die Menge aller Polynome auf \mathbb{R} (von beliebigem Grad) hat Dimension unendlich. Damit ist auch $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \infty$.

7.3.3 Definition

Es sei U ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ mit $\dim U < \infty$. Eine **Basis** von U ist eine $\dim U$ -elementige Menge von linear unabhängigen Elementen aus U .

Bemerkung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- ▷ $\{f_1, \dots, f_d\}$ ist eine Basis von U .
- ▷ f_1, \dots, f_d sind linear unabhängig und d ist maximal, d.h. es gibt kein f_{d+1} , so dass f_1, \dots, f_{d+1} linear unabhängig sind.
- ▷ $\{f_1, \dots, f_d\}$ ist ein Erzeugendensystem von U und d ist minimal, d.h. lässt man eines der f_i weg, bilden die übrigen kein Erzeugendensystem mehr.
- ▷ Jeder Vektor aus U lässt sich *eindeutig* als Linearkombination der f_i schreiben:

$$\forall v \in U \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{K}^d : v = \sum_{i=1}^d \alpha_i f_i$$

Für den Beweis von Satz 7.5.3, ein zentrales Ergebnis dieses Kapitels, brauchen wir folgende Aussage:

7.3.4 Satz (Polynomiell-exponentielle Funktionen)

Seien $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}_0$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Dann ist die Menge der Funktionen $\{f_{ij} : i = 1, \dots, k \text{ und } j = 0, \dots, N\}$ mit

$$f_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f_{ij}(x) = x^j e^{\lambda_i x}$$

\mathbb{C} -linear unabhängig.

Zum Beweis brauchen wir:

7.3.5 Lemma

Sei p ein Polynom und $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Dann ist

$$\frac{d}{dx} (p(x)e^{\mu x}) = \tilde{p}(x)e^{\mu x},$$

wobei \tilde{p} ein Polynom ist und $\deg \tilde{p} = \deg p$.

Beweis: Es gilt:

$$\frac{d}{dx} (p(x)e^{\mu x}) = p'(x)e^{\mu x} + \mu p(x)e^{\mu x} = \underbrace{(\mu p(x) + p'(x))}_{\tilde{p}(x)} e^{\mu x}$$

Dabei ist $\deg \tilde{p} = \deg(\mu p + p') = \deg p$ wegen $\mu \neq 0$ und $\deg p' < \deg p$. □

Beweis (von Satz 7.3.4):

Vorüberlegung: Wie kann man so etwas beweisen? Um eine Idee zu bekommen, sehen wir uns einige Spezialfälle an, z.B.:

- (1) Die beiden Funktionen $e^{\lambda x}, e^{0 \cdot x} \equiv 1$ mit $\lambda \neq 0$: Es gelte $\alpha e^{\lambda x} + \beta \cdot 1 = 0$ für alle x . Da $e^{\lambda x}$ nicht konstant ist, folgt $\alpha = 0$ und dann $\beta = 0$.
- (2) Die beiden Funktionen e^{3x}, e^x : Es gelte $\alpha e^{3x} + \beta e^x = 0$ für alle x . Teilen wir durch e^x , folgt $\alpha e^{2x} + \beta = 0$ für alle x , also $\alpha = \beta = 0$ nach (1).
- (3) Die Funktionen e^x, x : Es gelte $\alpha e^x + \beta x = 0$ für alle x . Leitet man ab, erhält man $\alpha e^x + \beta = 0$ für alle x , also $\alpha = \beta = 0$ nach (1).
- (4) Die Funktionen e^{3x}, e^{2x}, e^x . Es gelte $\alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^x = 0$ für alle x . Mit der Idee von (2) folgt $\alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^x + \alpha_3 = 0$ für alle x . Wie weiter?
Mit der Idee von (3): Ableiten ergibt $2\alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^x = 0$, und nun folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ wie in (2) und dann $\alpha_3 = 0$.

Wir kombinieren nun diese Ideen: ›Wegkürzen‹ einer Exponentialfunktion wie in (2), Ableiten wie in (3) und Induktion wie in (4) nahegelegt.

Fasst man in einer Linearkombination der f_{ij} immer die Terme mit demselben i zusammen, so erhält man eine Funktion der Form $p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + p_k(x)e^{\lambda_k x}$, wobei p_1, \dots, p_k Polynome sind.

Es ist also zu zeigen: Falls p_1, \dots, p_k Polynome sind und

$$(*) \quad p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + p_k(x)e^{\lambda_k x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt, so folgt $p_1 \equiv p_2 \equiv \dots \equiv p_k \equiv 0$.

Wir zeigen dies mit Induktion über k :

Induktionsanfang ($k = 1$): Aus $p_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$ folgt $p_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was zu zeigen war.

Induktionsschritt ($k - 1 \rightsquigarrow k$): Wir multiplizieren (*) mit $e^{-\lambda_k x}$:

$$(**) \quad p_1(x)e^{\mu_1 x} + \dots + p_{k-1}(x)e^{\mu_{k-1} x} + p_k(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\mu_i = \lambda_i - \lambda_k$. Hierbei sind μ_1, \dots, μ_{k-1} paarweise verschieden und ungleich Null, da $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden sind.

Es sei $d = \deg p_k$. Wir leiten Gleichung (**) $(d + 1)$ -mal ab und erhalten

$$P_1(x)e^{\mu_1 x} + \dots + P_{k-1}(x)e^{\mu_{k-1} x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

wobei P_i aus p_i durch $(d+1)$ -maliges Anwenden von Lemma 7.3.5 entsteht, für jedes $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Nach dem Lemma gilt also $\deg P_i = \deg p_i$ für alle i .

Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun $P_i \equiv 0$ und damit $p_i \equiv 0$ (wegen $\deg P_i = \deg p_i$) für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Mit Gleichung (**) folgt dann $p_k \equiv 0$, was zu zeigen war.

Bemerkung: Wofür war die Aussage $\deg \tilde{p} = \deg p$ wichtig? Wäre $\deg \tilde{p} < \deg p$ möglich, so könnte man aus $P_i \equiv 0$ nicht $p_i \equiv 0$ folgern! \square

7.4 Die lineare Gleichung n -ter Ordnung

Beispiel: Betrachte die Gleichung

$$y'' + y = 0$$

Gesucht sind also Funktionen y mit $y'' = -y$. Wir raten die Lösungen $\sin x, \cos x$. Sind das alle?

Nein, Linearkombinationen $y = \alpha \sin x + \beta \cos x$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind auch Lösungen, wie man durch Einsetzen direkt nachprüft. Haben wir nun alle (reellen) Lösungen gefunden?

Man könnte mit Hilfe der in Abschnitt ?? eingeführten Operatormethode nachprüfen, dass die Antwort ja ist. Dies folgt jedoch einfacher aus folgendem allgemeinen Satz.

7.4.1 Satz (Lösungsraum einer linearen Gleichung)

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_{n-1}, \dots, a_0, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b$$

Dann gilt:

- (1) (**Anfangswertproblem**) Sei $x_0 \in I$. Zu beliebigen $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$ gibt es genau eine Lösung $y \in C^n(I, \mathbb{K})$ von (*), so dass

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

- (2) (**Lösungsraum**) Sei $b = 0$. Die Menge \mathcal{L} der Lösungen von (*) ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^n(I, \mathbb{K})$, und die Abbildung $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}^n, y \mapsto (y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$ ist ein Isomorphismus für jedes $x_0 \in I$.

Kurz: Eine Lösung ist durch n Anfangswerte vorgegeben. Gibt man keine Anfangswerte vor, hat die homogene Gleichung einen Lösungsraum der Dimension n . Die Lösungen sind auf dem gesamten Intervall I definiert.

Beweis:

- (1) Wie wir in Abschnitt 8.5 sehen werden, folgt dies aus dem entsprechenden Satz über lineare Systeme und dieser wiederum aus dem Satz von Picard-Lindelöf, einem allgemeinen Existenzsatz. Siehe Satz 8.5.3 und die Bemerkung danach.
- (2) Mit y und \tilde{y} erfüllen offenbar auch $y + \tilde{y}$ sowie cy (für $c \in \mathbb{K}$) die homogene Gleichung (Einsetzen!). Also ist \mathcal{L} ein Untervektorraum. In der Sprache der linearen Algebra: \mathcal{L} ist der Kern der linearen Abbildung $P : C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{K}), P(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$ (vgl. Lemma 7.2.2) und daher ein Untervektorraum.

Die Abbildung $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}^n$, $y \mapsto (y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$ ist offenbar linear, da $(y + \tilde{y})^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) + \tilde{y}^{(k)}(x_0)$ usw. Die Bijektivität ist gerade die Aussage von (1): Surjektivität bedeutet die Existenz der Lösung des Anfangswertproblems, Injektivität bedeutet die Eindeutigkeit.

Da \mathbb{K}^n die Dimension n hat und ein Isomorphismus $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}^n$ existiert, ist die Dimension von \mathcal{L} ebenfalls n . \square

7.4.2 Definition

Ein **Fundamentalsystem (FS)** einer homogenen linearen Differentialgleichung ist eine Basis des Lösungsraumes dieser Gleichung.

Satz 7.4.1 sagt also, dass eine lineare Gleichung n -ter Ordnung ein Fundamentalsystem besitzt, das aus n Funktionen besteht. Kennt man ein Fundamentalsystem $\{f_1, \dots, f_n\}$, so lautet die allgemeine Lösung $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Beispiele:

(1) Den Fall $n = 1$ hatten wir bereits in Satz 7.1.2 behandelt, mit $K = \mathbb{R}$: Der Lösungsraum von $y' = a(x)y$ ist $\mathcal{L} = \{C e^{A(x)} : C \in \mathbb{R}\}$ für eine beliebige Stammfunktion A von a . Ein Fundamentalsystem ist also $\{e^{A(x)}\}$. Die Vorgabe eines Anfangswertes $y(x_0) = y_0$ bestimmt eine Lösung eindeutig.

(2) $y'' + y = 0$

Wir wissen bereits, dass $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\sin x, \cos x\} := \{\alpha \sin x + \beta \cos x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ im Lösungsraum \mathcal{L} enthalten ist. Andererseits ist $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\sin x, \cos x\}$ zwei-dimensional, da $\sin x, \cos x$ linear unabhängig sind, und \mathcal{L} ist zwei-dimensional nach dem Satz, da die Ordnung der Gleichung zwei ist. Also folgt $\mathcal{L} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\}$.

Ein Fundamentalsystem ist $\{\sin x, \cos x\}$.²

(3) Anfangswertproblem: $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$: Schreibe $y(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$. Dann $y'(x) = \alpha \cos x - \beta \sin x$. Für $x = 0$ folgt

$$\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 1, \quad \alpha \cos 0 - \beta \sin 0 = 2,$$

also $\beta = 1$, $\alpha = 2$. Die Lösung des AWP's ist also $y(x) = 2 \sin x + \cos x$.

(4) $y'' + y = 0$: Was sind die *komplexwertigen* Lösungen?

Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ können wir den Satz mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ anwenden und erhalten $\mathcal{L} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\sin x, \cos x\}$. Ein Fundamentalsystem ist also wieder $\{\sin x, \cos x\}$. Mehr dazu nach Definition 7.5.1.

(5) $y' = iy$: hier muss man $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wählen. Ein Fundamentalsystem ist $\{e^{ix}\}$.

Für lineare Differentialgleichungen der Ordnung $n > 1$ gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Für spezielle Klassen gibt es Verfahren, z.B. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, die wir im nächsten Abschnitt behandeln, oder Gleichungen vom Euler-Typ (siehe Aufgabe ??).

²Notationspuristen würden $\{\sin, \cos\}$ statt $\{\sin x, \cos x\}$ schreiben, denn die Funktion ist \sin , nicht $\sin x$ (welches ein Funktionswert ist). Im Kontext der Differentialgleichungen ist es aber übersichtlicher und üblich, die hier verwendete leicht ungenaue Notation zu verwenden.

7.5 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man ein Fundamentalsystem direkt angeben. Wir werden uns dies Schritt für Schritt erarbeiten und dabei auf das charakteristische Polynom der Gleichung stoßen und die Operatormethode kennenlernen. Das Ergebnis ist in den Sätzen 7.5.3 und 7.5.4 zusammengefasst.

In Abschnitt 7.5.3 lösen wir die inhomogene Gleichung mit speziellen Inhomogenitäten.

7.5.1 Die homogene Gleichung

Frage: Wie findet man die allgemeine Lösung, oder äquivalent ein Fundamentalsystem, für die Gleichung

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C})?$$

Der Spezialfall $n = 1$ gibt einen Hinweis:

Erinnerung: Die Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = Ce^{ax}$.

Idee: Für (*) mache den Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ zu bestimmen ist. Leite n -mal ab:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ \Rightarrow y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ \Rightarrow y''(x) &= \lambda \cdot \lambda e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ \Rightarrow y^{(n)}(x) &= \lambda^n e^{\lambda x} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} y = e^{\lambda x} \Rightarrow y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Damit dies gleich null ist, muss $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ sein. Wir definieren daher:

7.5.1 Definition

Das **charakteristische Polynom** der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

ist das Polynom $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

Die Rechnung oben zeigt also: $y = e^{\lambda x}$ ist Lösung der DGL (*) genau dann, wenn $p(\lambda) = 0$ ist.

Beispiele:

- ▷ $y'' - y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, es hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Lösungen: e^x , e^{-x} . Diese bilden ein Fundamentalsystem, da sie linear unabhängig sind und die Gleichung die Ordnung zwei hat.
- ▷ $y'' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, es hat die Nullstellen $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Lösungen: e^{ix} , e^{-ix} . Diese bilden wieder ein Fundamentalsystem.

Beachte: Obwohl die Gleichung reell ist, ist dieses Fundamentalsystem nicht reellwertig. Wir müssen hier also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wählen.

Am Anfang von Abschnitt 7.4 hatten wir bereits ein anderes Fundamentalsystem für die Gleichung $y'' + y = 0$ gefunden: $\{\sin x, \cos x\}$. Damit muss sich jede Funktion des einen Systems als Linearkombination der Funktionen des anderen Systems darstellen lassen. In der Tat:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

und

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

Bemerkung: Die Lösungen der sehr ähnlichen Differentialgleichungen $y'' - y = 0$ und $y'' + y = 0$ sind qualitativ sehr unterschiedlich: im ersten Fall exponentiell wachsend oder fallend, im zweiten oszillierend. Dies entspricht den zwei Gesichtern der komplexen Exponentialfunktion e^z , $z \in \mathbb{C}$: für reelles z beschreibt sie exponentielles Wachstum (oder Fallen), für rein imaginäres z Oszillationen. Siehe dazu auch Übung ??.

Liefert uns die angegebene Methode immer ein Fundamentalsystem?

Erinnerung: Nullstellen von Polynomen

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ ein Polynom n -ten Grades, $n \in \mathbb{N}$. Eine **Nullstelle** von p ist eine Zahl λ mit $p(\lambda) = 0$. Es braucht keine reellen Nullstellen zu geben, aber in \mathbb{C} gibt es mindestens eine und höchstens n Nullstellen. Ist μ eine Nullstelle von p , so lässt sich der Linearfaktor $\lambda - \mu$ ausfaktorisieren, d.h. es gibt ein Polynom q mit $p(\lambda) = (\lambda - \mu)q(\lambda)$. Wiederholtes Faktorisieren liefert eine Darstellung

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, die verschiedenen Nullstellen von p und $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ sind. Die Zahl m_j heißt **Multiplizität** oder **Vielfachheit** der Nullstelle λ_j . Vergleich der Grade liefert $m_1 + \dots + m_k = n$, insbesondere gibt es genau dann n verschiedene Nullstellen, wenn alle Nullstellen einfach sind, d.h. Multiplizität eins haben.

Ist μ eine Nullstelle der Multiplizität m von p , so gilt für die Ableitungen

$$p(\mu) = \dots = p^{(m-1)}(\mu) = 0, \quad p^{(m)}(\mu) \neq 0.$$

Der einfache Fall: Nur einfache Nullstellen

Falls das charakteristische Polynom nur einfache Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat, so erhalten wir die Lösungen $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$. Nach Satz 7.3.4 sind diese linear unabhängig, sie bilden somit ein Fundamentalsystem.

Was passiert, wenn das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen hat?

Dann gibt es weniger als n Nullstellen, die Funktionen $e^{\lambda_j x}$ mit $p(\lambda_j) = 0$ bilden also kein Fundamentalsystem.

Frage: Wie finden wir weitere, linear unabhängige Lösungen?

Beispiele:

(1) $y'' = 0$. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2$, die einzige Nullstelle ist $\lambda = 0$. Das ist eine doppelte Nullstelle.

Es ist $y'' = 0 \iff (y')' = 0$. Schreiben wir $z = y'$, so heißt das

$$z' = 0, \quad y' = z$$

Wir lösen zunächst die erste Gleichung nach z auf: $z = C_1$, dann die zweite nach y : $y' = C_1 \iff y = C_1 x + C_0$. Dies ist daher die allgemeine Lösung von $y'' = 0$.

Damit ist $\{1, x\}$ ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' = 0$.

(2) $y^{(n)} = 0$. Analog zum ersten Beispiel erhält man durch wiederholte Integration die allgemeine Lösung $y = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \dots + C_1x + C_0$ und das Fundamentalsystem $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

- (3) $y'' - 2y' + y = 0$. Dies ist komplizierter. Kann man das Vorgehen bei $y'' = 0$ imitieren? Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, die einzige Nullstelle ist $\lambda = 1$. Eine Lösung ist daher e^x .

Wie können wir im dritten Beispiel eine weitere, linear unabhängige Lösung finden? Bei $y'' = 0$ haben wir die Gleichung zweiter Ordnung auf zwei Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt. Geht das auch für die Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$? Die Antwort ist ja. Um das zu sehen, bedienen wir uns eines wunderbaren Werkzeugs, der Operatorschreibweise. Da diese Schreibweise ganz neue Möglichkeiten eröffnet, nennen wir sie eine Methode.

Die Operatormethode

Wir schreiben zur Abkürzung $D = \frac{d}{dx}$. Wir betrachten D als Operator, d. h. als Abbildung von Funktionen nach Funktionen. Statt $D(y)$ schreiben wir auch kürzer Dy .

Also $y' = \frac{d}{dx} y = Dy$ und $y'' = (y')' = D(y') = D(Dy) = D^2y$, wobei $D^2 := D \circ D$.

Beispiel: Wir betrachten wieder die Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = 0$ und schreiben sie um:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 0 \\ \Leftrightarrow D^2y - 2Dy + y &= 0 \\ \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1)y &= 0 \\ \Leftrightarrow (D - 1)^2y &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei steht 1 für Multiplikation mit 1, also den Identitätsoperator, der y in y überführt. Warum konnten wir so umformen? Prüfen wir es nach:

$$\begin{aligned} (D - 1)^2 &= (D - 1) \circ (D - 1) \\ &= D \circ (D - 1) - 1 \circ (D - 1) \\ &= D \circ D - D \circ 1 - 1 \circ D + 1 \circ 1 \\ &= D^2 - D - D + 1 \\ &= D^2 - 2D + 1 \end{aligned}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile haben wir verwendet, dass D ein *linearer* Operator ist: $[D \circ (D - 1)]y = D((D - 1)y) = D(Dy - y) \stackrel{!}{=} DDy - Dy = (D \circ D - D)y$.

Wir schreiben nun $(D - 1)^2y = 0 \iff (D - 1)(\underbrace{(D - 1)y}_z) = 0$, d.h. wir schreiben unsere Gleichung in ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung um, die wir nacheinander lösen können:

$$\begin{aligned} (1) \quad (D - 1)z &= 0 & (\text{d. h. } z' - z &= 0) \\ (2) \quad (D - 1)y &= z & (\text{d. h. } y' - y &= z) \end{aligned}$$

Lösung von (1): $z = C_1e^x$.

Lösung von (2): Dies ist die inhomogene lineare Gleichung $y' - y = C_1e^x$. Mit der Methode aus Abschnitt 7.1 erhalten wir

$$(e^{-x}y)' = e^{-x}(y' - y) = e^{-x}C_1e^x = C_1$$

also $e^{-x}y = C_1x + C_2$ und damit $y = (C_1x + C_2)e^x$.

Ergebnis: Die allgemeine Lösung der Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ ist $y = C_1xe^x + C_2e^x$. Ein Fundamentalsystem ist demnach $\{e^x, xe^x\}$. Dass diese Funktionen linear unabhängig sind, zeigt Satz 7.3.4.

Bemerkung: Im Nachhinein ist klar, wie wir die Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ auch ohne Operatorschreibweise auf die zwei Gleichungen erster Ordnung (1), (2) reduzieren können: Es ist

$$y'' - 2y' + y = (y' - y)' - (y' - y)$$

also ist $y'' - 2y' + y = 0$ äquivalent zur Gleichung $z' - z = 0$ für die Funktion $z = y' - y$.

Das macht die Operatorschreibweise aber nicht überflüssig, denn erst mit ihrer Hilfe haben wir diese Umformung gefunden. Im Folgenden werden die algebraischen Umformungen noch komplexer und wären ohne die Operatorschreibweise kaum zu handhaben.

Eine systematische Theorie von Operatoren ist Teil des mathematischen Gebiets Funktionalanalysis.

Die Idee des Beispiels wollen wir nun verallgemeinern. Zunächst betrachten wir statt $(D - 1)^2$ allgemeiner $(D - \mu)^n$ mit $\mu \in \mathbb{C}$. Der Kern der folgenden Rechnungen ist in folgendem Lemma enthalten.

7.5.2 Lemma

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ und $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ n -mal differenzierbar. Dann ist $(D - \mu)^n y = e^{\mu x} D^n (e^{-\mu x} y)$.

Beweis: Für $n = 1$ ist

$$e^{\mu x} D(e^{-\mu x} y) = e^{\mu x} (e^{-\mu x} y)' = e^{\mu x} (-\mu e^{-\mu x} y + e^{-\mu x} y') = -\mu y + y' = (D - \mu)y.$$

Dies ist nichts anderes als Lemma 7.1.1 mit $y = fe^{\mu x}$, $a = \mu$ und $A = \mu x$.

Wenden wir nochmal $D - \mu$ an, folgt

$$(D - \mu)^2 y = (D - \mu)(e^{\mu x} D(e^{-\mu x} y)) = e^{\mu x} D(e^{-\mu x} e^{\mu x} D(e^{-\mu x} y)) = e^{\mu x} D^2(e^{-\mu x} y)$$

Der allgemeine Fall ergibt sich analog mit Induktion. □

Bemerkung: Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn wir y weglassen, also nur mit den Operatoren rechnen: Bezeichnen wir mit M den Operator, der eine Funktion mit $e^{\mu x}$ multipliziert, d.h. $My = e^{\mu x} y$. Der inverse Operator ist $M^{-1}y = e^{-\mu x} y$, da offenbar $e^{\mu x}(e^{-\mu x} y) = e^{-\mu x}(e^{\mu x} y) = y$. Die Aussage des Lemmas für $n = 1$ ist dann

$$D - \mu = MDM^{-1}$$

(wobei wie bisher das Produkt von Operatoren als Komposition zu verstehen ist) und daraus ergibt sich direkt die Aussage für beliebiges n :

$$(D - \mu)^n = MDM^{-1}MDM^{-1} \dots MDM^{-1} = MD^n M^{-1},$$

da sich alle ‚inneren‘ M -Faktoren wegheben. In der Sprache der Algebra: Konjugiert man D mit M , erhält man $D - \mu$. Konjugation erhält Produkte, daher ist die Konjugation von D^n mit M genau $(D - \mu)^n$.

