Pseudodifferentialoperatoren

(Teil-)Skript zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II, WS 2016/17, sowie Theorie der Partiellen Differentialgleichungen, zuletzt im WS 2022/23

D. Grieser*

Inhaltsverzeichnis

---
*Stand: 1. Februar 2023. Vielen Dank an Markus Dafinger für Hilfe beim Erstellen des Skripts im WS 2012/13.

Einleitung

Pseudodifferentialoperatoren sind ein Kernstück der modernen Theorie der Partiellen Differentialgleichungen. Sie wurden in den 1960 Jahren erfunden. Die Klasse der Pseudodifferentialoperatoren enthält sowohl (lineare, partielle) Differentialoperatoren als auch die Lösungsoperatoren für elliptische Gleichungen. Damit bilden sie eine gemeinsame Verallgemeinerung von Differential- und (gewissen) Integraloperatoren.

Einige wichtige Anwendungen von ΨDOs sind:

- Konstruktion einer approximativen Inversen (Parametrix) für elliptische Differentialoperatoren; dadurch genaue Information über die Lösungen elliptischer Gleichungen.
- Mikrolokalisierung: Lokalisierung im x-Raum geschieht mittels einer Abschneidefunktion; will man analog im (x, ξ)-Raum lokalisieren, also ‚mikrolokalisieren', braucht man ΨDOs.
- Dadurch lassen sich detaillierte Informationen über Lösungen allgemeiner partieller Differentialgleichungen beweisen, z.B. der Satz über die Fortpflanzung von Singularitäten
- Spektraltheorie: Eigenschaften des Spektrums elliptischer Operatoren (z.B. Asymptotik der Eigenwerte, Zusammenhang von klassischem Chaos und Gleichverteilung von Eigenfunktionen) lassen sich mittels ΨDOs und der allgemeineren FIOs (Fourierintegraloperatoren) untersuchen.

- Globale Analysis: z.B. verwendet einer der Beweise des berühmten Indexsatzes von Atiyah und Singer ΨDOs.

ΨDOs sind ein zentrales Hilfsmittel der *mikrolokalen Analysis*.

Zu Pseudodifferentialoperatoren gibt es einige einführende Literatur, z.B.:

- M. Shubin, Pseudodifferential Operators and Spectral Theory (Springer, 1987)
- G. Folland, Introduction to Partial Differential Equations; 2nd edition, letztes Kapitel (Princeton University Press, 1995)
- H. Abels, Pseudodifferential and Singular Integral Operators (de Gruyter, 2011)
- A. Grigis und J. Sjöstrand, Microlocal Analysis for Differential Operators (Cambridge University Press, 1994)
- L. Hörmander, The Analysis of Partial Differential Operators III (Springer, 1985)

Von diesen finde ich Shubin am klarsten aufgebaut. Hörmander ist enzyklopädisch und für einen ersten Einstieg ungeeignet. Allerdings hat jede Darstellung ihre Eigenheiten, z.B. werden in Shubin zunächst allgemeinere oszillierende Integrale als die hier benötigten behandelt, was interessant (und für die allgemeineren Fourierintegraloperatoren wichtig), aber für einen ersten Einstieg unnötig kompliziert ist.

Daher dieses Skript. Ziel ist es, die Grundzüge der Theorie auf möglichst kurzem Weg darzustellen und dabei den Blick auf das Wesentliche zu lenken. Dazu gehört folgendes:

- ΨDOs verallgemeinern Differentialoperatoren, enthalten auch Lösungsoperatoren für elliptische Gleichungen.
- ΨDOs sind durch Integralkerne gegeben, deren Singularität auf der Diagonalen liegt.
- Die Singularität auf der Diagonalen wird durch das Symbol des ΨDOs beschrieben.
- Die Aussagekraft des ΨDO-Kalküls liegt in der Beschreibung dieser Singularität; daher ist es sinnvoll, ΨDOs modulo glättenden Operatoren zu betrachten.
- Adjungierte und Komposition von ΨDOs sind wieder ΨDOs (kleine Zusatzbedingung bei Komposition), und deren Symbole lassen sich im Wesentlichen explizit berechnen.
- Die Parametrix-Konstruktion für elliptische Operatoren, und dass man hierfür nur die kurze exakte Symbolsequenz für ΨDOs braucht.
- Einige Anwendungen, z.B. elliptische Regularität

Einige Details, die eher Nebenschauplätze sind, aber die technische Durchführung gelegentlich verkomplizieren, sind:

- Für den Beweis der Kompositionsformel ist es sinnvoll, ΨDOs zunächst allgemeiner durch Amplituden einzuführen (Funktionen von x, y, ξ) statt durch ihre Symbole (Funktionen von x, ξ).
- Für die Komposition muss man eigentlich getragene Operatoren betrachten.

Es gibt zahlreiche ‚Spielarten' für ΨDOs. Wir betrachten hier die lokale Theorie, bei der man annimmt, dass die Symbolabschätzungen nur lokal gleichmäßig (bzgl. x) gelten. Diese eignet sich als Einstieg, da man sich keine Gedanken über das Verhalten 'am Rand' ($x \to \partial\Omega$ oder $x \to \infty$ für $\Omega = \mathbb{R}^n$) machen muss.