Das Lemma erlaubt es, die Gleichung $(D - \mu)^n y = 0$ auf die einfachere Gleichung $D^n z = 0$ zu reduzieren:

$$\begin{aligned} (D - \mu)^n y = 0 &\iff e^{\mu x} D^n (e^{-\mu x} y) = 0 \\ &\iff D^n z = 0 \quad \text{mit } z = e^{-\mu x} y. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von $D^n z = 0$ haben wir bereits bestimmt: $z = C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0$.

Damit ist $y = (C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0)e^{\mu x}$ die allgemeine Lösung von $(D - \mu)^n y = 0$. Ein Fundamentalsystem ist also $\{e^{\mu x}, xe^{\mu x}, \dots, x^{n-1}e^{\mu x}\}$.

Damit haben wir ein Fundamentalsystem für den Fall gefunden, dass das charakteristische Polynom nur eine Nullstelle hat. Das Ergebnis legt folgende Verallgemeinerung nahe, die wir nun beweisen.

7.5.3 Satz

Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ habe die verschiedenen komplexen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten m_1, \dots, m_k .

Dann bilden die Funktionen

$$\left. \begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} \quad m_1 \text{ Stück} \\ \vdots \\ e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{\lambda_k x} \quad m_k \text{ Stück} \end{array} \right\} m_1 + \dots + m_k = n \text{ Stück}$$

ein Fundamentalsystem für die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$.

Schreibweise:

Für ein Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

schreiben wir

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$$

Damit ist

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y$$

Beweis:

(1) Die angegebenen Funktionen sind Lösungen:

Nach Voraussetzung und Standard-Algebra können wir faktorisieren:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}. \text{ Daraus folgt}$$

$$p(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k},$$
 wobei die Reihenfolge der Faktoren bei $p(\lambda)$ und daher auch bei $p(D)$ beliebig geändert werden kann.
Betrachte zunächst $y = x^j e^{\lambda_k x}$ mit $j \leq m_k - 1$. Nach der Rechnung vor dem Satz ist $(D - \lambda_k)^{m_k} y = 0$ und damit auch

$$p(D)y = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0,$$

das heißt, y ist eine Lösung. Für die anderen Funktionen, d.h. $y = x^j e^{\lambda_i x}$ für $j \leq m_i - 1$, verfährt man analog, bringt aber zunächst in der Faktorisierung den Faktor $(D - \lambda_i)^{m_i}$ nach hinten.

(2) Diese Funktionen sind linear unabhängig. Das folgt aus Satz 7.3.4.

(3) Damit haben wir $m_1 + \cdots + m_k = n$ linear unabhängige Lösungen. Da n die Ordnung der Gleichung ist, müssen diese nach Satz 7.4.1 ein Fundamentalsystem bilden. \square **Bemerkung:** Wir haben im Beweis die Sätze 7.4.1 und 7.3.4 verwendet. Für einen anderen Beweis, der stattdessen die Lösung der inhomogenen Gleichung in Satz 7.5.5 verwendet, siehe Übung ??**Beispiel:** Löse $y''' + 4y'' + 4y' = 0$. Das charakteristische Polynom ist:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \\ &= \lambda(\lambda + 2)^2 \end{aligned}$$

Somit ist $\{1, e^{-2x}, x e^{-2x}\}$ ein Fundamentalsystem.**7.5.2 Reelle Lösungen für reelle Gleichungen**Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Aus dem allgemeinen Satz 7.4.1 folgt, dass es ein Fundamentalsystem reellwertiger Lösungen gibt. Aber p könnte trotzdem Nullstellen $\lambda \notin \mathbb{R}$ haben, und dann ist $e^{\lambda x}$ nicht reell. Wie findet man reelle Lösungen?Beobachtung: Sei $p(\lambda)$ reelles Polynom und λ_0 eine m -fache Nullstelle, $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$. Dann ist auch $\overline{\lambda_0}$ (das komplex Konjugierte von λ_0) eine m -fache Nullstelle. Schreibe dann

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= u + iv \\ \overline{\lambda_0} &= u - iv \end{aligned}$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Aus Satz 7.5.3 erhält man Lösungen

$$\begin{aligned} f_j(x) &= x^j e^{\lambda_0 x} = x^j e^{ux+ivx} = x^j e^{ux} e^{ivx} \\ g_j(x) &= x^j e^{\overline{\lambda_0} x} = x^j e^{ux-ivx} = x^j e^{ux} e^{-ivx} \end{aligned}$$

für $j = 0, \dots, m - 1$. Daraus erhält man Lösungen

$$\frac{f_j + g_j}{2} = x^j e^{ux} \cos(vx)$$

$$\frac{f_j - g_j}{2i} = x^j e^{ux} \sin(vx).$$

Da die f_j, g_j linear unabhängig sind, sind es auch diese neuen Funktionen. Damit ergibt sich folgender Satz.

7.5.4 Satz

Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ habe reelle Koeffizienten a_{n-1}, \dots, a_0 . Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen reellen Nullstellen von p , mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_r , sowie $u_1 \pm iv_1, \dots, u_c \pm iv_c$ die verschiedenen nicht-reellen Nullstellen von p , mit Vielfachheiten m'_1, \dots, m'_c .

Dann hat die Gleichung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ das Fundamentalsystem

$$\begin{array}{ll} x^j e^{\lambda_1 x}, & j = 0, \dots, m_1 - 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^j e^{\lambda_r x} & j = 0, \dots, m_r - 1 \\ x^j e^{u_1 x} \cos v_1 x, x^j e^{u_1 x} \sin v_1 x & j = 0, \dots, m'_1 - 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^j e^{u_c x} \cos v_c x, x^j e^{u_c x} \sin v_c x & j = 0, \dots, m'_c - 1 \end{array}$$

Beispiel: Löse $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda^2 + 1)^2 \\ &= [(\lambda + i)(\lambda - i)]^2 \\ &= (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 \end{aligned}$$

Wegen $i = 0 + 1i$ erhält man das Fundamentalsystem $\{\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x\}$.

7.5.3 Die inhomogene Gleichung mit speziellen Inhomogenitäten

Wie bestimmt man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b?$$

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich von linearen Gleichungen 1. Ordnung auf lineare Gleichungen n -ter Ordnung verallgemeinern. Siehe Kapitel 7.7 für den Fall $n = 2$ sowie Satz 8.5.17 für lineare Systeme erster Ordnung – jede lineare Gleichung n -ter Ordnung kann auf ein solches System reduziert werden.

Für spezielle Inhomogenitäten b lässt sich aber eine Lösung sehr einfach angeben. Wir betrachten hier nur den Fall $f(x) = e^{\mu x}$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$.

Wir betrachten also die Gleichung

$$(*) \quad p(D)y = e^{\mu x}$$

mit $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$.

Idee: Wir erinnern uns an die Rechnung zu Beginn von Abschnitt 7.5.1. In unserer Kurzschreibweise ergab diese:

$$p(D)e^{\mu x} = p(\mu)e^{\mu x}$$

Beachte, dass rechts die Funktion $e^{\mu x}$ einfach mit der Zahl $p(\mu)$ multipliziert wird.

Der Nicht-Resonanz-Fall: $p(\mu) \neq 0$

Falls $p(\mu) \neq 0$ ist, können wir die Gleichung durch $p(\mu)$ teilen und erhalten

$$p(D) \left(\frac{1}{p(\mu)} e^{\mu x} \right) = e^{\mu x}$$

weil $cp(D)y = p(D)cy$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ und jede Funktion y gilt. Damit ist $y = \frac{1}{p(\mu)} e^{\mu x}$ eine Lösung von (*).

Der Resonanzfall: $p(\mu) = 0$

(Der Begriff Resonanz-Fall ist durch physikalische Schwingungen motiviert und wird in Abschnitt 7.6 erklärt.)

Wie können wir jetzt vorgehen?

Idee: Faktorisiere $p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \mu)^m$, wobei q ein Polynom mit $q(\mu) \neq 0$ ist.

Wir wollen also eine Lösung für $q(D)(D - \mu)^m y = e^{\mu x}$ finden. Wir können dies in zwei Teilprobleme zerlegen, indem wir $z = (D - \mu)^m y$ setzen. Dann wollen wir

$$q(D)z = e^{\mu x}, \quad (D - \mu)^m y = z$$

lösen. Wegen $q(\mu) \neq 0$ hat die erste Gleichung die spezielle Lösung $z = ce^{\mu x}$ mit $c = \frac{1}{q(\mu)}$ (Nicht-Resonanzfall für q). Nach Lemma 7.5.2 ist die zweite Gleichung äquivalent zu $e^{\mu x} D^m(e^{-\mu x} y) = z$, also zu $D^m(e^{-\mu x} y) = c$. Diese können wir durch m -maliges Integrieren lösen: $e^{-\mu x} y = cx^m / m!$.

Insgesamt erhalten wir $y = \frac{1}{q(\mu)m!} x^m e^{\mu x}$. Wir wollen noch den Vorfaktor noch direkt mittels p statt q ausdrücken: Leiten wir die Gleichung $p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \mu)^m$ m -mal nach λ ab und setzen dann $\lambda = \mu$, folgt $p^{(m)}(\mu) = q(\mu)m!$. Wir erhalten:

7.5.5 Satz

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ eine m -fache Nullstelle von p , wobei $m \geq 0$.

Dann hat die Gleichung $p(D)y = e^{\mu x}$ die spezielle Lösung $y = bx^m e^{\mu x}$ mit $b = \frac{1}{p^{(m)}(\mu)}$.

Bemerkung: Ein anderer, sehr hübscher und effizienter Zugang ist folgender: Wir differenzieren die Gleichung $p(D)e^{\mu x} = p(\mu)e^{\mu x}$ nach μ , d.h. wir betrachten μ als Variable, bei festem $x!$

Die Ableitung von $e^{\mu x}$ nach μ ist $xe^{\mu x}$, und mit der Produktregel folgt $p(D)xe^{\mu x} = p'(\mu)e^{\mu x} + p(\mu)xe^{\mu x}$. Falls μ eine einfache Nullstelle von p ist, gilt $p(\mu) = 0$, $p'(\mu) \neq 0$, also $p(D)xe^{\mu x} = p'(\mu)e^{\mu x}$, und Teilen durch $p'(\mu)$ liefert das Ergebnis.

Ist μ eine m -fache Nullstelle von p , so leiten wir m -mal nach μ ab und erhalten

$$p(D)x^m e^{\mu x} = p^{(m)} e^{\mu x} + \text{Summe von Termen mit Faktoren } p^{(l)}, l < m$$

Wegen $p(\mu) = \dots = p^{(m-1)}(\mu) = 0$ folgt wieder die Behauptung. ³

Bemerkung: Auf ähnliche Weise lässt sich auch die Gleichung $p(D)y = x^k e^{\mu x}$ lösen – man muss aber etwas aufpassen: Selbst im Nicht-Resonanzfall $p(\mu) \neq 0$ hat die Lösung nicht einfach die Form $y = bx^k e^{\mu x}$, sondern man muss auch Terme mit niedrigerer x -Potenz zulassen, also $y = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\mu x}$. Um die b_i berechnen, setzt man dies am einfachsten in die Gleichung ein, teilt durch $e^{\mu x}$ und macht dann Koeffizientenvergleich. Siehe auch Übung ??.

³Das hier beschriebene Vorgehen wird erst mit dem Beweis der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen (Satz von Schwarz 2.3.2) vollständig gerechtfertigt. Das damit gewonnene Resultat (*) lässt sich aber auch direkt mittels Lemma 7.5.2 nachprüfen.

Lösung durch Komplexifizierung

Ähnlich wie bei der Integration von Ausdrücken wie $\sin x e^x$ ist es auch bei Differentialgleichungen oft nützlich, \sin und \cos als Imaginär- bzw. Realteil von e^{ix} aufzufassen.

Beispiel: Löse $y' - y = \cos x$.

1. Schreibe $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$. Löse $z' - z = e^{ix}$. Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda - 1$. Wir wenden Satz 7.5.5 mit $\mu = i$ an. Wegen $p(i) = i - 1 \neq 0$ ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{p(i)} e^{ix} = \frac{1}{i-1} e^{ix} = \frac{i+1}{(i+1)(i-1)} e^{ix} \\ &= -\frac{i+1}{2} (\cos x + i \sin x) = -\frac{1}{2} [i \cos x + \cos x - \sin x + i \sin x] \end{aligned}$$

2. Setze $y = \operatorname{Re} z$. Dies gibt eine Lösung, weil $\operatorname{Re}(z') = (\operatorname{Re} z)'$, also

$$y' - y = \operatorname{Re}(z' - z) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x.$$

Aus der Rechnung für z erhalten wir $y = \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} [\cos x - \sin x]$.

Den Hauptgrund, warum dies funktioniert, formulieren wir noch einmal allgemein:

7.5.6 Lemma

Sei $p(\lambda)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Ist f eine komplex-wertige Funktion und z eine komplex-wertige Lösung der Gleichung $p(D)z = f$, so gilt

$$p(D)(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re} f, \quad p(D)(\operatorname{Im} z) = \operatorname{Im} f$$

Beweis: Man nehme Real- und Imaginärteil der Gleichung $p(D)z = z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z + a_0 = f$ und beachte, dass man die Zahlen a_i aus Re bzw. Im herausziehen kann, da sie reell sind. \square

7.6 Schwingungen

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung treten bei der Beschreibung von Schwingungen auf. Mit den Methoden, die wir gelernt haben, kann man viele Phänomene, die man bei Schwingungen beobachten kann, quantitativ verstehen.

Wir betrachten ein Gewicht, das an einer Feder hängt, und wollen beschreiben, wie es schwingt, wenn wir an der Feder ziehen und loslassen. Das heißt, wir wollen die Funktion $t \mapsto y(t)$ finden, wobei t die Zeit und $y(t)$ die vertikale Auslenkung der Feder bezeichnet. $y = 0$ bezeichne die Gleichgewichtslage (wenn die Feder in Ruhe bleibt).

Vorgehensweise: Wir werden zunächst aus physikalischen Gesetzen eine Gleichung für y herleiten und diese dann lösen. Zunächst ist

$$y'(t) = \text{Geschwindigkeit zur Zeit } t$$

$$y''(t) = \text{Beschleunigung zur Zeit } t$$

Wir verwenden nun drei physikalische Gesetze: Die von Newton, Stokes und Hooke.

Newton: Masse \cdot Beschleunigung = Kraft (auf den Körper).

$$m \cdot y'' = F_{\text{Feder}} + F_{\text{Reibung}} + F_{\text{Extern}} \quad (m = \text{Masse des Körpers})$$

Hierbei ist F_{Feder} die Kraft, die die Feder aufgrund ihrer Elastizität auf das Gewicht ausübt, F_{Reibung} der Einfluss der Reibung (z. B. innere Reibung der Feder oder Gleitreibung, wenn das Gewicht auf einer schrägen Unterlage gleitet) sowie F_{Extern} eine äußere, auf das Gewicht einwirkende Kraft (z. B. durch ein »Anstoßen«

bewirkt). Die Gravitationskraft taucht hier nicht auf, da wir annehmen, dass die Aufhängung der Feder sie ausgleicht.

Hooke: Die Rückstellkraft der Feder ist proportional zur Auslenkung und wirkt ihr entgegen

$$F_{\text{Feder}} = -H \cdot y \quad (H > 0)$$

$$H = \text{Federkonstante}$$

Stokes: Die Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit

$$F_{\text{Reibung}} = -k \cdot y' \quad (k \geq 0)$$

(Dies ist oft, aber nicht immer realistisch. Bei hohen Geschwindigkeiten wird zum Beispiel der Luftwiderstand dominant, er ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.)

Wir erhalten aus den drei Gesetzen:

$$m \cdot y'' + k \cdot y' + H \cdot y = F_{\text{Extern}}, \text{ also}$$

$$y'' + r \cdot y' + \omega^2 y = f \quad \left(r = \frac{k}{m}, \omega = \sqrt{\frac{H}{m}}, f = \frac{F_{\text{Extern}}}{m} \right)$$

Wir betrachten nun verschiedene interessante Spezialfälle, vom einfachsten zu komplizierten.

7.6.1 Freie Schwingung: $f = 0$

Ungedämpft ($r = 0$)

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \omega^2$, mit Nullstellen $\pm i\omega$. Die allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

$$\text{oder äquivalent: } y(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$$

(siehe Übung ??). Man nennt dies eine **harmonische Schwingung**. ω heißt die **Eigenfrequenz** (oder charakteristische Frequenz) des schwingenden Systems.

Hierbei sind c_1, c_2 bzw. C, φ beliebige reelle Zahlen.

Gedämpft ($r > 0$)

$y'' + ry' + \omega^2 y = 0$. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + r\lambda + \omega^2$ hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

Kleine Reibung: $\frac{r}{2} < \omega$. Setze $\omega_r = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^2}{4}}$, dann folgt

$$y(t) = e^{-\frac{r}{2}t} \underbrace{(c_1 \cos(\omega_r t) + c_2 \sin(\omega_r t))}_{=C \cdot \cos(\omega_r t - \varphi)}$$

Dies ist eine **gedämpfte Schwingung**: Oszillationen, die mit der Zeit exponentiell kleiner werden. Beachte:

- ▷ Nur die Amplitude wird mit der Zeit kleiner, die Frequenz ist konstant.
- ▷ $\omega_r < \omega$, d. h. die Reibung macht die Schwingung langsamer.

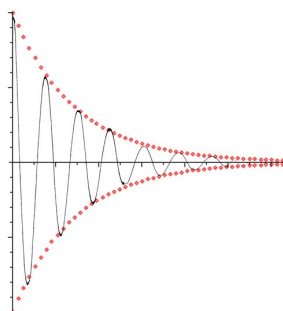


Abbildung 7.1

Große Reibung: $\frac{r}{2} > \omega$.

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Dies ist eine **aperiodische Schwingung**: Es findet gar keine Oszillation statt, weil die Reibung zu groß ist. Wegen $\lambda_{1,2} < 0$ nähert sich die Feder der Gleichgewichtslage exponentiell. Dieser Fall würde z.B. auftreten, wenn sich das Gewicht in einer sehr zähen Flüssigkeit bewegt.

Der Fall $\frac{r}{2} = \omega$.

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{r}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{r}{2}t}$$

Dies ist auch eine aperiodische Schwingung, die ebenfalls exponentiell abklingt.

7.6.2 Erzwungene (angeregte) Schwingung: $f \neq 0$

Wir betrachten nur eine periodische Anregung: $f(x) = \cos(\alpha t)$ mit der **Anregungsfrequenz** $\alpha > 0$. Zum Beispiel: Nimm die Federaufhängung in die Hand und schwinde sie auf und ab.

Ungedämpft ($r = 0$)

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\alpha t)$$

$$z'' + \omega^2 z = e^{i\alpha t}$$

(Komplexifizierung.) Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$.

Nicht-Resonanz-Fall: $p(i\alpha) \neq 0$, d. h. $\alpha \neq \omega$.

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{1}{p(i\alpha)} \cdot e^{i\alpha t} = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} e^{i\alpha t}$$

$$\Rightarrow y_{\text{inh, spez.}} = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \cdot \cos(\alpha t)$$

groß, falls α nahe ω

$$y_{\text{inh, allg.}} = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \cos(\alpha t) + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

- ▷ Die Schwingung ist eine Überlagerung von zwei Schwingungen verschiedener Frequenz: Der anregenden Frequenz α und der federeigenen Frequenz ω .
- ▷ Je näher die anregende Frequenz α an der Eigenfrequenz ω des Systems liegt, desto dominanter ist bei der Überlagerung die Schwingung mit der anregenden Frequenz.

Resonanz-Fall: $\alpha = \omega$.

$$z_{\text{inh., spez.}} = \frac{1}{p'(i\alpha)} t e^{i\alpha t} = \frac{1}{2i\alpha} t e^{i\alpha t} = \frac{1}{2\alpha} t (-i \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t))$$

$$y_{\text{inh., spez.}} = \text{Re}(z_{\text{inh., spez.}}) = \frac{1}{2\alpha} t \sin(\alpha t)$$

$y_{\text{inh., spez.}}$ ist unbeschränkt! Die Schwingungen werden mit der Zeit immer größer, bis die Feder kaputtgeht!
Realistisch ist natürlich immer Reibung da:

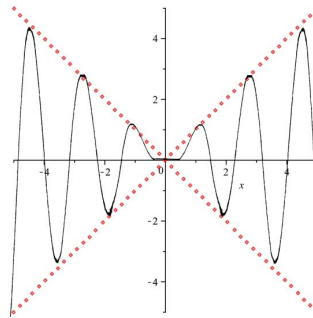


Abbildung 7.2

Gedämpft ($r > 0$)

$$y'' + ry' + \omega^2 y = \cos(\alpha t)$$

Wie oben sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

Diese haben Realteil $\neq 0$, sind also $\neq i\alpha$, d. h. es tritt *keine Resonanz* auf.

Mit etwas Rechnung erhält man die spezielle Lösung

$$y_{\text{inh., spez.}}(t) = A \cos(\alpha t - \varphi)$$

mit Amplitude $A = 1/\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + r^2\alpha^2}$ und **Phasenverschiebung** $\varphi = \arctan \frac{r\alpha}{\omega^2 - \alpha^2}$ (genauer: φ ist das Argument der komplexen Zahl $(\omega^2 - \alpha^2) + ir\alpha$).

Die allgemeine homogene Lösung hat Frequenz ω , klingt aber exponentiell ab (siehe oben unter freie Schwingung), d. h.:

- ▷ Nach einiger Zeit ist nur noch $y_{\text{inh., spez.}}$ zu beobachten,
- ▷ dann schwingt die Feder in derselben Frequenz wie die äußere Anregung,
- ▷ jedoch mit einer Phasenverschiebung.

Die Phasenverschiebung bedeutet, dass die Federschwingung der anregenden Schwingung hinterherhinkt – das kann man gut beobachten!

7.7 Die inhomogene lineare Gleichung 2. Ordnung. Die Greensche Funktion

Wie funktioniert das Verfahren der Variation der Konstanten bei linearen Gleichungen höherer Ordnung? Wir werden das im Fall der Ordnung 2 zeigen. Betrachte also

$$\underbrace{y'' + p(x)y' + q(x)y}_{P(y)} = f(x)$$

mit $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall I .

Wir lassen hier auch variable Koeffizienten p, q zu, da das Verfahren für diese genauso funktioniert wie für konstante Koeffizienten.

Nach Satz 7.4.1 hat die homogene Gleichung $P(y) = 0$ einen 2-dimensionalen Lösungsraum, es gibt also ein Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist $y_{\text{hom}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Wir ersetzen nun *beide* Konstanten c_1, c_2 durch Funktionen:

$$\text{Ansatz: } y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

$$\text{Dann folgt } y'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Leiten wir dies noch einmal ab, erscheinen (unter anderem) zweite Ableitungen von c_1, c_2 . Dies möchten wir vermeiden. Daher machen wir eine zweite Annahme als Teil des Ansatzes:

$$\text{Ansatz, zweiter Teil: } c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

Dann folgt

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

$$\text{also } y''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)$$

Setzt man nun y, y' und y'' in die Gleichung $y'' + py' + qy = f$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= c_1'y_1' + c_1y_1'' + pc_1y_1' + qc_1y_1 + c_2'y_2' + c_2y_2'' + pc_2y_2' + qc_2y_2 \\ &= c_1'y_1' + c_1 \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0} + c_2'y_2' + c_2 \underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{=0} \\ &= c_1'y_1' + c_2'y_2' \end{aligned}$$

Also ist $y = c_1y_1 + c_2y_2$ genau dann Lösung der Gleichung $y'' + py' + qy = f$, wenn gilt:

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f$$

(Im Beispiel nach Satz 8.5.17 werden wir dieses System noch einmal auf andere Weise herleiten – für den Fall, dass Ihnen die Methode hier zu unmotiviert erschien.)

Hierbei sind y_1, y_2, f bekannte Funktionen, und c_1, c_2 sind gesucht. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für c_1', c_2' . Man kann dies z. B. mittels der Cramerschen Regel lösen. Dabei tritt die Determinante der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$ auf. Diese hat einen Namen:

7.7.1 Definition

$$W = W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2 \text{ heißt } \mathbf{Wronski-Determinante} \text{ von } y_1, y_2.$$

W ist eine Funktion von x , da y_1, y_2 es sind.

Mit der Cramerschen Regel folgt dann $c_1' = -\frac{y_2 f}{W}$, $c_2' = \frac{y_1 f}{W}$.

Der Nenner ist niemals Null:

7.7.2 Lemma

Seien y_1, y_2 zwei Lösungen von $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Es gilt dann:

$$y_1, y_2 \text{ sind linear unabhängig} \iff (W[y_1, y_2])(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

Beweis: Erinnerung: Nach Satz 7.4.1 gilt für alle x :

$$\{\text{Lösungen } y \text{ von } y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Also y_1, y_2 linear unabhängig $\iff \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

Dies wiederum ist äquivalent zu $W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$. □

Aus den Formeln für c_1' und c_2' sowie dem Ansatz erhalten wir als Resultat:

$$y_{\text{inh}} = -y_1 \cdot \int \frac{y_2 f}{W} + y_2 \cdot \int \frac{y_1 f}{W}$$

Dies ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn man die unbestimmte Integrale jeweils mit einer unbestimmten Konstante auswertet.

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem, der Einfachheit halber mit den Anfangswerten $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, für ein $x_0 \in I$. Es hat folgende Lösung.

7.7.3 Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in I$. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem für den linearen Differentialoperator $P(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$P(y) = f, y(x_0) = y'(x_0) = 0$$

genau eine Lösung, und diese ist gegeben durch

$$y(x) = \int_{x_0}^x G(x, t) \cdot f(t) dt,$$

$$\text{wobei } G(x, t) = \frac{-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)}{W(t)}$$

$G(x, t)$ heißt **Greensche Funktion** für das Anfangswertproblem von P .

Beweis:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \frac{-y_1(x)y_2(t) + y_1(t)y_2(x)}{W(t)} f(t) dt \\ &= y_1(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{-y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \end{aligned}$$

erfüllt $P(y) = f$ nach der Herleitung oben. $y(x_0) = 0$ ist klar, $y'(x_0) = 0$ rechnet man leicht nach. Damit ist das angegebene y eine Lösung. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 7.4.1. \square

Hier ist uns zum ersten Mal ein zentrales Konzept der Analysis begegnet.

7.7.4 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Abbildung $Q : C^0(I) \rightarrow C^0(I)$ der Form

$$(Qf)(x) = \int_I K(x, t) f(t) dt$$

heißt **Integraloperator**. Die Funktion K heißt der **Integralkern** des Operators Q .

Für $x_0 \in I$ können wir das Integral $\int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt$ als $\int_I K(x, t) f(t) dt$ schreiben, wobei

$$K(x, t) = \begin{cases} G(x, t) & \text{falls } x_0 < t < x \\ -G(x, t) & \text{falls } x < t < x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass für $x < x_0$ gilt: $\int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt = - \int_x^{x_0} G(x, t) f(t) dt$.

Wir betrachten die Aussage von Satz 7.7.3 nun unter einem anderen Blickwinkel:

Sei $V = \{y \in C^2(I) : y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0\}$ und $W = C^0(I)$. Dann sind V, W Vektorräume, und $P : V \rightarrow W$ ist linear.

Satz 7.7.3 sagt dann: $P : V \rightarrow W$ ist bijektiv, und sein Inverses $P^{-1} : W \rightarrow V$ ist der Integraloperator, dessen Integralkern durch die Greensche Funktion wie oben beschrieben gegeben ist.

Dies ist ein allgemeines Phänomen:

Das Inverse eines linearen Differentialoperators (falls es existiert) ist ein Integraloperator.

Dies ist eine grobe Kurzfassung; wie oben beschrieben muss man Anfangsbedingungen stellen, damit man überhaupt von einem Inversen reden kann.

Sie kennen dies übrigens in einem Spezialfall schon: Das Inverse der Differentiation ist die Integration. Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Bemerkung: Integraloperatoren sind offensichtlich lineare Abbildungen auf dem unendlich-dimensionalen Vektorraum der stetigen Funktionen (jedenfalls für stetiges K), und ihre definierende Formel verallgemeinert in natürlicher Weise die Darstellung einer linearen Abbildung auf \mathbb{R}^n mittels Matrizen:

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}v_j$$

Die Summe wird durch ein Integral ersetzt und die Indizes i, j durch x, t .

8 Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Bisher haben wir immer eine einzelne Differentialgleichung betrachtet, und es war *eine* (reell- oder komplexwertige) Funktion gesucht. In vielen Situationen hat man mehrere Differentialgleichungen gegeben, und es sollen mehrere Funktionen gefunden werden, die diese Gleichungen simultan erfüllen.

Handelt es sich um ein System von Gleichungen erster Ordnung, so lässt sich das Problem des Lösen dieses Systems ähnlich wie im Fall einer Gleichung geometrisch mit Hilfe von Vektorfeldern formulieren. Lösungen entsprechen dann Integralkurven des Vektorfelds. Daher führen wir in Abschnitt 6.1 zunächst einige Grundbegriffe zu Kurven ein und zeigen die genannte Äquivalenz.

Die Systeme erster Ordnung bilden die allgemeinste Form der Differentialgleichungsprobleme. Denn wie wir in 8.1 sehen werden, ist eine Gleichung n -ter Ordnung äquivalent zu einem System von n Gleichungen erster Ordnung (mit n unbekannt Funktionen). Analog kann man in einem System mehrerer Gleichungen höherer Ordnung jede Gleichung durch mehrere Gleichungen erster Ordnung ersetzen.

In den Sektionen 8.2 und 8.3 beweisen wir allgemeine Sätze zur Existenz, Eindeutigkeit und Parameterabhängigkeit von Lösungen von Systemen erster Ordnung.

Danach werden wir einige Methoden kennenlernen, wie man für autonome Systeme zumindest die Form der Orbits untersuchen kann. Dann werden wir lineare Systeme betrachten und für den Fall konstanter Koeffizienten explizite Lösungsmethoden kennenlernen.

8.1 Reduktion beliebiger Differentialgleichungen auf Systeme 1. Ordnung

In diesem Kapitel verwenden wir durchgehend die Notation t für die unabhängige Variable, wegen der oft naheliegenden Interpretation als Zeit.

Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$) lässt sich immer in folgender Form schreiben:

$$y^{(n)} = G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

Hierbei ist G eine gegebene Funktion, also ein Ausdruck in seinen Argumenten, z. B. $G(t, y, y') = \frac{t+y}{y' + e^{ty}}$.

Wir betrachten für $(*)$ das Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

für gegebene t_0, y_0, \dots, y_{n-1} . Hierbei muss $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ im Definitionsbereich von G liegen.

Bemerkung: $(*)$ ist nicht die allgemeinste Form der Differentialgleichung n -ter Ordnung: Die Gleichung könnte z. B. $y' + \sin y' = y$ lauten, das lässt sich nicht explizit nach y' auflösen. Da die Funktion $h : z \mapsto z + \sin z$ aber streng monoton wachsend ist und damit eine Umkehrfunktion g hat (mit geeignetem Definitionsbereich, z. B. auf \mathbb{R}), ist die Gleichung $h(y') = y$ äquivalent zu $y' = g(y)$, und dies hat die Form $(*)$.

Der Satz über implizite Funktionen 3.3.1 gibt eine leicht nachprüfbare Bedingung an, unter der ein beliebiger Ausdruck in mehreren Variablen nach einer der Variablen aufgelöst werden kann.

Setzen wir

$$z_0 = y, z_1 = y', \dots, z_{n-1} = y^{(n-1)}$$

dann erfüllen diese Funktionen offenbar das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} z'_0 &= z_1 \\ z'_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ z'_{n-2} &= z_{n-1} \\ z'_{n-1} &= G(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{aligned} \quad (**)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$z_0(t_0) = y_0, z_1(t_0) = y_1, \dots, z_{n-1}(t_0) = y_{n-1}.$$

8.1.1 Satz

Die Differentialgleichung n -ter Ordnung (*) für die Funktion y ist äquivalent zu dem System (**) von n Gleichungen erster Ordnung für die Funktionen (z_0, \dots, z_{n-1}) . Genauer gilt:

- ▷ y ist eine Lösung von (*) $\Rightarrow z_0, \dots, z_{n-1}$ (wie oben definiert) lösen (**).
- ▷ z_0, \dots, z_{n-1} lösen (**) $\Rightarrow y = z_0$ löst (*) und $z_1 = y', \dots, z_{n-1} = y^{(n-1)}$.

Dies gilt jeweils inklusive der Anfangsbedingungen.

Beweis: Scharf hinsehen! □

Bemerkung: Umgekehrt ist aber nicht jedes System 1. Ordnung mit n Gleichungen äquivalent zu *einer* Gleichung n -ter Ordnung.

Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ lässt sich in folgendes System übersetzen:

$$\begin{aligned} z'_0 &= z_1 \\ z'_1 &= -z_0 \end{aligned}$$

8.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Systeme von Differentialgleichungen

Bisher bestand unsere einzige Möglichkeit, die Lösbarkeit einer Differentialgleichung zu beweisen, darin, eine Lösung hinzuschreiben. Doch dies ist oft nicht möglich, selbst für so einfache Gleichungen wie $y' = y^2 + t^2$! Diese Gleichung hat eine Lösung, nur gibt es für diese keine geschlossene Formel.

Wie kann man beweisen, dass eine Differentialgleichung eine Lösung besitzt, ohne die Lösung hinzuschreiben? Die Grundidee ist die der *Approximation*: Wie zeigt man, dass eine Funktion y mit gewissen Eigenschaften existiert, die also zum Beispiel eine gegebene Differentialgleichung löst? Man versucht, Funktionen y_k zu finden, die diese Eigenschaften nicht genau erfüllen, sondern ungefähr, immer besser für $k \rightarrow \infty$, und versucht dann zu zeigen, dass die Folge $(y_k)_k$ konvergiert, und dass der Grenzwert die gewünschten Eigenschaften hat.

Bemerkung: Eine ähnliche Situation kennen wir bereits von Integralen: Jede stetige Funktion f hat eine Stammfunktion, jedoch gibt es für diese oft keine geschlossene Formel. Wir haben dies auch mittels Approximation bewiesen, indem wir f durch Treppenfunktionen t_k approximierten.

Wie zeigt man, dass eine Folge $(y_k)_k$ konvergiert, ohne vorher den Grenzwert zu kennen? Wichtigstes Hilfsmittel ist folgendes: Man zeige, dass die y_k eine Cauchy-Folge bilden. Um daraus Konvergenz zu folgern, braucht man Vollständigkeit. Um die beschriebene Grundidee durchzuführen, benötigen wir also:

- (1) Wir brauchen ein Approximationsverfahren, also eine Methode, Approximationen für potentielle Lösungen zu erzeugen.
- (2) Wir müssen einen Funktionenraum X festlegen, also einen Vektorraum von Funktionen, der die Approximationen enthält.
- (3) Wir brauchen eine Norm auf X (oder allgemeiner eine Metrik), bezüglich der die Approximationen eine Cauchy-Folge bilden und bezüglich der X vollständig ist.

Wir werden zwei grundlegend verschiedene Approximationsmethoden kennenlernen: Das Euler-Verfahren und die Iteration nach Übersetzung des Problems in ein Fixpunktproblem. Diese führen zu zwei Existenzsätzen (Sätze von Peano und von Picard-Lindelöf), die verschiedene Voraussetzungen und Konklusionen haben.

Bei dieser Gelegenheit werden wir zum ersten Mal Bekanntschaft mit Methoden der »hohen Mathematik« machen. Im Unterschied zur »höheren Mathematik«, wo im Wesentlichen Grenzwerte von Zahlenfolgen eine Rolle spielen, geht es hier um Grenzwerte von Funktionenfolgen.

8.2.1 Allgemeine Überlegungen, Erwartungen

Wir wollen zeigen, dass das Anfangswertproblem

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

eine Lösung hat. Hierbei ist F eine gegebene Funktion auf einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in \Omega$. Die uns schon bekannten Beispiele zeigen uns, dass wir unsere Erwartungen nicht zu hoch stecken dürfen:

- ▷ Wir können höchstens *lokale* Existenz erwarten. D.h. der Definitionsbereich einer Lösung ist möglicherweise kleiner als der der Gleichung. Dies hatten wir in den Beispielen $y' = y^2$ und $y' = \sqrt{|y|}$ gesehen.
- ▷ Wir können im Allgemeinen *keine Eindeutigkeit* der Lösung erwarten. Dies hatten wir im Beispiel $y' = \sqrt{|y|}$ gesehen.

8.2.2 Der Satz von Peano

Eine naheliegende Idee, eine Näherungslösung für ein Anfangswertproblem

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

zu finden, ist das **Euler-Verfahren**: Wir ersetzen die Ableitung $y'(t)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$ für eine kleine, vorher gewählte ‚Schrittweite‘ $h > 0$. Zum Beispiel für $t = t_0$ erhalten wir

$$\frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} = F(t_0, y_0), \quad \text{also} \quad y(t_0+h) = y_0 + hF(t_0, y_0)$$

Aus $y(t_0+h)$ kann man dann analog $y(t_0+2h)$, dann $y(t_0+3h)$ usw. berechnen. Werte zwischen diesen Punkten kann man z.B. linear interpolieren. Natürlich erhalten wir so keine exakte Lösung der Differentialgleichung, aber wir können hoffen, dass die so konstruierte Funktion für kleine h einer exakten Lösung nahekommt.

In der Tat lässt sich auf diese Weise beweisen:

8.2.1 Satz (von Peano)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann hat das AWP

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

für jedes $(t_0, y_0) \in \Omega$ eine lokale Lösung.

Den Beweis finden Sie in vielen Lehrbüchern über Differentialgleichungen.

Bemerkungen: (1) Das Euler-Verfahren eignet sich auch zur numerischen Berechnung approximativer Lösungen. Es gibt jedoch wesentlich effizientere Verfahren.

(2) Die Voraussetzungen des Satzes von Peano sind recht schwach: es wird nur die Stetigkeit von F gefordert. Entsprechend lässt sich auch nur die lokale Existenz einer Lösung folgern. Im Allgemeinen gilt nicht die Eindeutigkeit und nicht die globale Existenz.

(3) Wegen der Nicht-Eindeutigkeit können wir nicht erwarten, dass die Methode genau wie eingangs beschrieben funktioniert, wenn man z.B. mit y_k die mittels $h = \frac{1}{k}$ konstruierte Näherung bezeichnet. Denn eine Cauchy-Folge hat genau einen Grenzwert. Vielmehr spielt im Beweis der Begriff der *Kompaktheit* eine zentrale Rolle: Man zeigt, dass alle y_k in einer kompakten Teilmenge des Funktionenraums X liegen. Daraus folgt, dass die Folge $(y_k)_k$ eine konvergente Teilfolge (also einen Häufungspunkt) hat, und dies ist eine Lösung. Es kann aber mehrere Häufungspunkte geben, diese entsprechen den verschiedenen Lösungen.

8.2.3 Der globale Satz von Picard-Lindelöf

Eine vollkommen andere Idee für den Beweis der Existenz der Lösungen des AWP ist folgende:

- ▷ Wir übersetzen das Anfangswertproblem in ein Fixpunktproblem für eine Abbildung $T : X \rightarrow X$ auf einem geeigneten vollständigen metrischen Raum (X, d) .
- ▷ Wir verwenden den Banachschen Fixpunktsatz.

Das Approximationsverfahren besteht hier darin, ausgehend von einer beliebigen Funktion y_0 die Funktionen $y_1 = Ty_0, y_2 = Ty_1, \dots$ zu konstruieren.

Da der Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt liefert, können wir erwarten, dass an die Gleichung zusätzliche Voraussetzungen gestellt werden müssen, die z.B. den Fall $F(|y|) = \sqrt{|y|}$ ausschließen. Wie der Beweis zeigen wird, brauchen wir folgende Variante der Lipschitz-Stetigkeit (vgl. Definition 1.3.8).

8.2.2 Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, y) \mapsto F(t, y)$ heißt **Lipschitz-stetig bzgl. y** , falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\forall t, \forall y, z$ mit $(t, y) \in \Omega, (t, z) \in \Omega$ gilt:

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| \leq L\|y - z\|$$

Hierbei bezeichnet $\| \cdot \|$ die Norm auf \mathbb{R}^n .

Mit anderen Worten, für jedes t ist die Abbildung $y \mapsto F(t, y)$ Lipschitz-stetig, und die Lipschitz-Konstante kann von t unabhängig gewählt werden. Diese Bedingung ist etwas schwächer als Lipschitz-Stetigkeit bezüglich aller Variablen t, y_1, \dots, y_n .

Nachprüfen lässt sich die Lipschitz-Bedingung meist am einfachsten mit dem folgenden Lemma, im Fall $n = 1$:

8.2.3 Lemma

Sei $n = 1$. Sei $F(t, y)$ differenzierbar in y für jedes t . Sei $L \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$F \text{ ist Lipschitz-stetig bzgl. } y \text{ mit Lipschitz-Konstante } L \iff \forall t, y : \left| \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) \right| \leq L$$

Hierbei bedeutet $\frac{\partial F}{\partial y}$ die Ableitung von F , bei festem t als Funktion von y betrachtet. Man nennt dies auch »partielle Ableitung« von F nach y . Für eine Verallgemeinerung auf beliebige n siehe Lemma 3.2.4.

Beweis: Dies ist gerade Proposition 1.4.9. □

Hier kommt die erste Version des Existenz- und Eindeigkeitssatzes:

8.2.4 Satz (Picard-Lindelöf, globale Version)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und Lipschitz-stetig bzgl. y . Sei $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

»Global« heißt: F ist Lipschitz-stetig bzgl. y auf dem ganzen Definitionsbereich $I \times \mathbb{R}^n$, und die Lösung existiert auf ganz I .

Zum besseren Verständnis führen wir den Beweis zunächst im Fall $n = 1$. Auf diese Weise sind die zentralen Ideen besser sichtbar.

Beweis im Fall $n = 1$

Für die Umformulierung in ein Fixpunktproblem wandeln wir die Differentialgleichung zunächst in eine Integralgleichung um.

8.2.5 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Satz 8.2.4 sind folgende Aussagen über eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent:

(i) y löst das Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

(ii) y ist stetig, und $\forall t \in I : y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$.

Beachten Sie, dass Teil von Aussage (i) ist, dass y differenzierbar ist.

Beweis: Dies ist eine einfache Integration, genauer eine direkte Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

»(ii) \Rightarrow (i)«: Die Abbildung $t \mapsto \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$ ist nach dem Hauptsatz differenzierbar, weil $s \mapsto F(s, y(s))$ stetig ist. Also ist y differenzierbar, $y'(t) = 0 + F(t, y(t))$ für alle t und $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, y(s)) ds = y_0$.

»(i) \Rightarrow (ii)«: Ist y differenzierbar, so ist y stetig. Die Formel folgt aus

$$\int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds = \int_{t_0}^t y'(s) ds = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

□

Als weitere Vorbereitung sei daran erinnert, dass für $a < b$ und eine beliebige stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \int_a^b f(s) ds \right| \leq \int_a^b |f(s)| ds,$$

siehe die Bemerkung nach Satz ??.

Beweis (des Satzes von Picard-Lindelöf, globale Version, im Fall $n = 1$): Wir teilen den Beweis in vier Schritte. In den ersten drei Schritten nehmen wir an, dass I kompakt ist, also $I = [a, b]$. Wir bezeichnen die Länge des Intervalls mit $|I| := b - a$. Sei L die Lipschitz-Konstante bzgl. y von F .

Die zentrale Idee steckt im ersten Schritt.

1. Schritt: Wir formulieren den Satz als eine Fixpunktaussage um. Es sei

$$X := (C(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{sup}}) \quad \text{mit} \quad C(I, \mathbb{R}) := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} : y \text{ stetig}\}$$

mit der Norm $\|y\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in I} |y(t)|$. Definiere die Abbildung $T : X \rightarrow X$ durch

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds.$$

Da mit y auch Ty stetig ist (es ist sogar differenzierbar nach Lemma 8.2.5), bildet T in der Tat X nach X ab. Nach Lemma 8.2.5 gilt:

$$\text{Lösen der AWP } y' = F(t, y), y(t_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Finden eines } y \in X \text{ mit } Ty = y$$

Vorüberlegung zum 2. Schritt: Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz auf die Abbildung $T : X \rightarrow X$ anwenden. Das geht nur, wenn T eine Kontraktion ist. Wir müssen also überprüfen, ob es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M < 1$ gibt, für das gilt:

$$\forall y, z \in X : \|Ty - Tz\|_{\text{sup}} \leq M \|y - z\|_{\text{sup}}$$

Was heißt das? Seien also $y, z \in X$, das heißt, es sind Funktionen $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$, und dann ist

$$\|Ty - Tz\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in I} |(Ty)(t) - (Tz)(t)| \quad \text{und}$$

$$(Ty)(t) - (Tz)(t) = (y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds) - (y_0 + \int_{t_0}^t F(s, z(s)) ds) = \int_{t_0}^t [F(s, y(s)) - F(s, z(s))] ds.$$

Da F Lipschitz-stetig bzgl. y mit Lipschitz-Konstante L ist, gilt

$$|F(s, y(s)) - F(s, z(s))| \leq L \cdot |y(s) - z(s)| \leq L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}}$$

für alle $s \in I$, also folgt mit der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} |(Ty)(t) - (Tz)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [F(s, y(s)) - F(s, z(s))] ds \right| \leq \int_{t_0}^t |F(s, y(s)) - F(s, z(s))| ds \leq |t - t_0| \cdot L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}} \\ &\leq |I| \cdot L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}} \end{aligned}$$

weil für $t, t_0 \in I$ offenbar $|t - t_0| \leq |I|$ gilt. Da die rechte Seite nicht von t abhängt, folgt

$$\|Ty - Tz\|_{\text{sup}} \leq |I| \cdot L \cdot \|y - z\|_{\text{sup}}$$

Wir setzen $M = |I|L$. Der Fixpunktsatz ist anwendbar, falls $M < 1$ ist. Dies zeigt, dass wir auf einem guten Weg sind, aber bisher nur unter der Voraussetzung $|I|L < 1$.

2. Schritt: Sei $|I| < \frac{1}{L}$. Dann sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für $T : X \rightarrow X$ erfüllt:

- ▷ X ist vollständig nach Satz 1.4.4.
- ▷ T ist eine Kontraktion. Dies folgt aus der Voraussetzung $|I| < \frac{1}{L}$, wie wir in der Vorüberlegung bewiesen haben.

Damit ist der Satz von Picard-Lindelöf bewiesen, falls $|I| < \frac{1}{L}$.