Es gibt zahlreiche andere ΨDO-Kalküle, bei denen zusätzlich Bedingungen an das Verhalten gestellt werden, wenn sich x dem Rand nähert. Z.B. auf $\mathbb{R}^n$ dass die Abschätzungen gleichmäßig in x gelten, siehe z.B. das Buch von Abels. Diese sind ebenfalls sehr wichtig, aber neben der Singularität bei der Diagonale spielen hier gleichzeitig andere Kern-Eigenschaften eine Rolle. Diese Kalküle kann man wie aus einem Baukastensystem aus einzelnen Teilen zusammensetzen, und der hier behandelte lokale Kalkül ist der zentrale Baustein, auf dem alles andere aufbaut.

Es werden auch einige Anwendungen der Theorie der PsiDO angeschnitten, z.B. elliptische Regularität, Fredholmeigenschaft und Spektraleigenschaften elliptischer Operatoren auf kompakten Manngifaltigkeiten.

III.0 Der Schwartzsche Kernsatz

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen als Matrix dargestellt werden kann. Der Schwartzsche Kernsatz verallgemeinert dies auf eine große Klasse von Operatoren zwischen Funktionen- bzw. Distributionenräumen. Kurz gesagt, ist seine erstaunliche Aussage:

Jeder 'vernünftige' Operator ist ein Integraloperator.

Um dies mit Sinn zu füllen, müssen wir sagen, was ein vernünftiger Operator und was ein Integraloperator ist.

Lineare Algebra und Integraloperatoren

Erinnern wir uns zunächst an den endlich-dimensionalen Fall: Eine beliebige lineare Abbildung $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann durch eine $m \times n$ Matrix $K = (K_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ dargestellt werden. Dabei ist die Relation zwischen P und K wie folgt gegeben. Ist $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist die i-te Komponente von $Pu \in \mathbb{R}^m$ gleich

$$(Pu)_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j, \qquad i \in \{1, \ldots, m\} \tag{1}$$

Dies hat eine unmittelbare Verallgemeinerung im Rahmen der Maßtheorie: Seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$, $(M', \mathcal{A}', \mu')$ Maßräume und $K: M \times M' \to \mathbb{C}$ messbar, dann definiert

$$(Pu)(x) = \int_{M'} K(x, x') u(x') d\mu'(x') \quad \text{für } x \in M \tag{2}$$

einen Operator, der (messbare) Funktionen u auf M' in Funktionen Pu auf M abbildet.[1] Wir nennen P *Integraloperator* mit *Integralkern* K und schreiben manchmal $P = P_K$.

Die Formeln (1) und (2) sind formal sehr ähnlich: Ersetze i durch x, j durch x' und die Summe durch das Integral, und schreibe bei u, Pu und K Argumente statt Indices. Diese Ähnlichkeit kommt daher, dass (1) ein Spezialfall von (2) ist: Setze $M = \{1, ..., m\}$, $M' = \{1, ..., n\}$, μ, μ' Zählmaße.

Die aus der linearen Algebra zitierte Tatsache lässt sich also so umformulieren: Für endliche M, M' sind die linearen Abbildungen von Funktionen auf M' nach Funktionen auf M genau die Integraloperatoren.

Der Schwartzsche Kernsatz verallgemeinert dies auf den Fall, wo M, M' offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, allerdings muss man dann nur geeignete Funktionen/Distributionen betrachten, nur stetige lineare Abbildungen betrachten und als Kerne Distributionen zulassen.

Dies ist zunächst überraschend, da auf diese Weise auch Differentialoperatoren als Integraloperatoren geschrieben werden können!

[1] Auf welchen u dies definiert ist – d.h. das Integral konvergiert – und was für Funktionen Pu herauskommen, hängt von den Eigenschaften von K ab. Dies ist hier zunächst unwichtig. Trotzdem zwei Beispiele: Ist $K \in L^\infty(M \times M', \mu \times \mu')$, so bildet $P_K : L^1(M', \mu') \to L^\infty(M, \mu)$ ab. Ist $K \in L^2(M \times M', \mu \times \mu')$, so bildet $P_K : L^2(M', \mu') \to L^2(M, \mu)$ ab.

Beispiele für Integraloperatoren und ihre Integralkerne

- Sei E eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Die Faltung

$$(Pu)(x) = (E * u)(x) = \int E(x-x')u(x')dx'$$

ist ein Integraloperator mit Integralkern $K(x,x') = E(x-x')$.[2] Z.B. ist eine Lösung der Laplace-Gleichung durch einen Faltungsoperator gegeben: Sei

$$N(x) = \begin{cases} c_2 \log|x|, & n = 2 \\ c_n|x|^{2-n}, & n > 2 \end{cases} \tag{3}$$

mit geeigneten Konstanten c_n. Dann ist $u = N * f$ für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ definiert und eine Lösung der Gleichung $\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$.

- Die identische Abbildung $\mathrm{Id}: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aus der formalen Rechnung

$$u(x) = \langle \delta_x, u\rangle = \int \delta(x'-x)u(x')\,dx' = \int \delta(x-x')u(x')\,dx' \tag{4}$$

folgt $\mathrm{Id} = P_K$ mit $K(x,x') = \delta(x-x')$. Die genaue Bedeutung dieses formalen Integrals wird unten erklärt.