3. Schritt: Wie zeigt man den Satz, falls $|I| \geq \frac{1}{L}$ ist?

Am einfachsten so: Sei $I = [a, b]$. Um eine Lösung rechts von t_0 , also in $[t_0, b]$, zu konstruieren, wähle $(t_0 <) t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N = b$ so, dass für alle $i = 1, \dots, N$ gilt: $t_i - t_{i-1} < \frac{1}{L}$. Wir erhalten nun y auf $[t_0, b]$ wie folgt:

1. Wir lösen $y' = F(t, y)$ auf $[t_0, t_1]$ mit der AB $y(t_0) = y_0$ (nach dem gerade Bewiesenen) und erhalten $y_{01} := y(t_1)$.
2. Wir lösen $y' = F(t, y)$ auf $[t_1, t_2]$ mit der AB $y(t_1) = y_{01}$ und erhalten $y_{02} := y(t_2)$.
3. Wir fahren so fort, bis wir bei $t_N = b$ ankommen.

y ist an den Stellen t_i differenzierbar, da es links- und rechtsseitig differenzierbar ist und beide Ableitungen gleich $F(t_i, y_{0i})$ sind. Daher ist es eine Lösung der Differentialgleichung auf $[t_0, b]$.

Analog konstruiert man die Lösung links von t_0 .

Wir müssen noch die **Eindeutigkeit der Lösung auf ganz I** zeigen. Seien also z, \tilde{z} Lösungen auf I . Wir zeigen $z = \tilde{z}$ rechts von t_0 , der Beweis links von t_0 verläuft analog.

Setze $\bar{t} = \sup\{t \in I : z(s) = \tilde{z}(s) \text{ für alle } s \in [t_0, t]\}$. Dann gilt $z(\bar{t}) = \tilde{z}(\bar{t})$ wegen der Stetigkeit von z, \tilde{z} . Wir müssen zeigen, dass \bar{t} der rechte Randpunkt von I ist. Wäre das nicht der Fall, so könnten wir den 2. Schritt auf das AWP $y' = F(t, y)$, $y(\bar{t}) = z_0$ anwenden, wobei $z_0 := z(\bar{t})$ ist. Wir erhalten die Eindeutigkeit der Lösung auf $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$. Auf $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}]$ muss diese mit z und \tilde{z} übereinstimmen, also auch auf $[\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon]$. Dies steht im Widerspruch zur Definition von \bar{t} .

4. Schritt: Es bleibt noch der Fall eines **nicht-kompakten Intervalls I** zu untersuchen. Dies geht mit folgendem Standardtrick (Ausschöpfung durch kompakte Teilmengen): Wir wählen kompakte Intervalle $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I$ mit $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $t_0 \in I_1$ (z. B. $I_k = [-k, k]$ für $I = \mathbb{R}$ und $t_0 = 0$) und wenden das schon Bewiesene auf jedes I_k an. Wir erhalten Lösungen y_k , definiert auf I_k , für $k = 1, 2, \dots$. Für $t \in I$ setzen wir nun $y(t) = y_k(t)$, wobei k so gewählt ist, dass $t \in I_k$. Obwohl man für k hier viele Möglichkeiten hat, ist dies konsistent definiert, denn für $k < k'$ ist $I_k \subset I_{k'}$ und daher müssen $y_k, y_{k'}$ auf I_k übereinstimmen, wegen der Eindeutigkeit auf I_k . Die Eindeutigkeit auf I folgt genauso. \square

Beweis (des Satzes von Picard-Lindelöf für beliebiges n): Der Beweis verläuft genauso wie im Fall $n = 1$, mit wenigen kleinen Modifikationen. Da wir nun Kurven $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten, verwenden wir den Raum $X = C(I, \mathbb{R}^n) := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ stetig}\}$ mit der Norm $\|y\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$. Dabei bezeichnet auf der rechten Seite $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n . Wie im Fall $n = 1$ zeigt man, dass X vollständig ist (hierfür ist die Vollständigkeit von \mathbb{R}^n wesentlich).

Lemma 8.2.5 gilt auch für Kurven mit Werten in \mathbb{R}^n , mit demselben Beweis. Weiterhin müssen wir die vor dem $n = 1$ Beweis formulierte Integralungleichung auf \mathbb{R}^n -wertige Abbildungen verallgemeinern. Siehe den Schrankensatz 3.2.4. \square

Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf und der zweite (konstruktive) Teil des Banachschen Fixpunktsatzes liefern auch ein Verfahren, wie man die Lösung »findet«, d.h. mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann, zumindest unter der Bedingung $|I| < \frac{1}{L}$:

Verfahren: Um eine Lösung des AWP $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ unter den Bedingungen des Satzes 8.2.4 auf einem Intervall I mit $|I| < \frac{1}{L}$, $L =$ die Lipschitzkonstante von F , zu bestimmen, definiere die Abbildung T wie im Beweis, dann:

1. Wähle $y_1 \in X$ beliebig.
2. Berechne $y_2 = Ty_{(1)}$.
3. Berechne $y_3 = Ty_{(2)}$.
- ⋮

Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert dann die Folge der (y_k) gleichmäßig gegen die Lösung y .

Bemerkung: Auch für $|I| \geq \frac{1}{L}$ konvergiert die Folge (y_k) gegen die Lösung. Hier sind zwei Methoden, wie man das zeigen kann.

- (1) Man zeigt durch wiederholtes Abschätzen der Integrale (Übung!), dass für $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\forall y, z \in X : \|T^N y - T^N z\|_{\text{sup}} \leq \frac{(|I|L)^N}{N!} \|y - z\|_{\text{sup}}$$

wobei T^N die N -te Verkettung von T bezeichnet, also $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T \circ T \circ T$ etc. Aus $\frac{C^N}{N!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ für alle C folgt, dass T^N für genügend große N eine Kontraktion ist. Damit folgt die Behauptung aus der Erweiterung des Fixpunktsatzes, die besagt, dass letzteres schon als Bedingung an T genügt (Übung).

Dieser Beweis funktioniert nur für Intervalle endlicher Länge.

- (2) (Ein sehr hübscher Trick.) Statt der Supremumsnorm auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ verwendet man eine sogenannte **gewichtete Supremumsnorm**. Das heißt, für eine (später zu wählende) Funktion $h : I \rightarrow (0, \infty)$ und eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei

$$\|y\|_h := \sup_{t \in I} h(t) \|y(t)\|$$

Man sieht dann leicht (analog zur üblichen Supremumsnorm), dass $\|\cdot\|_h$ eine Norm auf dem Raum

$$X_h := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ ist stetig und } \|y\|_h < \infty\}$$

ist. Die Vollständigkeit von X_h zeigt man ähnlich wie bei Satz 1.4.4. Analog zur Rechnung im gegebenen Beweis, aber nun mittels $h(s) \|y(s) - z(s)\| \leq \|y - z\|_h$, also $\|y(s) - z(s)\| \leq \frac{\|y - z\|_h}{h(s)}$, erhält man:

$$\|Ty - Tz\|_h \leq \|y - z\|_h L \sup_{t \in I} h(t) \left| \int_{t_0}^t \frac{1}{h(s)} ds \right|$$

Das Erstaunliche ist nun, dass man die Gewichtsfunktion h so wählen kann, dass

$$L \sup_{t \in I} h(t) \left| \int_{t_0}^t \frac{1}{h(s)} ds \right| < 1$$

ist. Man kann zum Beispiel $h(t) = e^{-2L|t-t_0|}$ wählen.

Dieser Beweis funktioniert auch für unbeschränkte Intervalle I und gibt dann zusätzliche Informationen: Zum einen konvergiert die Iterationsmethode gleichmäßig auf ganz I (allerdings nicht bezüglich der Supremumsnorm, sondern bezüglich der Norm $\|\cdot\|_h$, diese Aussage ist schwächer, falls I unbeschränkt ist, da $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$); außerdem wächst die Lösung y für $|t| \rightarrow \infty$ höchstens wie $Ce^{2L|t|}$, da sie ja in X_h liegt – dieses ließe sich noch leicht zu $C_\varepsilon e^{(L+\varepsilon)|t|}$, $\varepsilon > 0$ beliebig, verbessern.

Eine Feinheit: Damit überhaupt $T : X_h \rightarrow X_h$ gilt, braucht man eine Bedingung an F (als Ersatz für die Kompaktheit von I). Zum Beispiel reicht (für das angegebene h) folgende Bedingung aus: $t \mapsto F(t, y_0)$ ist beschränkt auf I . Dies ist zum Beispiel für autonome Systeme erfüllt.

Betrachten wir nun einige unserer einfachsten Beispiele von Differentialgleichungen.

Beispiele: Sei $n = 1$.

(1) $y' = y$

Also $F(t, y) = y$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$, somit ist F Lipschitz-stetig bezüglich y für $t \in \mathbb{R}$.

Lösung: $y(t) = Ce^t$ (definiert für alle $t \in \mathbb{R}$, wie von Satz 8.2.4 vorhergesagt).

(2) $y' = y^2$

Also $F(t, y) = y^2$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, somit nicht Lipschitz-stetig, da unbeschränkt für $y \in \mathbb{R}$ (egal auf welchem t -Intervall)!

Lösung: $y(t) = \frac{1}{c-t}$ (existiert nicht für alle t !).

(3) $y' = \sqrt{y}$ ($y \geq 0$)

Also $F(t, y) = \sqrt{y}$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$, somit nicht Lipschitz-stetig!

Lösungen: $y \equiv 0$ und $y_c = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{für } t \geq c \\ 0 & \text{für } t \leq c \end{cases}$ (für alle $c \in \mathbb{R}$).

Nicht eindeutig: Das AWP $y(0) = 0$ hat die Lösungen $y \equiv 0$ und y_c , $c \geq 0$.

Fazit: Die Lipschitz-Bedingung ist für wichtige Beispiele nicht erfüllt, und die Aussage des globalen Satzes von Picard-Lindelöf trifft nicht auf diese Beispiele zu.

8.2.4 Der lokale Satz von Picard-Lindelöf

Wir befassen uns nun eingehend mit dem Phänomen des Beispiels $y' = y^2$. Das ist zwar nicht Lipschitz-stetig für $y \in \mathbb{R}$, aber für beschränkte y schon. Das führt auf eine wichtige neue Idee:

Die Idee der Lokalität: Oft sind wichtige Eigenschaften von Gleichungen, Funktionen etc. nur »lokal«, d. h. in geeigneten Umgebungen beliebiger Punkte, erfüllt. Das führt dann zu lokalen Schlussfolgerungen.

In einem zweiten Schritt (oft mit Hilfe von Kompaktheitsargumenten) kann man manchmal aus den lokalen Ergebnissen auf globale schließen.

8.2.6 Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto F(t, y)$ stetig.

F heißt **lokal Lipschitz-stetig bzgl. y** , falls es zu jedem $p \in \Omega$ eine Umgebung U gibt, so dass $F|_{U \cap \Omega}$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist.

Erinnerung: $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt **Umgebung** von p , wenn ein $r > 0$ mit $K_r(p) \subset U$ existiert.

Diese Bedingung ist »meist« erfüllt:

8.2.7 Lemma

Sei Ω offen. Angenommen, $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ existiert auf Ω und ist dort stetig, für $i = 1, \dots, n$. Dann ist F lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .

Beweis: Da Ableitungen in mehreren Dimensionen erst später behandelt werden, beweisen wir das Lemma nur im Fall $n = 1$. Der allgemeine Fall läuft ähnlich. Zu $p \in \Omega$ wähle $r > 0$ mit $K_r(p) \subset \Omega$. Sei K die abgeschlossene Kugel um p vom Radius $\frac{r}{2}$. Dann ist K kompakt und in Ω enthalten. Also hat $\frac{\partial F}{\partial y}$ auf K ein Maximum L , und nach Satz 1.4.9 ist F auf K Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante L). \square

Beispiele:

- (1) $F(y) = y^2$ ist auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .
- (2) $F(y) = \sqrt{y}$ ist auf $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .
- (3) $F(y) = \sqrt{|y|}$ ist nicht lokal Lipschitz-stetig auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wie wir oben gezeigt haben.

8.2.8 Satz (Picard-Lindelöf, lokale Version)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y . Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in \Omega$ ein $\delta > 0$, so dass das AWP

$$y' = F(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ definierte Lösung hat.

Beweis: Sei $(t_0, y_0) \in \Omega$. Wähle $r > 0$ und $L > 0$, so dass $K_r(t_0, y_0) \subset \Omega$ und F auf $K_r(t_0, y_0)$ Lipschitz-stetig bzgl. y mit der Lipschitz-Konstanten L ist. Wählt man ein $\rho > 0$ mit $Q := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{K_\rho(y_0)} \subset K_r(t_0, y_0)$ – dies ist nach Pythagoras sicherlich für $\sqrt{\rho^2 + \rho^2} = \sqrt{2}\rho < r$ erfüllt –, so gilt für alle $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ und alle $y \in \overline{K_\rho(y_0)}$:

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| \leq L\|y - z\|$$

Sei $M := \max_{(t,y) \in Q} |F(t, y)|$. Das Maximum existiert, da Q kompakt und F stetig ist.

Wähle nun $\delta > 0$ mit $\delta \leq \rho$, $\delta \leq \frac{\rho}{M}$ und $\delta < \frac{1}{L}$. Die erste Bedingung stellt sicher, dass $F(t, y)$ für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definiert ist, die zweite, dass (siehe unten) T den Raum X in sich abbildet und die dritte, dass T eine Kontraktion ist.

Wir verfahren nun ähnlich wie im Beweis des globalen Satzes von Picard-Lindelöf: Sei

$$X := \{y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n : y \text{ ist stetig, } y(t) \in \overline{K_\rho(y_0)} \text{ für alle } t\},$$

versehen mit der Supremums-Norm. Die Einschränkung an die Werte von y brauchen wir, da wir nur für diese Werte eine Information über $F(t, y(t))$ haben.

X ist vollständig. Dies zeigt man wieder wie in Satz 1.4.4. Wesentlich hierbei ist, dass $\overline{K_\rho(y_0)} \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und damit vollständig ist. Wir wollen nun wieder

$$T : X \rightarrow X, \quad (Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds$$

betrachten. Finden wir einen Fixpunkt von T , sind wir fertig.

Doch halt: Zunächst ist zu klären, warum T den Raum X in sich abbildet, d. h. warum aus $y \in X$ auch $Ty \in X$, also $(Ty)(t) \in \overline{K_\rho(y_0)}$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ folgt! Dies sieht man so:

$$\|(Ty)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, y(s))\| ds \leq |t - t_0| M \leq \delta M \leq \rho$$

weil wir $\delta \leq \frac{\rho}{M}$ gewählt hatten. Schließlich rechnet man wie im Beweis des globalen Satzes von Picard-Lindelöf, dass

$$\|Ty - Tz\|_{\text{sup}} \leq \|y - z\|_{\text{sup}} \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} |t - t_0| L \leq \|y - z\|_{\text{sup}} \delta L,$$

und wegen $\delta L < 1$ ist T eine Kontraktion. Also ist der Fixpunktsatz anwendbar und gibt die Behauptung. \square

8.2.5 Maximale Lösungen

Natürlich ist es etwas unbefriedigend, dass die Lösung nur lokal existiert. Im Allgemeinen kann man nicht viel über das δ in Satz 8.2.8 sagen. Man kann das Definitionsintervall aber »so groß wie möglich« machen. Was heißt das genau?

8.2.9 Definition

$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **maximale Lösung** von $y' = F(t, y)$, falls gilt:
Wenn $J \supset I$ und $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung ist mit $z|_I = y$, dann folgt $J = I$.

Mit anderen Worten: Der Definitionsbereich einer maximalen Lösung kann nicht vergrößert werden, wenn sie weiter Lösung bleiben soll.

8.2.10 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y .
Dann gibt es durch jedes $(t_0, y_0) \in \Omega$ genau eine maximale Lösung von $y' = F(t, y)$.
Ihr Definitionsbereich ist ein offenes Intervall.

Beweis: Für jedes Intervall I , das t_0 enthält und für das eine auf I definierte Lösung existiert, bezeichne y_I diese Lösung. Diese ist eindeutig – nicht nur im Fall $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ wie in Satz 8.2.8 gezeigt –, wie man wie im 3. Schritt des Beweises des globalen Satzes von Picard-Lindelöf 8.2.4 zeigt.

Sei I_{\max} die Vereinigung aller solcher offener Intervalle. Für $t \in I_{\max}$ setze $y(t) = y_I(t)$, wobei I so gewählt ist, dass $t \in I$.

Wir müssen zunächst zeigen, dass dies eine konsistente Definition ist (man sagt auch, dass y »wohldefiniert« ist), das heißt: Falls $t \in I$ und $t \in I'$, so gilt $y_I(t) = y_{I'}(t)$.

Dies folgt wiederum aus der Eindeutigkeit auf dem Intervall $[t_0, t]$ (oder $[t, t_0]$), denn da I, I' Intervalle sind und beide sowohl t_0 als auch t enthalten, enthalten sie auch dieses Intervall.

Also ist $y : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wohldefiniert. y ist eine Lösung, da jedes y_I eine Lösung ist. I_{\max} ist als Vereinigung offener Mengen offen.

y ist eindeutig, da jede maximale Lösung unter den y_I vorkommen muss, also durch y fortgesetzt wird, also wegen der Maximalität gleich y sein muss. \square

Zusammenfassung

Der globale Satz von Picard-Lindelöf liefert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

unter der Annahme, dass F (global) Lipschitz-stetig bzgl. y und für alle $y \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Diese Bedingung ist in Einzelfällen erfüllt, jedoch für viele interessante Gleichungen ist sie nicht erfüllt. Der lokale Satz von Picard-Lindelöf liefert Existenz und Eindeutigkeit unter der wesentlich schwächeren Bedingung, dass F nur *lokal* Lipschitz-stetig bzgl. y ist. Hierfür genügt es schon, dass F bzgl. y stetig differenzierbar ist. Diese Bedingung ist für die meisten Differentialgleichungen von Interesse erfüllt.

Der Preis für diese größere Allgemeinheit ist, dass die Lösungen im Allgemeinen nur *lokal* existieren, d. h. nicht auf demselben Intervall von t -Werten, für die F definiert ist (dies kennen wir schon vom Beispiel $y' = y^2$).

Der globale Satz lässt sich durch Umformulierung der Differentialgleichung in ein Fixpunktproblem mittels des Fixpunktsatzes beweisen. Der lokale Satz ebenfalls, aber die technischen Details sind dabei etwas komplizierter.

8.3 Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Für die Anwendungen (und auch innerhalb der Mathematik) ist es wichtig, zu wissen, wie sich die Lösung einer Differentialgleichung ändert, wenn man den Anfangswert oder die Gleichung selbst kontinuierlich ändert.

Beispiel (Abhängigkeit vom Anfangswert): Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = y_0$ für ein $y_0 \in \mathbb{R}$. Die Lösung kennen wir bereits: $y(t) = y_0 e^t$.

Die Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert y_0 : Sei $\tilde{y} = \tilde{y}_0 e^t$. Dann $\tilde{y}(t) - y(t) = (\tilde{y}_0 - y_0)e^t$.

Für große Zeiten laufen zwar die Lösungen weit auseinander, aber auf jedem beschränkten Zeitintervall gilt $\tilde{y} \rightarrow y$ (gleichmäßig) für $\tilde{y}_0 \rightarrow y_0$.

Beispiel (Abhängigkeit von Parametern): Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = ay$, $y(0) = 1$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist bereits bekannt: $y(t) = e^{at}$.

Die Abhängigkeit der Lösung vom Parameter a : Wieder laufen die Lösungen für verschiedene Werte von a auseinander, wenn $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$, hängen aber wie im vorigen Beispiel für beschränkte t in gleichmäßiger Weise stetig von a ab.

Bemerkung: Das Verhalten von Lösungen von Differentialgleichungen für $t \rightarrow \infty$ und die Abhängigkeit dieses Verhaltens von den Anfangswerten wird in der Theorie der **dynamischen Systeme** untersucht.

Von jetzt an betrachten wir nur **autonome Systeme**. Da diese als Vektorfelder verstanden werden können, schreiben wir $V(y)$ statt $F(y)$.

Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn wie wir in Proposition 6.2.4 sahen, ist jedes nicht-autonome System in n Dimensionen äquivalent zu einem autonomen System in $n + 1$ Dimensionen. (Allerdings ist diese Reduktion nicht immer sinnvoll, zum Beispiel bei linearen Systemen mit variablen Koeffizienten. Diese sollte man nicht als autonome Systeme in einer Dimension mehr betrachten, da sie dort nicht-linear sind – ein Verlust an Information.)

Im Folgenden sei stets $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir erinnern uns, dass Integralkurven von V gerade Lösungen von $y' = V(y)$ sind.

Eine grundlegende Eigenschaft autonomer Systeme ist:

8.3.1 Lemma (Zeitverschiebung)

Sei $y : I \rightarrow U$ eine maximale Integralkurve des lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeldes $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- (1) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $y_c(t) := y(t - c)$, definiert auf $\{t : t - c \in I\}$, auch maximale Integralkurve.
- (2) Ist $z : J \rightarrow U$ eine weitere maximale Integralkurve und gibt es $r, s \in \mathbb{R}$ mit $y(r) = z(s)$, so folgt $z = y_c$ mit $c = s - r$, also $\forall t : z(t) = y(t - c)$ und $J = \{t : t - c \in I\}$.

(2) sagt: Schneiden sich die Orbits zweier Integralkurven, so müssen diese Integralkurven schon bis auf eine Zeitverschiebung um $s - r$ gleich sein.

Konsequenz: Kennt man für ein autonomes System die Lösungen mit bei $t_0 = 0$ gegebenem Anfangswert, so kennt man auch die Lösungen für beliebiges t_0 . Daher werden wir meist nur $t_0 = 0$ betrachten.

Beweis:

(1) Eine kleine Rechnung:

$$y'(t) = F(y(t)) \implies y'_c(t) = \frac{d}{dt}(y(t - c)) = 1 \cdot y'(t - c) = F(y(t - c)) = F(y_c(t))$$

(2) Die maximalen Lösungen z und y_{s-r} haben bei $t = s$ denselben Wert $z(s) = y(s - (s - r)) = y(r)$, sind also gleich. □

Bemerkung: (1) oder (2) im Lemma gilt \Leftrightarrow Das DGL-System ist autonom.

Um die Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern zu untersuchen, brauchen wir eine parameterabhängige Version des Banachschen Fixpunktsatzes.

Frage: Sei X vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Wie ändert sich der Fixpunkt von T , wenn man T ändert?

Zunächst: Wie beschreibt man mathematisch eine Änderung von T ? \rightsquigarrow Durch Einführen eines »Parameterraumes« Y .

8.3.2 Satz (Fixpunktsatz mit Parametern)

Seien X, Y metrische Räume und X vollständig. Zudem sei $T : X \times Y \rightarrow X$, und zu $y \in Y$ schreibe $T_y : X \rightarrow X$ mit $T_y(x) = T(x, y)$.

Angenommen es gilt:

(1) Es existiert ein $L < 1$, so dass $\forall_{y \in Y} \forall_{x, x' \in X} : d_X(T_y x, T_y x') \leq L d_X(x, x')$.

(2) Für jedes $x \in X$ ist $T(x, \cdot) : Y \rightarrow X$ stetig.

Für jedes $y \in Y$ sei p_y der eindeutige Fixpunkt von T_y .

Dann ist die Abbildung $Y \rightarrow X, y \mapsto p_y$ stetig.

Bedingung (1) sagt, dass jedes T_y eine Kontraktion ist, gleichmäßig bezüglich y ; das heißt: die Kontraktionskonstante kann unabhängig von y gewählt werden.

Bedingung (2) ist eine (recht schwache) Art, auszudrücken, dass T_y stetig von y abhängt.

Beweis: Es seien $y, z \in Y, p := p_y, q := p_z$, also $p = T_y p$ und $q = T_z q$. Dann folgt

$$d(p, q) = d(T_y p, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + d(T_z p, T_z q) \leq d(T_y p, T_z p) + L d(p, q)$$

und daher

$$d(p, q) - L \cdot d(p, q) \leq d(T_y p, T_z p) \xrightarrow{L < 1} d(p, q) \leq \frac{1}{1-L} d(T_y p, T_z p)$$

Sind nun $z_n \rightarrow y$ in Y , so folgt (mit $p = p_y$) wegen Bedingung (2):

$$d(p_y, p_{z_n}) \leq \frac{1}{1-L} d(T_y p, T_{z_n} p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

also $p_{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_y$. □

Wir erinnern an die Annahmen für das Folgende:

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lokal Lipschitz-stetig}$$

(Zur Erinnerung: Dann hat $y' = V(y)$ eine lokale Lösung für jedes gegebene $y(0) = y_0$, wobei mit *lokal* gemeint ist, dass y auf einem Intervall $(-\delta, \delta)$ für ein $\delta > 0$ definiert ist.)

8.3.3 Definition (Fluss eines Vektorfeldes)

Zu $y_0 \in U$ sei $\gamma_{y_0} : I_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = V(y), y(0) = y_0$. Der **Fluss von V** ist die Abbildung

$$\Phi(t, y_0) := \gamma_{y_0}(t), \text{ definiert auf } \Omega = \{(t, y_0) : t \in I_{y_0}, y_0 \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

also $\Phi : \Omega \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$.

Im (häufigen) Idealfall, wo alle Lösungen für alle Zeiten definiert sind, ist also $\Phi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$.

Ist V das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so beschreibt Φ wirklich das Fließverhalten der Strömung: Ist etwa $K \subset U$ ein Farbtropfen, den man zur Zeit $t = 0$ ins Wasser fallen lässt, so zeigt $\Phi(t, K) := \{\Phi(t, y) : y \in K\}$ die Form des Tropfens nach der Zeit t an.

8.3.4 Satz (über die stetige Abhängigkeit von Anfangswerten)

Mit Ω und Φ wie oben gilt:

- (1) Die Menge Ω ist offen.
- (2) Die Abbildung Φ ist stetig.

Beweis: 1. Schritt: Behauptung: Sei $p \in U$. Dann gibt es $\delta > 0$ und $r > 0$, so dass für jedes $y_0 \in K_r(p)$ die Lösung γ_{y_0} auf dem Zeitintervall $(-\delta, \delta)$ existiert, und $\Phi : (-\delta, \delta) \times K_r(p) \rightarrow U$ ist stetig.

Beweis: Wir erinnern uns daran, welche Form $y(t)$ hat, wenn es Lösung mit Anfangswert y_0 ist: Man konnte y als Fixpunkt einer Kontraktion T darstellen:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V(y(s)) ds =: (T(y, y_0))(t)$$

Statt wie vorher $(Ty)(t)$ zu schreiben und y_0 zu fixieren, wollen wir nun y_0 als Parameter von T auffassen. Wir schreiben also $(T(y, y_0))(t)$ oder $(T_{y_0}y)(t)$. Wir wollen den Fixpunktsatz mit Parameter auf T anwenden. Dazu müssen wir zunächst geeignete Räume X und Y finden, so dass erstens T den Raum $X \times Y$ nach X abbildet und zweitens eine Kontraktion bzgl. des ersten und stetig bzgl. des zweiten Arguments ist, wie im Satz oben.

Wie findet man geeignete X, Y ? Y sollte eine Menge von Anfangsbedingungen y_0 nahe p sein. X sollte eine Menge von Funktionen $y : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ sein. Wenn t genügend klein ist, wird – mittels einer Schranke an $\|V\|$ – auch $(T_{y_0}y)(t)$ nahe an y_0 liegen. Wichtig hierbei ist, dass $(T_{y_0}y)(t)$ dabei die Menge U nicht verlässt. Schließlich brauchen wir für die Vollständigkeit von X noch, dass es durch eine Einschränkung der Art $y(t) \in K \forall t$ definiert ist, mit K abgeschlossen. Diese Überlegungen führen z. B. zu folgendem Beweis.

Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $K_{4r}(p) \subset U$. Da V lokal Lipschitz-stetig ist, können wir r sogar so wählen, dass V auf $K_{4r}(p)$ Lipschitz-stetig ist. Sei L die Lipschitz-Konstante. Da $\|V\|$ eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{K_{2r}(p)}$ ist, gibt es ein $M > 0$ mit $\|V(y)\| \leq M$ für alle $y \in \overline{K_{2r}(p)}$. Wähle nun $\delta > 0$ mit $\delta M < r$ und $\delta L < 1$. Setze

$$\begin{aligned} X &= C((-\delta, \delta), \overline{K_{2r}(p)}) \\ Y &= K_r(p) \end{aligned}$$

wobei X mit der Supremumsnorm versehen ist. Dann ist $T : X \times Y \rightarrow X$, da für $y \in X, y_0 \in Y$ sicherlich $T(y, y_0)$ stetig ist sowie für $t \in (-\delta, \delta)$ gilt

$$\|(T(y, y_0))(t) - p\| \leq \|(T(y, y_0))(t) - y_0\| + \|y_0 - p\| < \left\| \int_0^t V(y(s)) ds \right\| + r \leq \delta M + r < 2r$$

Weiterhin ist Bedingung (2) von Satz 8.3.2 offensichtlich erfüllt, und Bedingung (1) gilt mit L ersetzt durch $\delta L < 1$, denn dieselbe Rechnung wie im Beweis von Picard-Lindelöf ergibt für $y, z \in X, y_0 \in Y$

$$\|T(y, y_0) - T(z, y_0)\|_{\sup} \leq \delta L \|y - z\|_{\sup}$$

(y_0 kürzt sich heraus!). Schließlich ist X vollständig.

Der Fixpunktsatz mit Parameter ist also anwendbar und sagt, dass es zu jedem $y_0 \in Y$ eine auf $(-\delta, \delta)$ definierte Lösung γ_{y_0} mit Anfangswert y_0 gibt, und dass die Abbildung $Y \rightarrow X, y_0 \mapsto \gamma_{y_0}$ stetig ist.

Übung: Zeigen Sie, dass die letzte Aussage die Stetigkeit der Abbildung $\Phi : (t, y_0) \mapsto \gamma_{y_0}(t), (-\delta, \delta) \times Y \rightarrow U$ impliziert.

Damit ist die Behauptung des ersten Schritts bewiesen.

2. Schritt: Zeige, dass die Behauptung des Satzes aus dem ersten Schritt folgt. Übung! \square

Bemerkung: Falls V außer von y noch von Parametern stetig abhängt, so ist auch Φ stetig bezüglich dieser Parametern. Um dies zu zeigen, muss man den Beweis oben nur leicht modifizieren: Im Wesentlichen ersetzt man den Raum Y durch einen Raum $Y \times Y'$, wobei Y' der Raum der zusätzlichen Parameter ist.

Ein Beispiel findet man in der uns bekannten Gleichung $y' = a \cdot y$, deren Lösung $y(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$ ist. Offensichtlich ist y auch stetig bezüglich a . Genauer gesagt ist y stetig in (c, a, t) .

Eine wesentliche Erweiterung dieser Aussagen besteht darin, dass Φ sogar differenzierbar ist und auch differenzierbar von Parametern abhängt, wenn V dies tut. Dies ist etwas schwieriger zu zeigen (siehe z. B. Königsberger, Analysis 2, Kapitel 4.6).

8.4 Integralkurven und Orbits von Vektorfeldern

In diesem Teil betrachten wir einige Eigenschaften von Integralkurven von Vektorfeldern und deren Orbits. In den allermeisten Fällen kann man ein System $y' = V(y)$ nicht explizit lösen. Trotzdem möchte man gerne Informationen über die Lösungen bekommen (über deren Existenz und Eindeutigkeit hinaus), zum Beispiel ob sie beschränkt oder unbeschränkt sind, ob sie für alle Zeiten existieren, ob sie periodisch sind. Manchmal kann man zwar nicht die Lösungen (also Integralkurven), wohl aber deren Orbits bestimmen, also die Menge $\{y(t) : t \in I\}$: Das heißt, wo y sich entlangbewegt, aber man kennt den Zeitplan nicht.

Im Folgenden sei U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten also autonome Systeme. Beim ersten Lesen kann man $U = \mathbb{R}^n$ annehmen.

8.4.1 Definition

Ein **Orbit des Vektorfelds** V ist der Orbit einer maximalen Integralkurve von V .

Das **Phasenportrait von** V ist die Menge der Orbits von V (oder auch nur eine Skizze davon).

8.4.2 Satz

Sei V ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Orbits von V eine Zerlegung von U . Das heißt:

- (1) Die Vereinigung aller Orbits ist U .
- (2) Je zwei verschiedene Orbits sind disjunkt.

Kurz: Durch jeden Punkt von U läuft genau ein Orbit.

Beweis: Im Grunde handelt es sich hierbei nur um eine Umformulierung des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes:

- (1) Zu jedem $y_0 \in U$ gibt es eine Integralkurve, deren Orbit y_0 enthält (Existenz von Lösungen).
- (2) Zwei Orbits, die sich schneiden, sind schon gleich (Eindeutigkeit), denn:

Seien y, z zwei Lösungen, deren Orbits sich schneiden. Das heißt, dass $r, s \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $y(r) = z(s)$. Nach dem Lemma 8.3.1 zur Zeitverschiebung folgt für alle t : $z(t) = y(t - s + r)$. Da es sich hier nur um eine Reparametrisierung handelt, sind die Orbits von y und z gleich. \square

Beispiel: Die Orbits der Lösungen des Gleichungssystems

$$x' = -y \quad y' = x$$

sind alle Kreise um den Ursprung (mit x, y auf den Achsen), und der Ursprung – dieser entspricht der konstanten Lösung $x \equiv 0, y \equiv 0$. Siehe das Beispiel in Abschnitt 6.2.

Beispiel: Wir betrachten die Gleichung $y' = y$. Sie entspricht dem Vektorfeld $V(y) = y$ auf \mathbb{R} . Die Lösung kennen wir schon, aber die Orbits der Lösungen können wir auch ohne deren Kenntnis aus der Zeichnung ablesen: Die Menge $\{0\}$ und die Halbachsen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Diese entsprechen den Lösungen $y(t) = Ce^t$ mit $C = 0, C < 0, C > 0$ (in dieser Reihenfolge). Beachte, dass sämtliche Lösungen mit $C > 0$ denselben Orbit haben.

Einen ersten Überblick über die Form der Orbits liefert der folgende Satz:

8.4.3 Satz

Jeder Orbit \mathcal{O} eines Lipschitz-stetigen Vektorfeldes V hat einen der drei folgenden Typen:

- (1) Er besteht nur aus *einem Punkt* p ; dann ist $V(p) = 0$, und die zugehörigen Integralkurven sind konstant: $y(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (2) Er besteht aus einer *geschlossenen Kurve* (die nicht nur ein Punkt ist), das heißt: Für jede Integralkurve y von V mit diesem Orbit gilt:
 - ▷ y ist auf ganz \mathbb{R} definiert.
 - ▷ Es existiert ein $c > 0$ so, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $y(t) = y(t + c)$, aber $y(s) \neq y(t)$ für $t < s < t + c$.
- (3) Er ist der Orbit einer *injektiven Integralkurve* y von V , das heißt $t \neq s \Rightarrow y(t) \neq y(s)$.

In den letzten beiden Fällen gilt außerdem $V(p) \neq 0$ für alle $p \in \mathcal{O}$.

Einen Punkt p mit $V(p) = 0$ nennt man **kritischen oder stationären Punkt** von V . Die Zahl c in Fall (2) heißt **Periode** des Orbits.

Beweis: Sei y eine Integralkurve von V . Wir betrachten zwei Fälle:

- (1) $\exists t_0 : y'(t_0) = 0$. Setze $p := y(t_0)$. Dann folgt $V(p) = V(y(t_0)) = y'(t_0) = 0$. Die Kurve z mit $z(t) \equiv p$ ist dann eine Lösung, und aus der Eindeutigkeit folgt $y \equiv z$. Also besteht der Orbit von y nur aus dem Punkt p , d.h. wir sind in Fall (1).
- (2) $\forall t : y'(t) \neq 0$. Man kann weiter unterscheiden:
 - (a) y ist nicht injektiv, das heißt $\exists t_0 \neq s_0 : y(t_0) = y(s_0)$.

Mit dem Lemma zur Zeitverschiebung folgt dann, dass für alle t im Definitionsbereich gilt: $y(t) = y(t + C)$, wobei $C = s_0 - t_0$. Das heißt, dass y periodisch ist. Sei $P = \{p > 0 : \text{Es gilt } y(t) = y(t + p) \text{ für alle } t\}$. Die Menge P hat ein kleinstes Element (Übung). Nenne dies c . Also Fall (2).

- (b) y ist injektiv, das ist Fall (3). □

Wir betrachten den Fall (3) etwas genauer:

8.4.4 Satz

Sei $y : (\alpha, \beta) \rightarrow U$ eine injektive maximale Integalkurve des Vektorfelds V . Dann gilt:

- (i) Falls $\beta < \infty$, so verlässt y jede kompakte Teilmenge von U für $t \rightarrow \beta^-$, d.h.:
Für jede kompakte Menge $K \subset U$ und jedes $\gamma < \beta$ gibt es ein $t \in (\gamma, \beta)$ mit $y(t) \notin K$.
- (ii) Falls der Grenzwert $p = \lim_{t \rightarrow \beta} y(t)$ existiert und in U liegt, so folgt $\beta = \infty$, und p ist ein stationärer Punkt von V , d.h. $V(p) = 0$.

Analoges gilt für α .

Im Fall $U = \mathbb{R}^n$ lässt sich die Folgerung in (i) einfacher formulieren: Sei $\gamma \in (\alpha, \beta)$ beliebig. Dann ist die Kurve $\gamma : [\gamma, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ unbeschränkt. (Beweis der Äquivalenz als Übung.)

Beweis:

(i) Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Das heißt, es existiert ein kompaktes $K \subset U$ und ein $\gamma < \beta$ so, dass für alle $t \in (\gamma, \beta)$ gilt: $y(t) \in K$. Wir wollen zeigen, dass y dann keine *maximale* Lösung ist.

Da V stetig ist, ist auch $\|V\|$ stetig und damit beschränkt auf der kompakten Menge K . Also gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in K$ gilt: $\|V(x)\| \leq M$.

Wähle ein beliebiges $t_0 \in (\gamma, \beta)$. Da $y' = V(y)$ gilt, folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t V(y(s)) ds, \quad t \in (\alpha, \beta) \quad (*)$$

Da $\|V(y(s))\| \leq M$ für alle $s \in (\gamma, \beta)$ ist, existiert das uneigentliche Integral $\int_{t_0}^{\beta} V(y(s)) ds$ nach dem Majorantenkriterium (angewendet auf jede Komponente), insbesondere ist

$$\int_{t_0}^{\beta} V(y(s)) ds = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \int_{t_0}^t V(y(s)) ds.$$

Definiert man also $y(\beta) = y_0 + \int_{t_0}^{\beta} V(y(s)) ds$, so ist y auf $(\alpha, \beta]$ stetig und erfüllt dort (*), und daher die Differentialgleichung $y' = V(y)$.

Dies steht im Widerspruch dazu, dass y auf (α, β) eine maximale Lösung ist.

(ii) Da U offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $K := \overline{K_\varepsilon(p)} \subset U$. Nach Definition des Grenzwertes verlässt y die kompakte Menge K für $t \rightarrow \beta^-$ nicht, also folgt $\beta = \infty$ nach (i).

Idee: Wäre $V(p) \neq 0$, so würde $y'(t)$ für große t immer ungefähr in Richtung $V(p)$ zeigen und müsste daher unbeschränkt sein.

Genauer: Da V stetig ist, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t)) = V(p)$. Angenommen, es wäre $V(p) \neq 0$. Dann ist eine der Komponenten des Vektors $V(p)$ ungleich Null. Sei etwa $a := V_1(p) > 0$, der Fall $a < 0$ läuft analog. Da V_1 stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $V_1(x) > \frac{a}{2}$ für $x \in K_\varepsilon(p)$. Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = p$ gibt es ein t_0 mit $y(t) \in K_\varepsilon(p)$ für $t \geq t_0$. Aus $y'_1(t) = V_1(y(t))$ folgt dann $y'_1(t) \geq \frac{a}{2}$ für $t \geq t_0$, und daraus durch Integration $y_1(t) \geq y_1(t_0) + (t - t_0)\frac{a}{2}$ für $t \geq t_0$. Damit ist y_1 für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt, im Widerspruch zu $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = p$. \square

Bemerkung: Es kann auch der Fall auftreten, dass $\beta = \infty$, aber der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ existiert nicht. Wie kompliziert der Orbit dann sein kann, hängt von der Dimension ab (sagen wir $U = \mathbb{R}^n$ der Einfachheit halber):

- ▷ Falls $n = 1$, so folgt $y(t) \rightarrow \infty$ oder $y(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$.
- ▷ Falls $n = 2$, kann man zumindest beschränkte Orbits noch recht gut beschreiben: Ein beschränkter Orbit ist entweder stationär oder periodisch oder muss sich einem geschlossenen Orbit immer mehr

annähern (falls es keine stationären Punkte gibt; andernfalls gilt eine anderslautende, aber ähnliche Aussage). Das ist zwar komplizierter, aber immer noch recht übersichtlich. (Referenz: Satz von Poincaré-Bendixson)

Beispiel: Das Vektorfeld $V(x, y) = (x - y - x(x^2 + y^2), x + y - y(x^2 + y^2))$. Schreibt man das zugehörige System von Differentialgleichungen

$$x' = x - y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x + y - y(x^2 + y^2)$$

in Polarkoordinaten um – zur Erinnerung: diese sind mittels $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ definiert –, erhält man das einfachere System

$$r' = r(1 - r^2)$$

$$\varphi' = 1$$

Die Gleichung für r lässt sich leicht analysieren (siehe nächstes Kapitel), und man sieht, dass sich jeder Orbit, der mit einem $r \notin \{0, 1\}$ startet, für $t \rightarrow \infty$ spiralförmig dem Einheitskreis annähert. Details als Übung.

- ▷ Falls $n \geq 3$, so kann der Orbit sehr kompliziert (chaotisch) aussehen. Beispiel zum Weiterlesen: Der »Lorentz-Attraktor«.

8.4.1 Der Fall $n = 1$

In einer Dimension hat man die einzelne Gleichung $y' = V(y)$. Diese kann mittels Separation der Variablen gelöst werden: Nach Integration erhält man $t = \int \frac{1}{V(y)} dy$, und die Lösung erhält man durch Bilden der Umkehrfunktion. Natürlich muss man bei Nullstellen von V aufpassen, und das Integral und die Umkehrfunktion können eventuell nicht explizit berechnet werden.

Die Orbits und das qualitative Verhalten der Lösungen lassen sich jedoch *ganz ohne Rechnung* angeben!

8.4.5 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Orbits von V kann man wie folgt beschreiben:

- (1) Jeder Punkt $p \in U$ mit $V(p) = 0$ ist ein Orbit.
- (2) Die Menge $\{y \in U : V(y) \neq 0\}$ ist eine höchstens abzählbare Vereinigung offener Intervalle. Jedes dieser Intervalle ist ein Orbit.

Ist (a, b) eines dieser Intervalle und $y : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ eine maximale Integralkurve mit Orbit (a, b) , so gilt, falls $V > 0$ auf (a, b) :

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = a \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \beta} y(t) = b$$

(Falls $V < 0$ auf (a, b) , so vertauscht man hier a und b .)

Falls $a \in U$, so ist $\alpha = -\infty$, und falls $b \in U$, so ist $\beta = \infty$.

Da nach Annahme $V \neq 0$ auf (a, b) , hat V nach dem Zwischenwertsatz dort konstantes Vorzeichen. $a = -\infty$ und $b = \infty$ sind zugelassen (diese liegen aber nicht in U).

Beispiele:

- (1) Im Beispiel $V(y) = y$ sind die Orbits $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, \infty)$. Alle Integralkurven sind auf ganz \mathbb{R} definiert. Dies folgt nicht aus dem Satz, wir wissen es aus der expliziten Lösung $y(t) = Ce^t$.

- (2) $V(y) = (y - a) \cdot (y - b)$ hat die zwei Nullstellen a, b . Sei $a < b$. Die Orbits sind dann $(-\infty, a)$, $\{a\}$, (a, b) , $\{b\}$, (b, ∞) . Die zugehörigen Integralkurven sind nach dem Satz für die mittleren drei Orbits auf ganz \mathbb{R} definiert. Man kann zeigen, dass die anderen Integralkurven nicht für alle Zeiten definiert sind. (Entweder durch explizite Lösung oder durch Vergleich mit der Gleichung $y' = y^2$. Hier muss man sich natürlich erst einmal einen geeigneten Vergleichssatz überlegen.)

Beweis (von Satz 8.4.5): Da V stetig differenzierbar ist, ist es lokal Lipschitz-stetig. (1) haben wir schon bewiesen. Da V stetig ist, ist $U' = \{y \in U : V(y) \neq 0\}$ offen. Jede offene Teilmenge von \mathbb{R} ist eine disjunkte Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. (Beweis: Erkläre auf U' eine Äquivalenzrelation wie folgt: y_1, y_2 heißen äquivalent, falls das Intervall zwischen y_1 und y_2 ganz in U' liegt. Man sieht leicht, dass die Äquivalenzklassen offene Intervalle sind, deren Endpunkte nicht zu U' gehören. Wählt man in jedem dieser Intervalle eine rationale Zahl, so erhält man eine injektive Abbildung von der Menge dieser Intervalle nach \mathbb{Q} , also ist diese Menge höchstens abzählbar.)

Sei (a, b) eines dieser Intervalle. Sagen wir $V(t) > 0$ für alle $t \in (a, b)$, der andere Fall geht analog. Sei $y_0 \in (a, b)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $y : (\alpha, \beta) \rightarrow U$ die maximale Integralkurve von V mit $y(t_0) = y_0$. Wir zeigen zunächst:

Behauptung: $y(t) \in (a, b)$ für alle t .

Beweis: Sonst muss nach dem Zwischenwertsatz $y(t_0) = a$ oder $y(t_0) = b$ sein für ein t_0 . Sagen wir $y(t_0) = b$, der andere Fall geht analog. Insbesondere folgt $b \in U$, und wegen $b \notin U'$ muss $V(b) = 0$ sein, also ist $\{b\}$ ein Orbit. Da verschiedene Orbits disjunkt sind, kann der Orbit von y nicht durch b laufen, ein Widerspruch.

Wir zeigen nun $\lim_{t \rightarrow \beta} y(t) = b$, der andere Grenzwert geht analog. Dann folgt insbesondere, dass (a, b) ein Orbit ist. Da $y(t) \in (a, b)$ und daher $y'(t) = V(y(t)) > 0$ für alle t ist, wächst y monoton, damit existiert $c := \lim_{t \rightarrow \beta} y(t)$ (möglicherweise $c = \infty$), und $c \leq b$. Wäre $c < b$, so folgte $c \in (a, b) \subset U$, und nach Satz 8.4.4(ii) wäre c ein stationärer Punkt von V , was wegen $V > 0$ auf (a, b) nicht geht. Also folgt $c = b$.