- Lineare Differentialoperatoren P. Leitet man (4) nach x_j ab und rechnet formal, erhält man

$$\partial_{x_j} u(x) = \int \partial_{x_j}\delta(x-x')u(x')dx', \tag{5}$$

also $\partial_{x_j} = P_{\partial_{x_j}\delta(x-x')}$, und allgemeiner

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) = \int \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \delta(x-x')u(x')dx' \tag{6}$$

also

$$P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \text{ hat Integralkern } K(x,x') = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \delta(x-x'). \tag{7}$$

Definition von Integraloperatoren, deren Kerne Distributionen sind

Die Beispiele zeigen, dass wir Differentialoperatoren als Integraloperatoren schreiben können, wenn wir Distributionen als Integralkerne zulassen. Daher sollten wir zunächst die Definition (2) auf den Fall erweitern, dass K eine Distribution ist. Hierbei sind immer $M = \Omega, M' = \Omega'$ Gebiete in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und $d\mu$, $d\mu'$ Lebesgue-Maß.

Um zu einer Definition für Distributionen K zu gelangen, rechnen wir zunächst im Falle einer Funktion $K \in L^1_{loc}(\Omega \times \Omega')$ und für $\psi \in C_0^\infty(\Omega')$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle P_K\psi, \varphi\rangle_\Omega &= \int_\Omega (P_K\psi)(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega\int_{\Omega'} K(x,x')\underbrace{\psi(x')\varphi(x)}_{=\varphi(x)\psi(x')}dx'dx = \\ &= \langle K, \varphi\otimes\psi\rangle_{\Omega\times\Omega'},\end{aligned}$$

wobei $(\varphi\otimes\psi)(x,x') := \varphi(x)\psi(x')$ das *Tensorprodukt* ist.

[2] Wiederum hängt Definitions- und Wertebereich von P von den Eigenschaften von E ab.

Definition 1. *Für $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$ sei der Operator $P_K : C_0^\infty(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert durch*

$$\langle P_K \psi, \varphi \rangle_\Omega := \langle K, \varphi \otimes \psi \rangle_{\Omega \times \Omega'} \ \forall \psi, \varphi. \tag{8}$$

K heißt ***Schwartz Kern*** *von P_K (oder Integralkern, oder einfach Kern[3]).*

Man sollte noch nachprüfen, dass das so definierte Funktional $P_K \psi$ tatsächlich eine Distribution auf Ω ist. Linearität ist klar, und Stetigkeit überlasse ich Ihnen als Übung.

Der Schwartzsche Kernsatz

Oben wurde zu jedem Kern $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$ ein Operator $P_K : C_0^\infty(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert. Der Schwartzsche Kernsatz sagt, dass jeder Operator auf diese Weise entsteht, sofern man zusätzlich Stetigkeit fordert. Genauer:

Satz 2.

a) Für jedes $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$ definiert (8) *einen stetigen linearen Operator*

$$P_K : C_0^\infty(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

b) Umgekehrt gibt es für jeden stetigen linearen Operator $P : C_0^\infty(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)$ genau ein $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$ mit $P = P_K$.

Mit anderen Worten: Die durch (8) *definierte Zuordnung $K \mapsto P_K$ definiert eine Bijektion*

$$\mathcal{D}'(\Omega \times \Omega') \to \{\textit{stetige lineare Operatoren } C_0^\infty(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)\}$$

Bei a) ist nur noch die Stetigkeit von P_K zu zeigen, das ist nicht schwierig. Der Beweis von b) ist schwieriger. Der Beweis von Satz 2 ist in [Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators 1] zu finden.

Beachten Sie, dass im Allgemeinen P_K glatte Funktionen in Distributionen abbildet. Z.B. für $K(x, x') = \delta(x)\delta(x')$ ist $(P_K u)(x) = u(0)\delta(x)$. Je nach Schwartz Kern kann der Operator $P = P_K$ auch 'bessere' Abbildungseigenschaften haben, z.B.:

$$P : C_0^\infty(\Omega') \to C^\infty(\Omega) \quad \text{(Bilder glatter Funktionen sind glatt), oder} \tag{9}$$
$$P : \mathcal{E}'(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{(P hat eine Fortsetzung auf Distributionen), oder sogar} \tag{10}$$
$$P : \mathcal{E}'(\Omega') \to C^\infty(\Omega) \quad \text{(P macht aus Distributionen glatte Funktionen)} \tag{11}$$

(jeweils möglicher- und typischerweise zusätzlich stetig in den jeweiligen Topologien). Zum Beispiel haben Differentialoperatoren (und auch die später definierten Pseudodifferentialoperatoren) die Eigenschaften (9) und (10), aber nicht (11). Ein Beispiel, das (9), aber nicht (10) erfüllt, ist $K(x, x') = \delta(x')$. Umgekehrt erfüllt $K(x, x') = \delta(x)$ (10), aber nicht (9). Dazu siehe auch (16). Zu (11) siehe Definition 11 und Satz 12.

Zusätzlich mag es, je nach Schwarz Kern, auch Fortsetzungen geben auf nicht kompakt getragene Distributionen/Funktionen, also z.B. $P : C^\infty(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)$ oder $P : C^\infty(\Omega') \to C^\infty(\Omega)$.[4] Dies führt auf den Begriff ‚eigentlich getragen', siehe Definition 35 und Proposition 36.

Im Folgenden werden wir untersuchen, wie Eigenschaften von K mit Abbildungseigenschaften von P_K korrelieren.