Die letzte Aussage folgt direkt aus Satz 8.4.4(ii). \square

8.5 Lineare Systeme erster Ordnung

Für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung gibt es eine ähnliche Theorie wie für eine lineare Gleichung n -ter Ordnung: Der Lösungsraum ist ein Vektorraum, es gibt Fundamentallösungen, die inhomogene Gleichung kann mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden, sobald man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung kennt, etc.

Ähnlich wie in der linearen Algebra, wo man lineare Gleichungssysteme mit Matrizen beschreibt, ist auch hier die Verwendung von Matrizen nützlich. Sie führt vor allem zu einem Gewinn an Übersichtlichkeit. Wir werden auch sehen, dass zentrale Konzepte der linearen Algebra, zum Beispiel die Eigenwerte einer linearen Abbildung (oder Matrix) und ihre Diagonalisierung eine zentrale Rolle spielen und eine explizite Lösung der linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten erlauben.

Da sich die Gleichung n -ter Ordnung als System von n Gleichungen erster Ordnung umschreiben lässt, umfassen die hier gewonnenen Resultate die uns schon bekannten und geben für diese ein neues Verständnis. Insbesondere werden wir im Fall konstanter Koeffizienten auf neue Weise verstehen, warum bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms Lösungen der Form $t^k e^{\lambda t}$ auftauchen. Lösungen dieser Art treten genau dann auf, wenn die Matrix, die das System beschreibt, nicht diagonalisierbar ist. Sie sind daher eng mit dem Phänomen nilpotenter Anteile linearer Abbildungen verwoben. Für eine vollständige Analyse dieses Problems wird die Jordansche Normalform aus der linearen Algebra gebraucht. Wir streifen dies nur am Rande.

Eine Andeutung für diese Brücke zur linearen Algebra findet sich schon im Begriff des *charakteristischen Polynoms*, den wir für Gleichungen n -ter Ordnung eingeführt haben und den wir nun mit dem für Matrizen bekannten charakteristischen Polynom in Verbindung bringen.

8.5.1 Existenz und Eindeutigkeit, Fundamentalmatrix

Zunächst führen wir einige Notationen und Begriffe ein:

Zu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} sei $M_n(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{n \times n} := \{A : A \text{ ist eine } n \times n\text{-Matrix mit Einträgen aus } \mathbb{K}\}$. $M_n(\mathbb{K})$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum, der isomorph zum $\mathbb{K}^{(n^2)}$ ist. Zum Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$$

Damit definiert die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^{(n^2)}$ eine Norm auf $M_n(\mathbb{K})$:

Zu $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sei

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Damit ist definiert, was es für eine Abbildung $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ (eine »Kurve« in $M_n(\mathbb{K})$) bedeutet, stetig zu sein. Eine solche Kurve kann auch als Matrix von Funktionen aufgefasst werden, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$, und nach Satz 1.3.7 ist Stetigkeit von A äquivalent zur Stetigkeit aller $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$.

8.5.1 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es seien stetige Abbildungen $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben. Die Gleichung

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

heißt **lineares System erster Ordnung**.

Die Lösung eines solchen Systems ist eine Kurve $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Notation: In diesem Abschnitt bezeichnen wir Vektoren und vektorwertige Funktionen mit **fetten** Buchstaben, z.B. \mathbf{y} , um sie deutlich von ihren Komponentenfunktionen zu unterscheiden. Vektoren sind dabei immer Spaltenvektoren, also z.B.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, $y_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ für $k = 1, \dots, n$. Dies erlaubt es uns, mehrere vektorwertige Funktionen z.B. durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$ zu bezeichnen.

Für handschriftliche Notizen kann man \mathbf{y} z.B. durch einen Pfeil kennzeichnen: \vec{y} .

Die allgemeine Methode aus Abschnitt 8.1, eine Differentialgleichung n -ter Ordnung in ein System aus n Gleichungen erster Ordnung umzuschreiben, führt im Fall einer linearen Gleichung auf ein lineares System:

Aus

$$\mathbf{y}^{(n)} + a_{n-1}(t)\mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\mathbf{y}' + a_0(t)\mathbf{y} = \mathbf{b}(t)$$

wird, wenn wir

$$z_1 := \mathbf{y}, \quad z_2 := \mathbf{y}', \quad \dots, \quad z_n = \mathbf{y}^{(n-1)}$$

setzen, das System

$$\begin{aligned}
 z_1' &= && z_2 \\
 z_2' &= && z_3 \\
 &\vdots && \ddots \\
 z_{n-1}' &= && z_n \\
 z_n' &= -a_0(t)z_1 - a_1(t)z_2 - a_2(t)z_3 \dots - a_{n-1}(t)z_n + b(t)
 \end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(t)}$$

Bemerkung: Das charakteristische Polynom der Matrix $A(t)$ ist $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$ (Übung!). Im Fall konstanter Koeffizienten ist dies genau das charakteristische Polynom der Gleichung n -ter Ordnung, die unser Ausgangspunkt war.

$A(t)$ wird auch manchmal **Begleitmatrix** des Polynoms $p(\lambda)$ genannt.

Beispiel: Wir übersetzen die inhomogene lineare DGL 2. Ordnung $y'' + py' + qy = b$ in ein System erster Ordnung. Setze $z_1 = y, z_2 = y'$, dann ist die DGL für y äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned}
 z_1' &= z_2 \\
 z_2' &= -qz_1 - pz_2 + b, \quad \text{also } \mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b} \text{ mit } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom einer 2×2 -Matrix A ist $\lambda^2 - (\text{Spur } A)\lambda + \det A$, in diesem Fall ist das gleich $\lambda^2 + p\lambda + q$, also gleich dem charakteristischen Polynom der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$.

8.5.2 Lemma

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt: $\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|$

Beweis: Eine einfache Rechnung mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Übung). □

8.5.3 Satz (Existenz und Eindeutigkeit für lineare Systeme)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

für jedes $t_0 \in I, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{K}^n$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Da eine lineare Gleichung n -ter Ordnung immer in ein lineares System überführt werden kann, folgt daraus sofort Satz 7.4.1(1).

Beweis: Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir setzen $F(t, \mathbf{y}) := A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$. Wir wollen den globalen Satz von Picard-Lindelöf, Satz 8.2.4, anwenden und müssen dafür die Lipschitz-Stetigkeit von F bezüglich \mathbf{y} nachprüfen. Für $t \in I, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$F(t, \mathbf{y}) - F(t, \mathbf{z}) = A(t)\mathbf{y} + b_0(t) - A(t)\mathbf{z} - b_0(t) = A(t) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})$$

und daher $\|F(t, \mathbf{y}) - F(t, \mathbf{z})\| \leq \|A(t)\|_2 \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$ nach Lemma 8.5.2.

Nun ist die Funktion $t \mapsto \|A(t)\|$ stetig und daher auf jedem kompakten Intervall $J \subset I$ beschränkt. Wählt man also $L \in \mathbb{R}$ mit $\|A(t)\| \leq L$ für alle $t \in J$, so folgt

$$\|F(t, \mathbf{y}) - F(t, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \text{ für alle } t \in J, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat das Anfangswertproblem also auf jedem kompakten Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$ eine eindeutige Lösung. Diese Lösungen lassen sich mittels einer Ausschöpfung von I durch kompakte Intervalle (vgl. das Ende des Beweises von Satz 8.2.4) zu einer Lösung auf ganz I zusammensetzen, und diese ist eindeutig.

Den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ beweist man, indem man das komplexe System aus n Gleichungen in ein reelles System aus $2n$ Gleichungen umwandelt. Siehe Übung ??.

Wir betrachten nun zunächst die homogene Gleichung.

8.5.4 Satz (Lösungsraum eines homogenen linearen Systems)

Sei A wie oben und $\mathcal{L} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}\}$. Dann gilt:

- (1) Die Menge \mathcal{L} ist ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.
- (2) Für alle $t_0 \in I$ gilt: Die Abbildung $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{K}^n, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}(t_0)$ ist ein Isomorphismus.

Dies ist analog zum Satz 7.4.1(2) für eine lineare Gleichung n -ter Ordnung, und der Beweis verläuft genauso.

Die Fundamentalmatrix

Den Lösungsraum eines homogenen linearen Systems kann man übersichtlich mit der Fundamentalmatrix beschreiben.

8.5.5 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ stetig und $t_0 \in I$. Die **Fundamentalmatrix** des Systems $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ bezüglich des Anfangspunkts t_0 ist die $n \times n$ -Matrix $\Phi = (z_1, \dots, z_n)$, deren Spalten z_1, \dots, z_n die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$z_i' = A(t)z_i, \quad z_i(t_0) = e_i$$

sind, wobei e_i der i -te kanonische Basisvektor von \mathbb{K}^n ist.

Die Einträge von Φ sind also Funktionen auf I , oder äquivalent: Φ ist eine matrixwertige Funktion $\Phi : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$. Diese kann auch charakterisiert werden als Lösung des Anfangswertproblems

$$(*) \quad \Phi' = A(t)\Phi, \quad \Phi(t_0) = I,$$

wobei $I \in M_n(\mathbb{K})$ die Einheitsmatrix ist. Denn aus $\Phi = (z_1, \dots, z_n)$ folgt $\Phi' = (z_1', \dots, z_n') = (Az_1, \dots, Az_n) = A(z_1, \dots, z_n) = A\Phi$ sowie $\Phi(t_0) = (z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)) = (e_1, \dots, e_n) = I$.

Dass das AWP (*) eine eindeutige Lösung hat, folgt auch direkt durch Anwendung von Satz 8.5.3: Dies ist ein lineares System für die $M_n(\mathbb{K})$ -wertige Funktion Φ , d.h. für die n^2 Einträge der Matrix Φ . Das System ist linear, da für jedes $t \in I$ die Abbildung $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \Phi \mapsto A(t)\Phi$ linear ist.

Dies wird klarer, wenn man $M_n(\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}^{(n^2)}$ identifiziert. Als Übung schreiben Sie das resultierende 4×4 -System im Fall $n = 2$ hin!

Die Fundamentalmatrix ist mit Hilfe des speziellen Fundamentalsystems z_1, \dots, z_n definiert. Man kann sie auch leicht aus einem beliebigen Fundamentalsystem berechnen:

8.5.6 Proposition

Sei $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$. Dann ist die Fundamentalmatrix bezüglich des Anfangspunkts t_0 gegeben durch

$$\Phi(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}, \quad \text{wobei } Y = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$$

Beweis: Da die Fundamentalmatrix die eindeutige Lösung des Systems (*) ist, müssen wir nur nachprüfen, dass die matrixwertige Funktion $t \mapsto Y(t)Y(t_0)^{-1}$ die beiden Bedingungen (*) erfüllt: Es ist $(Y(t)Y(t_0)^{-1})' = Y'(t)Y(t_0)^{-1} = (AY(t))Y(t_0)^{-1} = A(Y(t)Y(t_0)^{-1})$, und für $t = t_0$ ist $Y(t_0)Y(t_0)^{-1} = I$. \square

Ein Beispiel für die Berechnung der Fundamentalmatrix finden Sie nach Satz 8.5.7.

Nutzen der Fundamentalmatrix:

Die Fundamentalmatrix erlaubt es, die Lösung des Systems $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ mit beliebiger Anfangsbedingung $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ sofort hinzuschreiben:

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\mathbf{y}_0$$

Denn für dieses \mathbf{y} gilt $\mathbf{y}'(t) = \Phi'(t)\mathbf{y}_0 = A(t)\Phi(t)\mathbf{y}_0 = A(t)\mathbf{y}(t)$ sowie $\mathbf{y}(t_0) = \Phi(t_0)\mathbf{y}_0 = I\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0$.

8.5.2 Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Genau wie bei einer homogenen linearen Gleichung n -ter Ordnung können wir auch für ein homogenes lineares System erster Ordnung Lösungen explizit berechnen, falls die Koeffizienten konstant sind. Wir geben den Anfangswert nun immer bei $t_0 = 0$ vor, betrachten also das Problem

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$$

wobei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{K}^n$. Nach Satz 8.5.3 gibt es genau eine Lösung, und sie ist auf ganz \mathbb{R} definiert.

Für $n = 1$ kennen wir die Lösung bereits, denn dann hat die Gleichung die Form $y' = ay$ ($a \in \mathbb{K}$). Die Lösung ist $y(t) = e^{at}\mathbf{y}_0$.

Hier sind zwei Ideen zur Lösung des Problems für beliebige n :

- ▷ Wir ersetzen formal a durch A , d.h. wir schreiben $\mathbf{y} = e^{At}\mathbf{y}_0$.

Dies macht zunächst keinen Sinn, da die Exponentialfunktion nicht auf Matrizen angewendet werden kann. Wir sollten also versuchen, den Definitionsbereich der Exponentialfunktion von Zahlen auf quadratische Matrizen zu erweitern.

Dies ist nicht schwierig: Wir verwenden einfach die Exponentialreihe, setzen also $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$. Das liefert tatsächlich eine Lösung! Diese Idee greifen wir weiter unten wieder auf.

- ▷ Wir machen den Ansatz $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, wobei $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ noch zu bestimmen sind. Wir setzen in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$$(e^{\lambda t}\mathbf{v})' = Ae^{\lambda t}\mathbf{v} \iff \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = Ae^{\lambda t}\mathbf{v} \iff \lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}$$

Hier stoßen wir auf die Eigenwerte der Matrix A !

Wir verfolgen zunächst die zweite Idee.

Erinnerung Lineare Algebra: Eigenwerte

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Falls $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ die Gleichung

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

erfüllen und $\mathbf{v} \neq 0$ ist, nennt man λ einen **Eigenwert** von A und \mathbf{v} einen Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Die Gleichung $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ist äquivalent zu $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, daher ist λ genau dann Eigenwert, wenn diese Gleichung eine Lösung $\mathbf{v} \neq 0$ hat. Dies ist äquivalent zu $\det(A - \lambda I) = 0$.

Die Funktion $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom vom Grad n , sie heißt **charakteristisches Polynom** von A . Wir erhalten:

Berechnung der Eigenwerte von A : Bestimme die Nullstellen von p .

Berechnung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ : Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

Die Menge $\{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0\}$ heißt **Eigenraum** von A zu λ . Dies ist ein Untervektorraum von \mathbb{K}^n .

Ein Beispiel finden Sie weiter unten.

8.5.7 Satz (Lösungen aus Eigenwerten und Eigenvektoren)

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dann gilt für das System $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$:

- (1) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$. Die Funktion $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ ist eine Lösung genau dann, wenn $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
- (2) Falls $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, so bilden $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{y}_n = e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ ein Fundamentalsystem.
- (3) Unter den Voraussetzungen von (2) ist die Fundamentalmatrix (bezüglich des Anfangspunkts $t_0 = 0$)

$$\Phi(t) = UD_tU^{-1} \quad \text{mit } D_t = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \text{ und } U = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Hierbei bezeichnet $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen a_1, \dots, a_n

und $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ die $n \times n$ -Matrix mit Spalten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Die Formel für die Fundamentalmatrix werden wir später mit anderen Mitteln erneut herleiten, siehe die Bemerkung nach Satz 8.5.13.

Beweis:

(1) Dies wurde vor dem Satz bewiesen.

(2) Nach (1) sind $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Lösungen von $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Da $\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{y}_n(0) = \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind, sind die Funktionen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ linear unabhängig. Da der Lösungsraum die Dimension n hat, bilden $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem.

(3) Nach Proposition 8.5.6 ist $\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n) (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^{-1} = UD_tU^{-1}$. □

Bemerkung: Nützliches Matrixprodukt: $(a_1\mathbf{v}_1, \dots, a_n\mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$

Konkret erhalten wir:

Verfahren: Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ ist dann

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$$

Um das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{K}^n$ zu lösen, wählen wir die Koeffizienten c_i so, dass $y_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ gilt. Das geht, da (v_1, \dots, v_n) eine Basis von \mathbb{K}^n ist.

Warnung: Dieses Verfahren funktioniert nur, wenn A eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, wenn A also diagonalisierbar ist (siehe unten). Für den Fall, dass A nicht diagonalisierbar ist, siehe den Abschnitt nach Satz 8.5.13.

Erinnerung Lineare Algebra: Diagonalisierbarkeit

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Folgende Bedingungen an A sind äquivalent:

- Es gibt eine Basis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A .
- Es gibt eine Basis von \mathbb{K}^n , bezüglich der die durch A definierte lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.
- A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, d. h. es gibt eine invertierbare $n \times n$ -Matrix U , so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.
- Für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit, d. h.

$$\dim(\text{Eigenraum zu } \lambda) = \text{Vielfachheit der Nullstelle } \lambda \text{ von } p$$

Ist eine (und damit jede) dieser Bedingungen erfüllt, nennt man A **diagonalisierbar**.

Konkret: Sei v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dies ist die Basis in (b), und die resultierende Diagonalmatrix ist $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. In (c) kann man $U = (v_1, \dots, v_n)$ nehmen und die resultierende Diagonalmatrix ist wieder $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Das sieht man so:

$$A(v_1, \dots, v_n) = (Av_1, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (v_1, \dots, v_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Also $AU = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Multiplikation mit U^{-1} von links gibt (c).

Schließlich gilt noch: Falls p genau n verschiedene Nullstellen in \mathbb{K} hat, so ist A diagonalisierbar. Die Bedingung ist aber nicht notwendig.

Beispiel: Wir betrachten das Gleichungssystem

$$x' = y = 0x + 1y$$

$$y' = x = 1x + 0y$$

also das lineare System erster Ordnung $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$ mit $y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

▷ Bestimmen der Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

Es gilt $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

▷ Bestimmen von Eigenvektoren zu den gefundenen Eigenwerten:

$$\lambda_1: (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0, \text{ z.B. } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2: (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0, \text{ z.B. } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also ist durch

$$\mathbf{y}_1 = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem gegeben, und die allgemeine Lösung lautet (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$):

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

▷ Bestimmen der Fundamentalmatrix: Nach Satz 8.5.7(3) (oder nach Proposition 8.5.6) ist $\Phi(t) = UDU^{-1} = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n) (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^{-1}$. Es ist

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

▷ Das Phasenportrait, d.h. eine Skizze der Orbits des Systems:

Die allgemeine Lösung ist $\mathbf{y} = c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-t} \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wegen $e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ und $e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ erhalten wir folgende Orbits:

- (1) Den Nullpunkt ($c_1 = c_2 = 0$)
- (2) Die zwei Halbgeraden $\mathbb{R}_{>0} \mathbf{v}_2$ und $\mathbb{R}_{<0} \mathbf{v}_2$. Diese werden in Richtung Nullpunkt durchlaufen (hier $c_1 = 0$ und $c_2 > 0$ bzw. $c_2 < 0$)
- (3) Die zwei Halbgeraden $\mathbb{R}_{>0} \mathbf{v}_1$ und $\mathbb{R}_{<0} \mathbf{v}_1$. Diese werden weg vom Nullpunkt durchlaufen (hier $c_2 = 0$ und $c_1 > 0$ bzw. $c_1 < 0$)
- (4) Hyperbeln, die die Halbgeraden der Richtungen $\pm \mathbf{v}_1, \pm \mathbf{v}_2$ als Asymptoten haben. Die Durchlaufrichtungen ergeben sich aus den Durchlaufrichtungen der Asymptoten (hier $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$)

(Hier fehlt noch ein Bild.)

Rechentricks für 2×2 -Matrizen: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

▷ Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{Spur}(A)\lambda + \det A$, wobei $\text{Spur}(A) = a + d$ und $\det A = ad - bc$.

▷ Falls $A\mathbf{v} = 0$ eine Lösung $\mathbf{v} \neq 0$ hat, so sind $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$ (oder deren Vielfache) Lösungen. Für $A \neq 0$ ist mindestens eine davon ungleich Null. (Dies ist auf die Matrix $A - \lambda I$ anzuwenden.)

▷ Inverse: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

In Worten: Eins durch Determinante, dann vertausche die Diagonalelemente und setze ein Minuszeichen vor die beiden anderen Einträge der Matrix.

Begründungen als Übung.

8.5.3 Die Exponentialfunktion für Matrizen

Wir verfolgen nun die andere Idee zur Lösung von $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$: Versuche, eine Matrix e^{At} so zu definieren, dass $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0$ die Lösung ist. Damit werden wir für diagonalisierbares A dieselbe Formel für die Fundamentallösung erhalten, siehe Korollar ??, aber wir werden auch den nicht-diagonalisierbaren Fall behandeln können!

Wir gehen analog zur Einführung der reellen Exponentialfunktion vor:

8.5.8 Definition

Zu $B \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir: $e^B := I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \in M_n(\mathbb{K})$

Bevor wir uns über Konvergenz der Reihe Gedanken machen, vergewissern wir uns, dass dies eine nützliche Sache ist. Dazu rechnen wir formal nach, dass e^{At} die Bedingungen an eine Fundamentalmatrix

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}, \quad e^{A \cdot 0} = I$$

erfüllt. Daraus folgt dann, dass $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0$ die Lösung des Anfangswertproblems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ ist.

Die Definition ergibt mit $B = At$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots$$

Offenbar ist $e^{A \cdot 0} = I$, und wir berechnen durch gliedweises Ableiten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + A^2t + \frac{A^3}{2!}t^2 + \dots \\ &= A \left(I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots \right) = Ae^{At} \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ konvergiert, und dass die gliedweise Differentiation der Reihe für e^{At} erlaubt war. Wir verwenden die vor Definition 8.5.1 eingeführte Norm $\|\cdot\|_2$ auf $M_n(\mathbb{K})$.

8.5.9 Lemma

Für alle $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$ und $\|A^k\|_2 \leq \|A\|_2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die erste Ungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die zweite aus der ersten mittels Induktion. Details als Übung. \square

Bemerkung: Auf $M_n(\mathbb{K})$ gibt es außer $\|\cdot\|_2$ noch viele weitere Normen, die in unterschiedlichen Kontexten nützlich sind. Die wichtigste ist die Operator-Norm:

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_{\text{eukl}}}{\|\mathbf{v}\|_{\text{eukl}}}$$

(Übung: Dies ist eine Norm, und es gilt wieder $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.) Da $M_n(\mathbb{K})$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, sind alle Normen darauf äquivalent. Daher ist es für das Folgende irrelevant, welche man verwendet.

Die Norm $\|\cdot\|_2$ ist unter zahlreichen Namen bekannt: Hilbert-Schmidt-Norm, Frobenius-Norm, Schur-norm.

8.5.10 Satz

Sei $B \in M_n(\mathbb{K})$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$.

Beweis: Der Vektorraum $M_n(\mathbb{K})$ mit der Norm $\|\cdot\|_2$ ist vollständig, da er gleich \mathbb{K}^{n^2} mit der euklidischen Norm ist. Nach Satz 1.4.5 folgt daher die Konvergenz aus der absoluten Konvergenz, wir müssen also nur nachweisen, dass die Reihe reeller Zahlen $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{B^k}{k!} \right\|_2$ konvergiert. Dies folgt aus dem Majoranten-Kriterium, denn $\left\| \frac{B^k}{k!} \right\|_2 \leq \frac{\|B\|_2^k}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B\|_2^k}{k!}$ konvergiert (Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!}$ mit $C = \|B\|_2$). \square

Die Reihe e^{At} darf auch gliedweise nach t differenziert werden. Der Beweis ist derselbe wie für Reihen reeller Zahlen. Damit ist die Rechnung nach Definition 8.5.8 gerechtfertigt, und wir haben bewiesen:

8.5.11 Satz

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Das System $y' = Ay$ hat die Fundamentalmatrix $\Phi(t) = e^{At}$.