[3] nicht zu verwechseln mit dem Kern im Sinne der Menge $\{u : P_K u = 0\}$

[4] Für Operatoren vom letztgenannten Typ ist dann die Komposition definiert, das wird wichtig sein.

Träger-Eigenschaften von Integraloperatoren

Wir schreiben auch für Distributionen formal

$$(P_K\psi)(x) = \int K(x,x')\psi(x')dx'$$

statt (8). Was kann man aus $\operatorname{supp} K$ und $\operatorname{supp}\psi$ über $\operatorname{supp} P_K\psi$ schließen? Hierfür benötigen wir eine Definition.

Definition 3. *Sei $R \subset \Omega \times \Omega'$ und $M \subset \Omega$. Dann sei*

$$R \circ M := \{x : \exists\, x' \text{ mit } (x,x') \in R,\ x' \in M\}$$

Das heißt, $R\circ M$ besteht aus den x, die man durch 'Anwenden' der Relation R auf beliebige Elemente von M erhält.

Satz 4.

a) $\operatorname{supp} P_K\psi \subset \operatorname{supp} K \circ \operatorname{supp}\psi$

b) Falls P_K die Abbildungseigenschaften (9) *und* (10) *hat, so gilt für $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega')$*

$$\operatorname{sing\,supp} P_K\psi \subset \operatorname{sing\,supp} K \circ \operatorname{sing\,supp}\psi$$

Dies verallgemeinert unmittelbar ähnliche Aussagen über Faltungen. Diese ergeben sich als Spezialfall, wo $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^n$ und K die Form $K(x,x') = E(x-x')$ hat. Dann ist $\operatorname{supp} K \circ \operatorname{supp}\psi = \operatorname{supp} E + \operatorname{supp}\psi$. Der Beweis des Satzes läuft ähnlich wie in diesem Spezialfall (Übung[5]).

Ab jetzt betrachten wir nur den Fall $\Omega = \Omega'$. Folgende Menge spielt eine zentrale Rolle.

Definition 5. *Die **Diagonale** von $\Omega \times \Omega$ ist* $\operatorname{Diag}_\Omega := \{(x,x),\ x \in \Omega\}$

Beachte, dass $\operatorname{Diag}_\Omega$ als Relation die Identität ist, d.h. $\operatorname{Diag}_\Omega \circ M = M$ für alle M.

Beispiel (Differentialoperatoren): Sei $P = P(x, D_x)$ ein Differentialoperator. Nach (7) ist $P = P_K$ mit $K = P(x,D_x)\delta(x-x')$. Also ist

$$\operatorname{supp} K = \operatorname{sing\,supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega .$$

Aus Satz 4 folgt dann:

a) $\operatorname{supp} P\psi \subset \operatorname{Diag}_\Omega \circ \operatorname{supp}\psi = \operatorname{supp}\psi$
b) $\operatorname{sing\,supp} P\psi \subset \operatorname{Diag}_\Omega \circ \operatorname{sing\,supp}\psi = \operatorname{sing\,supp}\psi$.

Beides können wir direkt einsehen: Ein Differentialoperator kann weder Träger noch singulären Träger einer Distribution vergrößern. Denn ist die Distribution ψ auf einer offenen Menge gleich Null (bzw. glatt), so ist $P\psi$ auf derselben Menge ebenfalls gleich Null (bzw. glatt).

Das Beispiel motiviert folgende Begriffe.

[5] Bei (a) erhält man zunächst nur $\operatorname{supp} P_K\psi \subset \overline{\operatorname{supp} K \circ \operatorname{supp}\psi}$. Die Komposition ist jedoch abgeschlossen, da $\operatorname{supp}\psi$ kompakt und $\operatorname{supp} K$ abgeschlossen ist. Für (b) zerlegt man K und ψ in je zwei Teile, von denen einer nahe dem singulären Träger getragen und der andere glatt ist. Für die Komposition 'glatt $\circ$ Distribution' braucht man (die einfache Implikation in) Satz 12.

Definition 6.

a) $P : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *heißt* ***lokal*** $\Leftrightarrow$ *supp* $P\psi \subset \operatorname{supp}\psi,\ \forall\psi$

b) $P : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ *heißt* ***pseudolokal*** $\Leftrightarrow \operatorname{sing\,supp} P\psi \subset \operatorname{sing\,supp}\psi,\ \forall\psi$

Satz 7. *Sei* $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$*. Dann sind äquivalent:*

i) P_K *ist lokal*

ii) $\operatorname{supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii): Um ii) zu zeigen, genügt es, für beliebige 'Rechtecke' $U \times U' \subset \Omega \times \Omega$ mit $U, U' \subset \Omega$ offen und $U \cap U' = \varnothing$ zu zeigen, dass $K_{|U \times U'} = 0$ ist. Denn $\Omega \times \Omega \setminus \operatorname{Diag}_\Omega$ ist die Vereinigung aller dieser Rechtecke.