Berechnung von e^B

Damit Satz 8.5.11 nützlich ist, müssen wir e^{At} berechnen können. Dies direkt mittels der Definition zu machen, ist im Allgemeinen hoffnungslos. Es gibt aber einen Trick: Erst diagonalisieren! Gehen wir Schritt für Schritt vor:

▷ Falls B eine Diagonalmatrix ist, so lässt sich e^B schnell berechnen.

$$\text{Sei } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$\text{und somit } e^B = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

▷ Falls B diagonalisierbar ist, gilt (vgl. die Erinnerung an die Lineare Algebra nach Satz 8.5.7) mit $U = (v_1, \dots, v_n)$, wobei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren ist,

$$U^{-1}BU = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D = \text{diagonalisierte Matrix}}$$

Warum hilft das? Erstaunlicherweise gilt:

8.5.12 Satz

Es ist $e^{U^{-1}BU} = U^{-1}e^BU$ für alle $B, U \in M_n(\mathbb{K})$ mit U invertierbar.

Beweis: Für $(U^{-1}BU)^2$ lässt sich schreiben:

$$(U^{-1}BU)^2 = (U^{-1}BU) \cdot (U^{-1}BU) \stackrel{U \cdot U^{-1} = I}{=} U^{-1}B^2U$$

und allgemeiner

$$(U^{-1}BU)^k = (U^{-1}BU)(U^{-1}BU) \cdots (U^{-1}BU) = U^{-1}B^kU$$

da sich alle zwischen den B 's stehenden Faktoren U , U^{-1} wegekürzen (formaler Beweis mit Induktion). Somit folgt mittels der Exponentialreihe

$$\begin{aligned} e^{U^{-1}BU} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U^{-1}BU)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{-1}B^kU}{k!} \\ &= U^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) U = U^{-1}e^B U \end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir:

8.5.13 Satz

Angenommen $B \in M_n(\mathbb{K})$ ist diagonalisierbar. Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis aus Eigenvektoren, $Bv_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$e^B = UDU^{-1} \quad \text{mit } D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \quad \text{und } U = (v_1, \dots, v_n).$$

Beweis: Es gilt $U^{-1}BU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Mit Satz 8.5.12 und der Rechnung für Diagonalmatrizen folgt

$$U^{-1}e^B U = e^{U^{-1}BU} = e^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = D.$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit U und von rechts mit U^{-1} , folgt die Behauptung. □

Wenden wir dies auf $B = At$ an, erhalten wir für die Fundamentalmatrix $\Phi(t) = e^{At}$ des Systems $y' = Ay$

$$e^{At} = U \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) U^{-1}$$

Denn falls A diagonalisierbar ist mit Eigenvektoren (v_1, \dots, v_n) und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist auch At diagonalisierbar mit denselben Eigenvektoren, aber den Eigenwerten $\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t$. Das ist dieselbe Formel, die wir schon in Satz 8.5.7(3) auf andere Weise hergeleitet hatten.

Bemerkung: Die wichtigste Idee bei der Berechnung von e^B war, zunächst B mittels Konjugation (mit U) auf eine einfache Form (hier: eine Diagonalmatrix) zu bringen. Dieselbe Idee haben wir schon früher in anderem Gewand kennengelernt: Sie liegt Lemma 7.5.2 zugrunde. Denn die erste Rechnung in dessen Beweis lässt sich so formulieren: Sei U der Operator, der eine Funktion mit e^{ax} multipliziert, also $(Uf)(x) = f(x)e^{ax}$. Dann gilt

$$U^{-1}(D - a)U = D$$

(Denn dies ist äquivalent zu $(D - a)U = UD$, also $(D - a)(fe^{ax}) = (Df) \cdot e^{ax}$.) Genau wie für Matrizen folgt daraus sofort $U^{-1}(D - a)^n U = D^n$, das ist Lemma 7.5.2. Der Punkt ist, dass der Operator D 'einfacher' als $D - a$ ist – man kann den Kern von D^n sofort hinschreiben.

Der nicht-diagonalisierbare Fall

Wie berechnet man e^B , wenn B nicht diagonalisierbar ist?

Dies geht mit Hilfe der *Jordanschen Normalform*, einer Verallgemeinerung der Diagonalisierung. Der Satz von der Jordanschen Normalform besagt, dass es eine invertierbare Matrix U gibt, so dass $U^{-1}BU$ eine Blockdiagonalmatrix ist, wobei die Blöcke die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\lambda I}{D} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \end{pmatrix}}_N$$

haben. Dabei durchläuft λ die Eigenwerte von B , und zu jedem Eigenwert gibt es so viele Blöcke, wie seine geometrische Vielfachheit angibt. Ein solcher Block heißt **Jordan-Block**.

Wir betrachten hier nur den Spezialfall *eines* Jordan-Blockes $D + N$. Dann ist $D = \lambda I$, und N hat Einsen direkt oberhalb der Diagonalen und sonst überall Nullen. Die folgenden Eigenschaften sind fundamental:

8.5.14 Lemma

- (1) N ist nilpotent, genauer gilt $N^m = 0$, wobei m die Anzahl der Zeilen (oder Spalten) von N ist.
- (2) D und N kommutieren, d.h. $DN = ND$

Beachte, dass es viele Paare A, B von Matrizen gibt, für die $AB \neq BA$ ist!

Beweis: (1) Man rechne N^2, N^3, \dots aus und beobachte, dass sich mit jeder weiteren Potenz die Einsen um eine Stelle nach rechts verschieben (und die unterste Eins herausfällt). Für die $(m-1)$ te Potenz

$$\text{erhält man } N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und schließlich } N^m = 0.$$

- (2) Das ist klar, da $D = \lambda I$. □

Für kommutierende Matrizen gilt die übliche Potenzregel:

8.5.15 Satz

Wenn $A \cdot B = B \cdot A$, dann gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Achtung! Ohne die Voraussetzung gilt im Allgemeinen $e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$.

Beweis: Sei $A \cdot B = B \cdot A$. Dann ist

$$e^{A+B} = I + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2!} + \frac{(A+B)^3}{3!} + \dots,$$

dabei ist $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Wegen $AB = BA$ folgt dann $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Analog $(A+B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$ (exakt: mit Induktion über k), und daraus die Behauptung mittels des Cauchy-Produkts wie bei der Exponentialfunktion für Zahlen. □

Damit können wir berechnen:

$$e^{D+N} = e^{N+D} = e^N e^D = \left(I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^D$$

(Die Exponentialreihe für N bricht ab wegen $N^m = 0$.) Wir erhalten für die Lösung der Differentialgleichung:

8.5.16 Satz

Sei $A \in M_m(\mathbb{K})$. Angenommen, es gibt eine invertierbare Matrix U , so dass $U^{-1}AU = D + N$ ein Jordan-Block mit $D = \lambda I$ ist. Dann gilt

$$e^{At} = \left(I + t\tilde{N} + \dots + t^{m-1} \frac{\tilde{N}^{m-1}}{(m-1)!} \right) e^{\lambda t}$$

mit $\tilde{N} = UNU^{-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{U(D+N)tU^{-1}} = Ue^{Nt+Dt}U^{-1} = Ue^{Nt}e^{Dt}U^{-1} = U(I + tN + \dots + t^{m-1} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!})e^{\lambda t}U^{-1} \\ &= (I + t\tilde{N} + \dots + t^{m-1} \frac{\tilde{N}^{m-1}}{(m-1)!})e^{\lambda t} \end{aligned}$$

wegen $UN^kU^{-1} = (UNU^{-1})^k = \tilde{N}^k$. □

Beobachtung: Hier treten genau die Ausdrücke $t^j e^{\lambda t}$ auf, die wir schon von der linearen Gleichung n -ter Ordnung her kennen, wenn das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen hat!

In der Tat kann man zeigen, dass das lineare System, das einer solchen Gleichung zugeordnet ist, in diesem Fall niemals diagonalisierbar ist. Natürlich ergeben sich dann dieselben Lösungen wie für die Gleichung n -ter Ordnung berechnet.

Bemerkung: Der allgemeine Fall ist kaum komplizierter. Die Jordansche Normalform einer beliebigen Matrix A hat die Form $U^{-1}AU = D + N$, wobei D diagonal, N nilpotent und $DN = ND$ ist. (D braucht aber nicht konstante Diagonale zu haben.) Dann folgt

$$e^{At} = (I + t\tilde{N} + \dots + t^{m-1} \frac{\tilde{N}^{m-1}}{(m-1)!})Ue^{Dt}U^{-1}$$

mit $\tilde{N} = UNU^{-1}$.

Hier zeigt sich die wahre Stärke der Methode, e^{At} zu verwenden!

8.5.4 Variation der Konstanten für lineare Systeme

Nun haben wir uns ausführlich mit homogenen Systemen beschäftigt, wie aber löst man inhomogene Gleichungen der Art

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n ?$$

Wir nehmen an, dass wir ein Fundamentalsystem $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ der homogenen Gleichung $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ kennen. Mittels des Verfahrens der Variation der Konstanten, das wir nach Satz 7.2.3 kennengelernt haben, lässt sich dann eine Lösung des inhomogenen Systems durch Integration berechnen:

▷ Die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ ist

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i(t) = Y(t)\mathbf{c}, \quad Y(t) = (\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)), \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Beachte, dass der Konstantenvektor rechts steht, damit das Produkt Matrix mal Vektor richtig funktioniert.

▷ Nun ersetzen wir die Konstante \mathbf{c} durch eine Funktion; da hier \mathbf{c} ein Vektor ist, brauchen wir eine vektorwertige Funktion $t \mapsto \mathbf{c}(t)$, $J \rightarrow \mathbb{K}^n$. Wir setzen also

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{c}(t)$$

in die Gleichung ein und erhalten mit der Produktregel (wobei alles von t abhängt)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= Y'\mathbf{c} + Y\mathbf{c}' \\ &= AY\mathbf{c} + Y\mathbf{c}' \\ &= A\mathbf{y} + Y\mathbf{c}' \end{aligned}$$

Damit dies gleich $A\mathbf{y} + \mathbf{b}$ wird, muss $Y\mathbf{c}' = \mathbf{b}$ sein, also $\mathbf{c}' = Y^{-1}\mathbf{b}$. Die Matrix $Y(t)$ ist für jedes t invertierbar, da ihre Spalten $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$ nach Satz 8.5.4(2) für jedes t linear unabhängig sind.

Als Ergebnis erhalten wir:

8.5.17 Satz (Variation der Konstanten für lineare Systeme)

Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : J \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{b} : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Sei $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, und sei $Y = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ die matrixwertige Funktion mit Spalten $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Dann ist $Y(t)$ für alle t invertierbar, und eine Lösung der inhomogenen Gleichung $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ erhält man aus dem Ansatz

$$\mathbf{y}(t) = c_1(t)\mathbf{y}_1(t) + \dots + c_n(t)\mathbf{y}_n(t) = Y(t)\mathbf{c}(t)$$

als

$$\mathbf{y}(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} \mathbf{b}(t) dt.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung kann man auch direkt nachprüfen, dass die angegebene Formel eine Lösung liefert.

Für Y kann man zum Beispiel die Fundamentalmatrix verwenden. Für konkrete Rechnungen ist es aber ggf. einfacher, dies nicht zu tun, z.B. im Fall konstanter Koeffizienten mit diagonalisierbarem A : dann kann man $Y(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n)$ verwenden.

In der Herleitung oben haben wir stillschweigend verwendet:

8.5.18 Lemma

Die Produktregel ist für das Matrixprodukt anwendbar: $\frac{d}{dt} [Y(t)\mathbf{c}(t)] = Y'(t)\mathbf{c}(t) + Y(t)\mathbf{c}'(t)$

Beweis: Matrixprodukt ausschreiben und übliche Produktregel anwenden! □

Beispiel: Im Beispiel auf Seite 181 haben wir die DGL 2. Ordnung $y'' + py' + qy = b$ in ein System 1. Ordnung $\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$ übersetzt. p, q, y, b sind hierbei Funktionen von t .

Für dieses System führen wir nun die Variation der Konstanten durch. Sei y, \tilde{y} ein Fundamentalsystem der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$. Dann ist $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem für $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$. Wir setzen also $Z = (\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = \begin{pmatrix} y & \tilde{y} \\ y' & \tilde{y}' \end{pmatrix}$.

Variation der Konstanten für das System: Ansatz $\mathbf{z} = Z\mathbf{c}$ für eine vektorwertige Funktion $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Wie oben berechnet, führt das auf die Gleichung

$$Z\mathbf{c}' = \mathbf{b}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} y & \tilde{y} \\ y' & \tilde{y}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} yc_1' + \tilde{y}c_2' &= 0 \\ y'c_1' + \tilde{y}'c_2' &= b \end{aligned}$$

Das ist genau das Ergebnis, das wir bei der Herleitung in Abschnitt 7.7 erhalten haben! Damit wird die dort vielleicht etwas unmotiviert erscheinende Methode noch einmal gerechtfertigt.

8.6 Erste Integrale für Differentialgleichungen

Mit Hilfe des Begriffs des Differentials von Funktionen mehrerer Variablen können wir nun eine weitere wichtige Idee zur Untersuchung von Differentialgleichungen einführen.

8.6.1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Eine Funktion $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral** von V , falls E auf jedem Orbit von V konstant ist.

Analog spricht man von einem ersten Integral eines Differentialgleichungssystems. Erste Integrale sind äußerst nützlich beim Lösen von Differentialgleichungen.

Beispiel: $V(x, y) = (y, -x)^T$, das entspricht dem System $x' = y, y' = -x$. Ein erstes Integral ist $E(x, y) = x^2 + y^2$, da die Orbits von V Kreise um $(0, 0)$ sind (wie wir schon früher berechnet haben) und E auf jedem Kreis um $(0, 0)$ konstant ist.

Bemerkung: Bei diesem Beispiel ist $f(x^2 + y^2)$, mit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig, auch ein erstes Integral. Jedes erste Integral von V ist von dieser Form. Denn ist F erstes Integral von V , so gilt: Für jedes $r \geq 0$ hat F auf dem Kreis vom Radius r um $(0, 0)$ einen konstanten Wert, da dieser Kreis ein Orbit von V ist. Definiere $f(r^2)$ als diesen Wert. Dann ist $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Im Folgenden sei eine Differentialgleichung bzw. ein Vektorfeld V gegeben. Wir wollen die folgenden Fragen beantworten:

- ▷ Wie erkennt man, ob eine Funktion ein erstes Integral ist?
- ▷ Was nutzt es, ein erstes Integral zu kennen?
- ▷ Wie findet man erste Integrale?

Wie erkennt man, ob E ein erstes Integral für V ist?

Beispiel: Falls $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems $x' = y, y' = -x$ ist, so gilt für die Funktion $t \mapsto E(x(t), y(t)) = x(t)^2 + y(t)^2$:

$$[x(t)^2 + y(t)^2]' = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 2x(t)y(t) + 2y(t)(-x(t)) = 0$$

für alle t , d.h. die Funktion ist konstant in t . Da $(x(t), y(t))$ eine beliebige Lösung war, folgt, dass E ein erstes Integral ist.

Beachten Sie: Um nachzuprüfen, dass E ein erstes Integral ist, mussten wir das Differentialgleichungssystem nicht lösen!

Wir formulieren das allgemein:

8.6.2 Satz

Sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $E: U \rightarrow \mathbb{R}$. Sei außerdem E differenzierbar auf U . Dann gilt:
 E ist erstes Integral von $V \Leftrightarrow$ Für alle $a \in U$ ist $DE|_a(V(a)) = 0$.

Dies lässt sich auch als $\nabla E(a) \perp V(a)$ oder als

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i}(a) V_i(a) = 0$$

mit $V = (V_1, \dots, V_n)^T$ schreiben.

Beweis:

E ist erstes Integral

\Leftrightarrow Für alle Integralkurven $\gamma: I \rightarrow U$ von V ist $t \mapsto E(\gamma(t))$ konstant

\Leftrightarrow Für alle Integralkurven γ ist $\frac{d}{dt} E(\gamma(t)) = 0$ für alle t
 $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$ $\frac{d}{dt} E(\gamma(t)) = DE|_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = DE|_a(V(a)), a = \gamma(t)$

Da es durch jeden Punkt von U eine Integralkurve gibt, sind wir fertig. \square

Beispiel: Im Beispiel oben ist $V_1(x, y) = y$, $V_2(x, y) = -x$ und $E(x, y) = x^2 + y^2$, also

$$\frac{\partial E}{\partial x} V_1(x, y) + \frac{\partial E}{\partial y} V_2(x, y) = 2xy + 2y(-x) = 0$$

Das ist genau die Rechnung oben, wenn man dort das Argument t nicht hinschreibt.

Was nutzt es, ein erstes Integral zu kennen?

$n = 2$: Typischerweise ist $\{x : E(x) = c\} = E^{-1}(c)$ für die meisten $c \in \mathbb{R}$ eine Vereinigung von Kurven (nämlich für reguläre Werte c von E). Diese Kurven (oder Teile davon) sind die Orbits von V .

Beispiel: $V(x, y) = (y, -x)$ hat das erste Integral $E(x, y) = x^2 + y^2$. Also ist jeder Orbit von V Teil eines Kreises um $(0, 0)$, oder er besteht nur aus dem Nullpunkt.

Bemerkung: Ob eine gegebene Niveaumenge ein Orbit ist oder aus mehreren Orbits besteht, lässt sich meist durch Untersuchung der stationären Punkte von V (d. h. Punkte p mit $V(p) = 0$) leicht entscheiden, ähnlich wie im Beweis von Satz 8.4.5.

Im Beispiel hat V keine stationären Punkte außerhalb des Nullpunktes, und daraus folgt wie im Beweis von Satz 8.4.5, dass die Orbits wirklich die vollständigen Kreise sind. Hieraus können wir folgern, dass die Orbits von V Kreise um $(0, 0)$ sind, ohne irgendeine Differentialgleichung gelöst zu haben!

Also: Für $n = 2$ liefert einem ein erstes Integral meist direkt die Orbits.

$n > 2$: Die Mengen $E^{-1}(c)$ sind typischerweise $(n - 1)$ -dimensionale Hyperflächen ($n = 3$: Flächen). Damit liegt jeder Orbit von V in einer dieser (Hyper-)flächen \rightarrow Reduktion auf ein $(n - 1)$ -dimensionales Problem. Hat man ein zweites Integral F (also ein weiteres erstes Integral), so liegt jeder Orbit von V in einer der Mengen

$$\{y : E(y) = c_1, F(y) = c_2\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Mengen sind typischerweise (falls F unabhängig von E ist) $(n - 2)$ -dimensional. Analog kann man mittels m unabhängigen Integralen die Orbits auf $(n - m)$ -dimensionale Mengen »einsperren«, für $m = 1, \dots, n - 1$. Im optimalen Fall findet man $(n - 1)$ unabhängige Integrale und kann so die Orbits direkt bestimmen.

Bemerkungen: (1) Selbst wenn man nur ein erstes Integral findet, ist die Reduktion um eine Dimension oft nützlich. Jedoch sind die Mengen $E^{-1}(c)$ Mannigfaltigkeiten. Daher sollte man Differentialgleichungen nicht nur im \mathbb{R}^n , sondern allgemeiner auf Mannigfaltigkeiten untersuchen.

(2) Natürlich ist jede konstante Funktion E ein erstes Integral für ein beliebiges Vektorfeld. Das ist aber uninteressant.

Erste Integrale für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die Gleichung

$$x'' + x = 0$$

können wir in das System $x' = y$, $y' = -x$ übersetzen. Dieses System hat erstes Integral $E(x, y) = x^2 + y^2$. Da für Lösungen immer $y = x'$ ist, nennen wir den Ausdruck $E(x, x') = x^2 + (x')^2$ ebenfalls erstes Integral für die Gleichung $x'' + x = 0$. Rechnen wir nochmal direkt nach, dass er konstant entlang Lösungen ist: Mit der Kettenregel folgt

$$[E(x, x')] = [x^2 + (x')^2]' = 2xx' + 2x'x'' = 2x'(x + x'') = 0.$$

Wir können uns bei Gleichungen zweiter Ordnung also die Übersetzung in ein System erster Ordnung sparen.

Wir kommen nun zur schwierigsten Frage:

Wie findet man erste Integrale, zu gegebenen V ?

Eine allgemeine Antwort gibt es nicht (sonst wären alle Differentialgleichungen leicht zu lösen).

Wir stellen zwei Situationen vor, wo man erste Integrale finden kann.

- (1) Separation der Variablen liefert (wenn anwendbar) ein erstes Integral:

Wir erinnern uns: Um eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)b(y)$$

zu lösen, finde Stammfunktionen

$$A(x) = \int a(x)dx \quad B(y) = \int \frac{1}{b(y)}dy$$

In Satz 5.2.1 sahen wir, dass dann $B(y) = A(x) + c$ eine implizite Lösung ist, für jedes $c \in \mathbb{R}$. Dies bedeutete: Wenn man diese Gleichung nach $y = y(x)$ auflösen kann, so ist $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Neue Sichtweise:

Erinnerung (Satz ??): Lösen von $y' = a(x)b(y) \Leftrightarrow$ Finden der Orbits von $V(x, y) = (1, a(x)b(y))$.

Es gilt: $E(x, y) = A(x) - B(y)$ ist erstes Integral von V .

Denn $V_1 = 1$, $V_2 = a(x)b(y) \Rightarrow DE(V) = a(x) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{b(y)}\right)a(x)b(y) = 0$.

Man sagt auch: E ist erstes Integral von $y' = a(x)b(y)$.

- (2) Beschreibt die Differentialgleichung einen physikalischen Vorgang, so liefert jede sogenannte **Erhaltungsgröße** ein erstes Integral. Zum Beispiel sagt der Satz von der Erhaltung der Energie, dass die Gesamtenergie eines Systems erhalten bleibt. Die Gesamtenergie ist also eine Erhaltungsgröße. Weitere Erhaltungsgrößen sind Impuls und Drehimpuls.
- (3) Der **Satz von Noether** sagt, dass für Hamiltonsche Systeme (das ist eine große Klasse von Differentialgleichungssystemen, zu denen die meisten in der Physik auftretenden gehören) Symmetrien des Systems zu Erhaltungsgrößen führen. Zum Beispiel lässt sich in den Beispielen unten die Energieerhaltung als Konsequenz aus der Translationsinvarianz bzgl. t (also aus der Autonomie des Systems) und die Drehimpulserhaltung aus der Rotationsinvarianz des Systems (z.B. beim Keplerschen Problem) herleiten – auch ohne Physik-Kenntnisse.

Wir betrachten nun eingehend eine Klasse von Problemen, wo diese Überlegung anwendbar ist.

Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld. Wirkt auf ein Teilchen am Ort $x \in \Omega$ die Kraft $F(x)$, so bewegt sich das Teilchen nach dem Newtonschen Gesetz auf einer Kurve $t \mapsto x(t)$, die folgender Differentialgleichung genügt:

$$\underbrace{m}_{\text{Masse}} \cdot \underbrace{x''}_{\text{Beschleunigung}} = \underbrace{F(x)}_{\text{Kraft}}$$

Dies ist ein System von d Gleichungen zweiter Ordnung. Es ist im Allgemeinen nicht-linear, wenn F nicht zufällig linear ist. Also schwierig. Ein typischer Fall ist $F(x) = -c \frac{x}{\|x\|^3}$, das Gravitationsfeld. Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden $m = 1$, $c = 1$.

Der Fall $d = 1$. Die Gleichung lautet $x'' = F(x)$.