Nun ist $K_{|U\times U'}$ nichts Anderes als der Integralkern des Operators $C_0^\infty(U') \to \mathcal{D}'(U)$, der durch die Hintereinanderausführung der Abbildungen $C_0^\infty(U') \hookrightarrow C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{P_K} \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(U)$ gegeben ist (wobei die erste Abbildung als Fortsetzung durch Null und die letzte als Einschränkung auf U definiert ist). i) sagt, dass dieser Operator gleich Null ist. Also muss sein Integralkern gleich Null sein, also $K_{|U \times U'} = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i): Dies folgt direkt aus Satz 4 a) (siehe auch obiges Beispiel). □

Satz 8. *Sei* $\operatorname{supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega$ *und* K *habe endliche Ordnung. Dann ist* P_K *ein Differentialoperator mit Distributionskoeffizienten,* $P_K = \sum_\alpha a_\alpha(x) D^\alpha$*.*

Falls zusätzlich $P_K : C_0^\infty \to C^\infty$ *abbildet, so sind die Koeffizienten* a_α *glatt.*

Beweis: (Skizze) Wenn $\operatorname{supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega$, dann muss K eine Linearkombination mit Distributionskoeffizienten und Ableitungen von $\delta_{\operatorname{Diag}_\Omega} = \delta(x - x')$ sein. Dies verallgemeinert den Satz, dass eine Distribution K mit $\operatorname{supp} K \subset \{0\}$ eine Linearkombination von Ableitungen von δ sein muss, und lässt sich ähnlich beweisen. Siehe Satz 2.3.5 in Hörmander (Band I). Siehe auch Satz 5.2.3 in Hörmander I und den letzten Absatz in den Notes zu Kapitel V dort. □

Kombiniert man die Aussagen von Satz 7 und Satz 8 und betrachtet man das Beispiel der Differentialoperatoren, dann folgt:

$$P_K \text{ lokal und } K \text{ endlicher Ordnung } \Leftrightarrow P_K \text{ ist ein Differentialoperator.}$$

Nun wollen wir uns ein Beispiel eines pseudolokalen Operators ansehen. Im $\mathbb{R}^3$ ist $\frac{c}{|x|}$ eine Fundamentallösung des Laplace-Operators, d.h. der Faltungsoperator

$$(P_K u)(x) = \int \frac{c}{|x - x'|} u(x') dx' \tag{12}$$

ist ein Lösungsoperator für die Laplace-Gleichung. Dieser Operator ist nicht lokal, aber pseudolokal. Dies zeigt der nächste Satz.

Satz 9. *Sei* $K \subset \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ *derart, dass* $P_K : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$*, dann sind äquivalent:*

i) P_K *ist pseudolokal*

ii) $\operatorname{sing\,supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega$

Beweis: Ganz analog zum Beweis von Satz 7, wobei man für i)$\Rightarrow$ ii) noch die Aussage braucht, dass glättende Operatoren glatte Kerne haben, siehe Satz 12. □

Aus Satz 9 folgt leicht folgender Satz über Fundamentallösungen E, den wir früher schon einmal bewiesen haben:

Satz 10. *Sei P ein Differentialoperator auf $\mathbb{R}^n$ mit konstanten Koeffizienten und E eine Fundamentallösung für P, d.h. $PE = \delta$. Dann sind äquivalent:*

i) *P ist hypoelliptisch d.h.* $\operatorname{sing\,supp} Pu = \operatorname{sing\,supp} u$

ii) $\operatorname{sing\,supp} E = \{0\}$.

Beweis: Betrachte den Operator P_K mit $K(x, x') = E(x - x')$. Wie früher gezeigt, ist der Faltungsoperator P_K ein Inverses zu P auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 9 gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{sing\,supp} E = \{0\} &\Leftrightarrow \operatorname{sing\,supp} K = \operatorname{Diag}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow P_K \text{ pseudolokal}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{sing\,supp} P_K f \subset \operatorname{sing\,supp} f \ \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\\ &\Leftrightarrow \operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp} Pu \, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz gilt wegen $P_K = P^{-1}$. Da die umgekehrte Inklusion $\operatorname{sing\,supp} u \supset \operatorname{sing\,supp} Pu$ sowieso gilt (denn P ist pseudolokal), folgt die Behauptung. □

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}P_K \text{ lokal } &\Leftrightarrow \operatorname{supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega\\ P_K \text{ pseudolokal } &\Leftrightarrow \operatorname{sing\,supp} K \subset \operatorname{Diag}_\Omega\end{aligned}$$

Glättende Operatoren

(Bemerkung: Hier und im folgenden Abschnitt könnte man zwar wieder verschiedene Ω, Ω' betrachten, aber wir belassen es der Einfachheit halber bei $\Omega = \Omega'$.)

Definition 11. *Sei $P : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ linear und stetig. P heißt **glättend**, falls P eine stetige Fortsetzung nach $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit Werten in $C_0^\infty(\Omega)$ hat, genauer falls $P : \mathcal{E}'(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ stetig ist.*

D.h., P macht aus beliebig singulären Distributionen glatte Funktionen, ‚glättet' also die Singularitäten.

Satz 12. *Sei $K \subset \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$. Dann sind äquivalent:*
i) P_K ist glättend
ii) $K \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$

Beweis: ii) $\Rightarrow$ i): Ist K glatt, so ist für $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$

$$(P_K u)(x) = \int K(x, x') u(x') dx' = \langle u, K(x, .)\rangle_{x'}, \tag{13}$$

eine glatte Funktion von x, nach dem Satz über Parameterabhängigkeit bei Distributionen.
Für i) $\Rightarrow$ ii) siehe Hörmander (ähnlich zum Beweis des Schwarzschen Kernsatzes). □

Es gibt also viele glättende Operatoren: Alle P_K mit glattem Kern K.
Beachte: Ein Differentialoperator $\neq 0$ ist niemals glättend.

Adjungierte, Komposition

Zunächst sei an folgende Definition erinnert: Das *Transponierte* P^t eines Operators P ist durch die Gleichung

$$\langle P\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, P^t \psi \rangle \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{14}$$

charakterisiert, das (formal) *Adjungierte* P^* durch dieselbe Gleichung, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ durch $\langle\ ,\ \rangle_{L^2}$ ersetzt ist.[6]

Hierbei sollten noch Definitions- und Wertebereich angegeben werden. Das Grundprinzip ist dabei: Wenn $P : V \to W$, so $P^t, P^* : W^* \to V^*$, wobei V^* der Dualraum von V ist. Die Rolle von V, V^* bzw. von W, W^* kann dabei auch vertauscht werden. Typische Beispiele sind

$$P : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow P^t : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) \tag{15}$$

$$P : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega) \Rightarrow P^t : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) \tag{16}$$

Im ersten Fall können wir (14) als Definition der Distribution $P^t\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auffassen, wenn wir die rechte Seite als Anwendung von $P^t\psi$ auf die Testfunktion φ auffassen.
Im zweiten Fall macht (14) sogar für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega)$ Sinn.

Wie bestimmt man P^t, P^* mittels der Schwartz-Kerne?

Satz 13. *Sei $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$. Dann gilt*

$$(P_K)^t = P_{K^t}, \quad (P_K)^* = P_{K^*}$$

mit

$$K^t(x, x') := K(x', x), \quad K^*(x, x') = \overline{K(x', x)}.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen.

Die Komposition kann auch mittels der Kerne ausgedrückt werden: Formal sieht man leicht, dass $P_K \circ P_L = P_M$ mit

$$M(x, x'') = \int K(x, x')L(x', x'')dx' \tag{17}$$

gilt. Dieses Integral (und auch die Komposition selbst) ist allerdings nur unter gewissen Bedingungen an K, L definiert (mögliche Probleme: Integrierbarkeit; bei Distributionen K, L: Produktbildung; Wertebereich von Q ist nicht im Definitionsbereich von P enthalten). Mehr dazu bei der Komposition von Pseudodifferentialoperatoren.

Faltungsoperatoren

Ein wichtiger Spezialfall im Fall $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^n$:

Satz 14. *Für einen Operator $P = P_K$, $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:*

(i) P ist ein Faltungsoperator, d.h. $K(x, x') = E(x - x')$ für ein $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so dass $Pu = E * u$.

(ii) P ist translationsinvariant, d.h. mit $T_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x - y$ gilt

$$P \circ T_y^* = T_y^* \circ P \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \tag{18}$$

[6] Hierbei ist $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int f\overline{g}$, $\langle f, g\rangle = \int fg$ für Funktionen f, g.

Falls P ein Differentialoperator ist, so ist dies weiterhin äquivalent zu

(iii) P hat konstante Koeffizienten.

Beweis als Übung. Zur Bedeutung von Gleichung (18): für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $T_y^* u$ die um y verschobene Funktion (d.h. der Graph wird um y verschoben). Translationsinvarianz bedeutet: erst verschieben, dann P anwenden = erst P anwenden, dann verschieben. Äquivalent dazu ist $T_{-y}^* \circ P \circ T_y^* = P$ (Invarianz unter Konjugation mit T_y^*).

III.1 ΨDOs, Grundidee

Die Grundidee von ΨDOs wird am Beispiel des Lösens elliptischer PDGen illustriert. Uns sind bereits zwei Methoden bekannt, wie man solche Gleichungen lösen kann ($P(D)$ ist wie immer ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und $D = \frac{1}{i}\partial_x$):

A) Falls $P = P(D)$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, so kann man $Pu = f$ lösen, indem man

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(\xi)}\mathcal{F}f\right) \tag{19}$$

mithilfe der *Fouriertransformation* $\mathcal{F}$ berechnet. Dies funktioniert, falls $P(\xi) \neq 0 \; \forall \xi$, und man hat dann sogar eine *explizite* Formel für u.

B) Eine andere Möglichkeit ist die *Hilbertraummethode*, welche eher *abstrakt* ist. (Nichtkonstruktiver Existenzbeweis)

ΨDOs sind eine Verallgemeinerung von A) auf den Fall variabler Koeffizienten. Dabei ergeben sich zunächst zwei Probleme:

1) Wir müssen eine analoge Formel wie (19) für variable Koeffizienten finden.
2) Die Nullstellen von $P(\xi)$ könnten dazu führen, dass die rechte Seite in (19) nicht (im klassischen Sinn) existiert. Wir werden sehen, dass Nullstellen von $P(\xi)$ für viele Fragen (z.B. Regularität) unproblematisch sind, wenn P elliptisch ist. In diesem Fall liegen die Nullstellen in einer kompakten Menge (von ξ's).[7]

Wir konzentrieren uns vorerst auf 1). Zur Vereinfachung betrachten wir $x \in \mathbb{R}^n$ und wir schreiben lineare PDOen als

$$P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

und ihr Symbol als

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Da wir Problem 2) vermeiden wollen, nehmen wir zunächst an, dass $p(x, \xi) \geqslant c < \xi >^k$, $c > 0$ für alle x, ξ. Die Lösungsformel für $P(x, D)u = f$ im Fall konstanter Koeffizienten lautet

$$u(x) = (Qf)(x) = \int e^{ix\xi} \frac{1}{p(\xi)} \hat{f}(\xi)\, đ\xi$$

[7] Allerdings ist Elliptizität für diese Kompaktheitsaussage nicht notwendig, wie das Beispiel $P(\xi_1, \xi_2) = 1 + \xi_1^2 + \xi_2^4$ zeigt. Elliptizität wird später auch in anderer Weise wichtig.