Behauptung: Sei U eine Stammfunktion für $-F$. Dann ist $E(x, x') = \frac{(x')^2}{2} + U(x)$ erstes Integral. Denn

$$\left[\frac{(x')^2}{2} + U(x)\right]' = x'x'' + x'U'(x) = x'(x'' - F(x)) = 0.$$

Wie kommt man auf E ? Mit Physikkenntnis: $(x')^2/2$ ist die kinetische Energie, da x' die Geschwindigkeit ist, und $U(x)$ die potentielle Energie. Deren Summe ist die Gesamtenergie des Teilchens, also konstant! Anders betrachtet, haben wir gerade das Gesetz der Erhaltung der Energie für diesen Kontext bewiesen.

Damit kann man die Orbits mittels der Niveaulinien von E bestimmen.

Beispiel (Schaukel): Löse $x'' = -\sin x$. Mit $y = x'$ und $U(x) = -\cos x$ ist $E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$ ein erstes Integral.

Bemerkung:

▷ **Wichtig:** Obwohl das Teilchen sich auf einer 1-dimensionalen Bahn bewegt, ist das System 2-dimensional! Das hat folgende Konsequenzen:

1. Nicht die Integralkurven von F sind von Bedeutung, sondern die von $V(x, y) = (y, F(x))$.
2. Eine Lösung ist nicht durch Angabe von $x(0)$ bestimmt, sondern durch Angabe von $x(0)$ und $x'(0)$.
3. Verschiedene Lösungen $t \mapsto x(t)$ können (und werden) sich kreuzen. Was sich nicht kreuzt, sind die Kurven $t \mapsto (x(t), x'(t))$. Verschiedene Lösungen entsprechen verschiedenen »Bewegungsarten« des Teilchens. Zum Beispiel kann es im Punkt $x(0) = p$ schnell oder langsam losfliegen.

▷ Durch eine weitere Integration kann man aus den Orbits sogar die Integralkurven bestimmen: Betrachten wir einen Orbit, der in der Niveaumenge $E^{-1}(C)$ liegt. Für die Lösung $t \mapsto x(t)$ gilt dann

$$\frac{1}{2}(x')^2 - \cos x = C.$$

Dies können wir mit Separation der Variablen lösen und erhalten

$$\pm \int \frac{1}{\sqrt{C + \cos x}} dx = t + C'.$$

Um $x(t)$ zu bestimmen, müsste man das Integral berechnen und dann die Umkehrfunktion bilden. Das Integral lässt sich nicht explizit berechnen, jedoch ist einiges darüber bekannt ist, da es zur Klasse der elliptischen Integrale gehört. Etwas Vorsicht ist auch mit den beiden Vorzeichen der Wurzel geboten.

Aber beachten Sie: Selbst wenn sich Integral und Umkehrfunktion nicht explizit berechnen lassen, ist durch die Bestimmung des Integrals schon viel gewonnen!

Der Fall $d > 1$. Wir betrachten das System

$$x'' = F(x)$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^d$. Hierbei ist F ein Vektorfeld auf \mathbb{R}^d .

Es lässt sich ein erstes Integral angeben, falls F ein Gradientenfeld ist, d. h., falls eine Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $F = -\nabla U$. Dann ist $E(x, x') = \|x'\|^2/2 + U(x)$ ein erstes Integral:

$$[\|x'\|^2/2 + U(x)]' = \langle x', x'' \rangle + \langle \nabla U(x), x' \rangle = \langle x', x'' - F(x) \rangle = 0.$$

Nicht alle Vektorfelder sind Gradientenfelder, viele der in der Physik vorkommenden Kraftfelder aber schon.

Beispiel: Das Keplerproblem: Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$x'' = -\frac{x}{\|x\|^3}$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dies beschreibt zum Beispiel die Bewegung eines Teilchens in einem Gravitationsfeld, das von einem im Nullpunkt befindlichen Körper erzeugt wird. Der Körper kann auch kugelförmig mit gleichmäßiger Massenverteilung sein. Zum Beispiel sollte die Bewegung der Planeten um die Sonne eine Lösung sein.

Das System hat 6 ‚Freiheitsgrade‘, d.h. das zugeordnete System erster Ordnung besteht aus 6 Gleichungen: Für x_1, x_2, x_3 und für x'_1, x'_2, x'_3 . Wir sollten also versuchen, 5 unabhängige Integrale zu finden! Erstaunlicherweise geht das.

Zur Vorbereitung sei an einige Rechenregeln über das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 erinnert: Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $v \times w \in \mathbb{R}^3$ der Vektor, der für alle $u \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$(*) \quad \langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w)$$

erfüllt. Da die rechte Seite eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \det(u, v, w)$ definiert, gibt es so einen Vektor, und er ist eindeutig (siehe die Bemerkung nach der Definition 2.2.1 des Gradienten). Explizit:

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $v \times w$ steht senkrecht auf v und w , wie sofort aus $(*)$ folgt.

Aus der definierenden Gleichung $(*)$ und/oder der expliziten Formel folgt leicht, dass die Abbildung $(v, w) \mapsto v \times w$ bilinear ist, und dass folgende Formeln gelten:

$$v \times w = -w \times v$$

$$v \times v = 0$$

$$\langle u, v \times w \rangle = \langle u \times v, w \rangle$$

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$$

$$\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\|, \quad \text{falls } v \perp w$$

Weiterhin gilt für Funktionen x, y einer Variablen t die Produktregel (nachrechnen!)

$$(x \times y)' = x' \times y + x \times y'.$$

Nun sind wir gerüstet und können Integrale für das Keplerproblem angeben.

(1) Die Energie

$$E = \frac{1}{2} \|x'\|^2 - \frac{1}{\|x\|}.$$

Dass dies ein Integral ist, folgt wegen $\nabla \frac{1}{\|x\|} = -\frac{x}{\|x\|^3}$ aus der allgemeinen Rechnung oben.

(2) Der Drehimpuls

$$L = x \times x'.$$

Es ist

$$L' = x' \times x' + x \times x'' = 0 + x \times \left(-x \frac{1}{\|x\|^3}\right) = 0$$

Da $L = (L_1, L_2, L_3)$ ein Vektor ist, erhalten wir drei Integrale!

(3) Der ‚Runge-Lenz-Vektor‘

$$A = x' \times L - \frac{x}{\|x\|}.$$

Wir rechnen

$$A' = x'' \times L + x' \times L' - \frac{x'}{\|x\|} - x \frac{\langle x, x' \rangle}{\|x\|^3}$$

Nun ist $L' = 0$ und

$$\begin{aligned} x'' \times L &= -\frac{1}{\|x\|^3} x \times (x \times x') = -\frac{1}{\|x\|^3} (\langle x, x' \rangle x - \langle x, x \rangle x') \\ &= -x \frac{\langle x, x' \rangle}{\|x\|^3} + \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

und damit folgt $A' = 0$.

Da A ein Vektor ist, erhalten wir wiederum drei Integrale.

Damit haben wir insgesamt 7 Integrale. Da wir nur 6 Freiheitsgrade haben, müssen zwischen diesen Abhängigkeiten bestehen. Zwei Abhängigkeiten können wir erkennen, wenn wir $\langle A, L \rangle$ und $\|A\|^2$ berechnen:

▷ Es ist $A \perp L$, denn

$$\langle A, L \rangle = \langle x' \times L, L \rangle - \frac{1}{\|x\|} \langle x, L \rangle = \langle x', L \times L \rangle - 0 = 0$$

da $L = x \times x' \perp x$.

▷ Wegen $x' \perp L$ ist $\|x' \times L\| = \|x'\| \cdot \|L\|$, außerdem ist

$$\begin{aligned} \langle x' \times L, x \rangle &= -\langle L \times x', x \rangle = -\langle L, x' \times x \rangle = -\langle L, -L \rangle \\ &= \|L\|^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \|x' \times L\|^2 - 2\langle x' \times L, \frac{x}{\|x\|} \rangle + \|\frac{x}{\|x\|}\|^2 \\ &= \|x'\|^2 \|L\|^2 - \frac{2}{\|x\|} \|L\|^2 + 1 \\ &= \left(2E + \frac{2}{\|x\|}\right) \|L\|^2 - \frac{2}{\|x\|} \|L\|^2 + 1 \\ &= 2E \|L\|^2 + 1 \end{aligned}$$

Wie erhalten wir nun die Planetenbahnen, also die Mengen $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$?¹ Alle Integrale enthalten sowohl x als auch x' , wir hätten aber gerne eine Gleichung, in der nur x vorkommt. Dazu berechnen wir

$$\langle A, x \rangle = \|L\|^2 - \|x\|$$

wobei wir die Definition von A und die oben hergeleitete Gleichung $\langle x' \times L, x \rangle = \|L\|^2$ verwendet haben. Das ist die gesuchte Gleichung!

Wir fassen zusammen: Für jede Lösung $x(t)$ des Keplerproblems sind die Größen, $E, L_1, L_2, L_3, A_1, A_2, A_3$ konstant. Zwischen ihnen bestehen die Relationen $\langle A, L \rangle = 0$, $\|A\|^2 = 2E\|L\|^2 + 1$. Sie legen die Bahn $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ wie folgt fest:

- ▷ Da L konstant und $x \perp L$ ist, liegt die Bahn in einer Ebene \mathcal{E} , nämlich der Ebene L^\perp .
- ▷ Der Vektor A liegt ebenfalls in \mathcal{E} , da $A \perp L$.
- ▷ Die Bahn ist nun die Lösungsmenge der Gleichung $\langle A, x \rangle = \|L\|^2 - \|x\|$, $x \in \mathcal{E}$. (Genauer: sie ist in der Lösungsmenge enthalten, doch sehen wir gleich, dass es die gesamte Lösungsmenge ist)

Wir wollen die Bahnen genauer beschreiben. Die Sache wird etwas übersichtlicher, wenn man o.B.d.A. $L = (0, 0, L_3)$ annimmt. Dann ist \mathcal{E} die x_1, x_2 -Ebene. Wir schreiben daher nun $x = (x_1, x_2)$. Damit bleibt nur noch die Frage:

Sei $A \in \mathbb{R}^2$. Was sind die Niveaumengen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle A, x \rangle + \|x\|$? Dies lässt sich leicht berechnen: Sei $A = (0, a)$, $a \geq 0$ (die anderen Fälle erhält man durch Rotation), dann ist

$$\begin{aligned} f(x) = C &\iff ax_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = C \iff x_1^2 + x_2^2 = (C - ax_2)^2, C - ax_2 \geq 0 \\ &\iff x_1^2 + (1 - a^2)x_2^2 + 2aCx_2 = C^2, ax_2 \leq C \end{aligned}$$

TODO: CHECK DASS UNGLEICHUNG OK, NUR EIN ZWEIG EINER HYPERBEL ETC.

Für $a = 1$ ist das eine Parabel, für $a < 1$ eine Ellipse und für $a > 1$ eine Hyperbel. Mit $\|A\|^2 = 2E\|L\|^2 + 1$ erhalten wir:

¹Dies sind die Projektionen der Orbits $\{(x(t), x'(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^6$ auf die ersten drei Komponenten.

Lösung des Keplerproblems: Die Bahnen mit $E < 0$ sind Ellipsen, die Bahnen mit $E = 0$ sind Parabeln und die Bahnen mit $E > 0$ sind Hyperbeln.

Da das System keine stationären Punkte hat (die Kraft ist immer ungleich Null), sind die Bahnen jeweils eine vollständige Ellipse, Parabel bzw. Hyperbel.

Zur Geschichte: Dass sich die Planeten auf Ellipsen bewegen, ist als Erstes Keplersches Gesetz bekannt. Kepler hat dies 1609 anhand von Messungen (vor allem von Tycho Brahe durchgeführt) entdeckt. Das Gravitationsgesetz hat Newton erst 1686 gefunden und damit dann auch das Keplersche Gesetz hergeleitet. Dies war eine der ersten Erfolge der zu der Zeit gerade von Leibniz und Newton erfundenen Infinitesimalrechnung.

Bemerkung: Für viele wichtige in der Physik vorkommende Systeme lassen sich nicht ausreichend viele Integrale bestimmen, mit denen die Bahnen so einfach bestimmt werden können. Viele Systeme fallen in eine der folgenden Kategorien. Dabei betrachten wir ein System mit $n = 2d$ Freiheitsgraden. Die auftretenden Begriffe können hier nicht erklärt werden.

- (1) Es gibt $d = \frac{n}{2}$ unabhängige erste Integrale. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an das System (es muss Hamiltonsch sein, das trifft auf physikalische Systeme meistens zu) und an die Integrale (dass sie ‚Poisson-kommutieren‘), reicht das schon aus, um mittels zusätzlicher Integrationen ein gutes Verständnis für das Verhalten der Lösungen zu bekommen. Diese Systeme nennt man **vollständig integrierbar**.

Beispiel: Kreisel.

- (2) Es gibt weniger als d Integrale (z.B. nur eins, die Energie). Solche Systeme weisen häufig ‚chaotisches‘ Verhalten auf – dieser Begriff wird in der Theorie der dynamischen Systeme präzisiert.

A Überblick: Ableitungskonzepte für Funktionen

$(V, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum (z. B. \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm), $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

▷ **Richtungsableitung:** Zu $a \in U$ und $h \in V$ sei (falls existent)

$$(A.1) \quad \partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \quad \left(=: \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a+th) \right).$$

Bedeutung: Wie schnell ändert sich $f(x)$, wenn sich x von a mit Geschwindigkeitsvektor h entfernt?

Gesamtobjekt: Zu festem $h \in V$ ist $\partial_h f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Spezialfall partielle Ableitung: Für $V = \mathbb{R}^n$, $h = e_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f := \partial_{e_i} f$$

Andere gebräuchliche Schreibweisen sind $\partial_i f$, $\partial_{x_i} f$ und f_{x_i} .

In Koordinaten ($V = \mathbb{R}^n$): $\partial_h f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i$ (falls f in a differenzierbar ist).

▷ **Differential:** Zu $a \in U$ sei $df|_a : V \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Abbildung, für die gilt:

$$(A.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df|_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

f heißt differenzierbar in a , falls so eine lineare Abbildung $df|_a$ existiert.

Bedeutung: $df|_a$ ist die beste lineare Approximation von f im Punkt a , d. h.

in Formeln: $f(a+h) = \underbrace{f(a) + df|_a(h)}_{\text{linear}} + o(\|h\|)$ für $h \rightarrow 0$

geometrisch: Der Graph von $df|_a$ ist (wenn man den Nullpunkt in den Punkt $(a, f(a))$ verschiebt) die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$.

(Die Graphen sind Teilmengen von $V \times \mathbb{R}$.)

Gesamtobjekt: Sei $L(V, \mathbb{R}) = \{\text{lineare Abbildungen } V \rightarrow \mathbb{R}\}$, dann $df : U \rightarrow L(V, \mathbb{R})$.

In Koordinaten ($V = \mathbb{R}^n$): $df|_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(a) h_i = (\partial_{x_1} f(a), \dots, \partial_{x_n} f(a)) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

Daher ist $df|_a$ durch die Zeilenmatrix $(\partial_{x_1} f(a), \dots, \partial_{x_n} f(a))$ gegeben (im Sinn der linearen Algebra: eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch eine $1 \times n$ -Matrix gegeben).

Andere übliche Schreibweisen: $Df|_a$, $df(a)$, $Df(a)$.

▷ **Gradient:** Auf V sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben (z. B. euklidisches Skalarprodukt im \mathbb{R}^n). Zu $a \in U$ sei $\nabla f(a) \in V$ der eindeutig bestimmte Vektor mit der Eigenschaft

$$\langle \nabla f(a), h \rangle = df|_a(h) \quad \text{für alle } h \in V.$$

Bedeutung:

$\nabla f(a)$ hat die Richtung des schnellsten Anwachsens von $f(x)$, wenn sich x von a mit Geschwindigkeit(-sbetrag) 1 entfernt (falls $\nabla f(a) \neq 0$).

$\|\nabla f(a)\|$ = die Änderungsrate von f in dieser Richtung (bei Geschwindigkeit = 1).

Gesamtobjekt: $\nabla f : U \rightarrow V$.

In Koordinaten ($V = \mathbb{R}^n$, euklidisches Skalarprodukt): $\nabla f(a) =$ der (Spalten-)Vektor mit Komponenten $\partial_{x_1} f(a), \dots, \partial_{x_n} f(a)$.

Bemerkungen:

- ▷ Falls f differenzierbar in a ist, d. h. falls $df|_a$ existiert mit (A.2), so ist

$$df|_a(h) = \partial_h f(a) \quad \text{für alle } h \in V.$$

Also sind $df|_a$ und $h \mapsto \partial_h f(a)$ dieselben Objekte.

Die Bedingung (A.2) ist aber etwas stärker als die Bedingung, dass $\partial_h f(a)$ für alle h existiert. Sie ist auf zwei Weisen stärker: Erstens muss $\partial_h f(a)$ linear von h abhängen, und zweitens muss der Grenzwert (A.1) gleichmäßig bzgl. der Richtungen von h gelten. Siehe Seite 47 für ein Beispiel, wo zwar $\partial_h f(a)$ für alle h existiert, aber nicht linear von h abhängt; es gibt auch Beispiele, wo es existiert und linear von h abhängt und trotzdem (A.2) nicht gilt.

Wie in Analysis I sind fast alle »vernünftigen« Funktionen differenzierbar. Ein wichtiges hinreichendes Kriterium (neben den Rechenregeln) für Differenzierbarkeit in a ist, dass die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von a existieren und stetig sind.

- ▷ $df|_a$, $\nabla f(a)$ und $(h \mapsto \partial_h f(a))$ enthalten dieselben Informationen (wenn $df|_a$ existiert), verkörpern aber unterschiedliche Vorstellungen. Alle sind wichtig, je nach Kontext.

- ▷ df ist nur durch f allein definiert. Im Gegensatz dazu: ∇f bezieht sich auf ein Skalarprodukt auf V .

Die erste Aussage stimmt jedenfalls für $\dim V < \infty$. Denn dann sind alle Normen auf V äquivalent, d. h. in (A.2) ist es irrelevant, welche Norm verwendet wird.

Dies ist dann relevant, wenn auf demselben Raum verschiedene Skalarprodukte betrachtet werden oder zumindest kein einzelnes kanonisch ausgezeichnet ist. Deshalb ist dann df ein »besseres« Objekt als ∇f .

Diese Situation tritt im Kontext von Mannigfaltigkeiten (z. B. Differentialgeometrie, globale Analysis) und in der allgemeinen Relativitätstheorie auf.

- ▷ Das Differential wird manchmal auch »totales Differential« genannt und die Kettenregel die »Regel vom totalen Differential«.

- ▷ Beziehung des Differentials zur »üblichen« Ableitung im Fall $n = 1$:

Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$, ist $df|_a(h) = f'(a)h$.

Mit anderen Worten: $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist isomorph zu \mathbb{R} , mittels der Abbildung

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \alpha \mapsto (\text{die Abbildung } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto \alpha h).$$

Dann ist $df = \rho \circ f'$:

$$df : U \xrightarrow{f'} \mathbb{R} \xrightarrow{\rho} L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

- ▷ Das Differential hat eine Verallgemeinerung auf Abbildungen mit mehrdimensionalem Wertebereich (und wird dann durch die Jacobi-Matrix dargestellt), der Gradient nicht.

B Überblick: Allgemeine Prinzipien für Differentialgleichungen

Dies ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Prinzipien und Methoden zur Behandlung von Differentialgleichungen, die wir kennengelernt haben (es gibt noch viel mehr...).

(Vorlesung Analysis IIa, SS 2018, D. Grieser)

Sie haben mehr davon, wenn Sie zuerst Ihre eigene Zusammenstellung machen und diese danach mit dieser hier vergleichen!

Allgemeine Gleichungen/Systeme

- ▷ 1 Gleichung n -ter Ordnung \rightarrow System von n Gleichungen 1-ter Ordnung
- ▷ Lösen eines autonomen Systems \leftrightarrow Bestimmen der Integralkurven eines Vektorfelds, dabei Anfangsbedingung \leftrightarrow Integralkurve durch gegebenen Punkt
- ▷ Nicht-autonome Systeme der Dimension n \leftrightarrow gewisse autonome Systeme der Dimension $n + 1$, genauer: $\frac{dy}{dx} = F(x, y) \leftrightarrow$ Vektorfeld $V(x, y) = (1, F(x, y))$
(hier $x \in I \subset \mathbb{R}$, $y \in U \subset \mathbb{R}^n$, $F(x, y) \in \mathbb{R}^n$)

▷ Orbits eines stetig differenzierbaren Vektorfelds auf $U \subset \mathbb{R}^n$ bilden eine Zerlegung von U .

▷ Allgemeine Aussagen über Lösungen:

Betrachte $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, mit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y , $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen.

Lösungen existieren lokal

Es gibt genau eine maximale Lösung.

Bedingung an F ist erfüllt, wenn F stetig differenzierbar

Falls $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ und F Lipschitz-stetig bzgl. y , dann: Lösungen existieren global (auf ganz I)

Lineare Gleichungen/Systeme

Variable Koeffizienten (= nicht-autonom = allgemeiner Fall):

Für eine Gleichung n -ter Ordnung oder ein System von n Gleichungen erster Ordnung gilt:

- ▷ n -dimensionaler Lösungsraum,
- ▷ Lösungen sind überall definiert, AWP ist eindeutig lösbar (n Anfangsbedingungen)
- ▷ Allgemeine inhomogene Lösung = allgemeine homogene Lösung + spezielle inhomogene Lösung. (dabei: (in)homogene Lösung' := Lösung der (in)homogenen Gleichung)
- ▷ Variation der Konstanten liefert spezielle inhomogene Lösung aus allgemeiner homogener Lösung.

- ▷ Allgemeine Lösung von $y' = ay + b$ mittels Multiplikation mit e^{-A} , $A = \int a$
- ▷ Alternativ: Allgemeine homogene Lösung im Fall $n = 1$ mittels Separation der Variablen (Formel)

Konstante Koeffizienten (= autonom; explizit lösbarer Spezialfall):

Gleichung n -ter Ordnung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(t)$, $y(t), b(t) \in \mathbb{R}$

Ansatz (homogene Gleichung): $y(t) = e^{\lambda t} \rightarrow$ charakteristisches Polynom $p(\lambda) = 0$

Bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms betrachte $t^k e^{\lambda t}$.

Spezielle Inhomogenitäten erlauben direkte Lösung (ohne Variation der Konstanten).

n -dimensionales System erster Ordnung, homogen $y' = Ay$, A $n \times n$ Matrix, $y(t) \in \mathbb{R}^n$

Erster Zugang: Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}v$, dann λ Eigenwert, v Eigenvektor von A , also $Av = \lambda v$. Dies führt zu allgemeiner Lösung, falls eine Basis aus Eigenvektoren existiert (d. h. A diagonalisierbar).

Zweiter Zugang: Lösung ist $y(t) = e^{At}y_0$ (y_0 Anfangsbedingung).

Zur Berechnung von e^{At} verwende Eigenvektoren und Eigenwerte, falls A diagonalisierbar.

e^{At} = Fundamentalmatrix.

Spezielle Lösungsverfahren

Separation der Variablen

Gleichung vom Bernoulli-Typ: Reduktion auf lineare Gleichung mittels Substitution $y = z^\alpha$

Gleichung vom Euler-Typ: Reduktion auf lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten mittels Substitution $x = e^t$ (oder Ansatz x^λ , bzw. $x^\lambda(\log x)^k$ entsprechend $t^k e^{\lambda t}$, bei mehrfachen Nullstellen des char. Pol.)