Es liegt nahe, im Fall variabler Koeffizienten

$$(Qf)(x) = \int e^{ix\xi} \frac{1}{p(x,\xi)} \hat{f}(\xi)\, đ\xi \tag{20}$$

als Lösung von $PQf \overset{?}{=} f$ zu versuchen. Wir rechnen dies nach:

$$\begin{aligned}
&P(Qf)(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x) D_x^\alpha \int e^{ix\xi} \frac{1}{p(x,\xi)} \hat{f}(\xi)\, đ\xi = \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int a_\alpha(x) D_x^\alpha \left(e^{ix\xi} \frac{1}{p(x,\xi)} \right) \hat{f}(\xi)\, đ\xi = \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int e^{ix\xi} a_\alpha(x) \left(\xi^\alpha \frac{1}{p(x,\xi)} + \sum_{\beta<\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xi^\beta D_x^{\alpha-\beta} \frac{1}{p(x,\xi)} \right) e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, đ\xi = \\
&= f(x) + (Rf)(x),
\end{aligned}$$

wobei $\beta < \alpha$ bedeutet, dass $\beta_i \leqslant \alpha_i \forall i$, aber $\beta \neq \alpha$. Es gilt also

$$PQ = I + R\,,$$

wobei

$$\begin{aligned}
(Rf)(x) &= \int e^{ix\xi} r(x,\xi) \hat{f}(\xi)\, đ\xi \quad \text{mit} \\
r(x,\xi) &= \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x) \sum_{\beta<\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \xi^\beta D_x^{\alpha-\beta} \frac{1}{p(x,\xi)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Der Ausdruck $r(x,\xi)$ sieht kompliziert aus, aber wesentlich ist folgende Eigenschaft:

$$|r(x,\xi)| \leqslant C < \xi >^{-1} \qquad \text{für große } |\xi| \text{ (Verhalten bei } \pm\infty). \tag{22}$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&p \geqslant c < \xi >^k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} \leqslant C < \xi >^{-k}, \\
&D_x^\gamma \frac{1}{p} \leqslant C < \xi >^{-k} \qquad \text{(werden wir später nachrechnen) und} \\
&\beta < \alpha,\ |\alpha| \leqslant k \quad \Rightarrow \quad |\xi^\beta| \leqslant < \xi >^{k-1}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nochmal $PQ = I + R$, so stellen wir fest, dass R im Vergleich zu I in gewisser Weise "klein" ist (z.B. können wir I wie in (22) schreiben, wobei r durch 1 ersetzt ist; später werden wir sehen, dass R kompakt ist auf kompakten Gebieten). Ein Operator Q, der P bis auf 'kleine' Fehler invertiert, heißt *Parametrix* von P.

Beachte, dass wir P in der Form

$$(Pu)(x) = \int e^{ix\xi} p(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, đ\xi \tag{23}$$

schreiben können, ganz analog zur Parametrix Q in (20) und zum Restterm R in (21). Bei diesen war p durch $\frac{1}{p}$ bzw. r ersetzt. Pseudodifferentialoperatoren werden (im Wesentlichen) Operatoren dieser Form sein.

Unser Vorgehen wird sein:

1. Wir definieren und untersuchen eine Klasse von Funktionen (sogenannte Symbole), die wir statt p in Ausdrücken wie (23) zulassen wollen. Dies liefert eine Klasse von Operatoren, die sowohl P als auch die obigen Q und R enthält.
2. Wir untersuchen deren Eigenschaften: Abbildungseigenschaften, Schwartz-Kerne, Pseudolokalität.
3. Eine zentrale Frage ist: Wenn P und Q ΨDOs sind, sind dann $P \circ Q$ und P^t ΨDOs? Diese Fragen sind bei naiver Rechnung nicht einfach zu beantworten. Die Sache wird aber erleichtert, wenn man zunächst ΨDOs etwas allgemeiner definiert als oben motiviert. In der größeren Allgemeinheit ist die Antwort dann leichter. Dann zeigen wir ('Reduktion'), dass die größere Klasse in Wirklichkeit gleich der ursprünglichen ist.

III.2 Symbole

Was haben $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $\frac{1}{p(x,\xi)}$ und deren Produkte und Ableitungen gemeinsam? Es stellt sich heraus, dass folgende Eigenschaft fundamental ist.

Definition 15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $m \in \mathbb{R}$. Definiere*

$$S^m(\Omega,\mathbb{R}^n) := \{p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n\ \forall K \Subset \Omega\ \exists C_{\alpha,\beta,K} \text{ mit}$$
$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K} < \xi >^{m-|\beta|}$$
$$\text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in K\} \tag{24}$$

Wenn $p \in S^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$, dann nennen wir p ein **Symbol** der **Ordnung** m. In Worten umschrieben sind die wesentlichen Eigenschaften eines Symbols:

- p ist glatt
- p wächst höchstens wie $|\xi|^m$ für $|\xi| \to \infty$ (lokal gleichmäßig in x)
- Für jede ξ-Ableitung von p verbessert sich die Abschätzung um $|\xi|^{-1}$. Für jede x-Ableitung von p gilt dieselbe Abschätzung.

Beispiele:

1. $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, alle $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, dann ist $p \in S^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist $m \in \mathbb{N}_0$.
2. Ist $p \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n\backslash 0))$ positiv homogen in ξ vom Grad $m \in \mathbb{R}$, d.h.

   $$p(x,t\xi) = t^m p(x,\xi) \qquad \text{für alle } t > 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n\backslash 0$$

   so ist $p(x,\xi)\chi(\xi) \in S^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine (im Folgenden häufig verwendete) Abschneidefunktion mit den Eigenschaften

   $$\chi(\xi) = \begin{cases} 0 \text{ für } |\xi| \leqslant 1 \\ 1 \text{ für } |\xi| \geqslant 2 \end{cases} \tag{25}$$

3. $p(x,\xi) = e^{i\xi}$ (für $n = 1$). Wegen $D_\xi^\beta p = e^{i\xi}\ \forall\beta$ ist p *kein Symbol*, da sich die Abschätzung bei keiner ξ-Ableitung verbessert.

   (Genauer: Wäre p ein Symbol der Ordnung m, so müsste $D_\xi^\beta p(\xi)$ im Fall $\beta > m$ für $\xi \to \infty$ gegen Null gehen, das ist aber nicht der Fall.)

Proposition 16. *Mit $S^m := S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt:*

a) $m \leqslant m' \Longrightarrow S^m \subset S^{m'}$

b) $S^m \cdot S^{m'} \subset S^{m+m'}$

c) $D_{x_j} : S^m \to S^m$
$D_{\xi_j} : S^m \to S^{m-1}$

d) Sei $p \in S^m$ *und* $|p(x,\xi)| \geqslant c|\xi|^m$, *für* $|\xi| \geqslant R$, $c > 0$. *Sei* $\chi_R(\xi) = \chi(\frac{\xi}{R})$ *mit* χ *aus* (25). *Dann ist*

$$q(x,\xi) = \frac{\chi_R(\xi)}{p(x,\xi)} \in S^{-m}$$

Beweis: a) klar

b) Wir prüfen zunächst die Symbolabschätzung ohne Ableitungen nach:
Aus $|p| \leqslant C < \xi >^m$, $|p'| \leqslant C < \xi >^{m'}$ folgt $|pp'| \leqslant C < \xi >^{m+m'}$. Mit Ableitungen:

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta (pp')| = |\sum_{\gamma \leqslant \alpha} \sum_{\delta \leqslant \beta} \binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{\delta} (D_x^\gamma D_\xi^\delta p)(D_x^{\alpha-\gamma} D_\xi^{\beta-\delta} p')| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{\delta \leqslant \beta} < \xi >^{m+m'-(|\delta|+|\beta-\delta|)} = C' < \xi >^{m+m'-|\beta|}$$

c) klar

d) q ist glatt, da p auf $\operatorname{supp} \chi_R$ keine Nullstellen hat, und es gilt:

$$|q(x,\xi)| \begin{cases} \leqslant C|\xi|^{-m} & \text{in } |\xi| \geqslant R \\ = 0 & \text{in } |\xi| \leqslant R, \end{cases}$$

also $|q(x,\xi)| \leqslant C < \xi >^{-m} \quad \forall\, x, \xi$. Dann zeigt man mit Induktion über $|\alpha| + |\beta|$

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta \frac{\chi_R}{p} = \frac{r}{p^{|\alpha|+|\beta|+1}}, \; r \in S^{m|\alpha|+(m-1)|\beta|}$$

Daraus folgt dann die Behauptung. Für $\alpha = \beta = 0$ stimmt das, und

$$\alpha_j \to \alpha_j + 1: \quad D_{x_j} \frac{r}{p^N} = \frac{D_{x_j} r}{p^N} - N \frac{r D_{x_j} p}{p^{N+1}} = \frac{p D_{x_j} r - N r D_{x_j} p}{p^{N+1}},$$
$$\beta_j \to \beta_j + 1: \quad D_{\xi_j} \frac{r}{p^N} = \frac{p D_{\xi_j} r - N r D_{\xi_j}}{p^{N+1}}.$$

Im ersten Fall nimmt die Ordnung des Zählers um m zu, im zweiten um $m-1$, damit folgt der Induktionsschluss. □

Manchmal betrachten wir auch Symbole, die nicht von x abhängen:

$$S^m(\mathbb{R}^n) := \{p \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \exists C_\alpha : |D_\xi^\alpha p(\xi)| \leqslant C_\alpha < \xi >^{m-|\alpha|}\}$$

Außerdem ist folgende Schreibweise oft nützlich:

$$S^{-\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Funktionen in $S^{-\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind also glatt auf $\Omega \times \mathbb{R}^n$ und fallen für $|\xi| \to \infty$ mit allen Ableitungen schnell ab, lokal gleichmäßig in x. Offenbar gilt

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

(der Schwartz-Raum).

Fouriertransformation von Symbolen, konormale Distributionen

Als Vorbereitung auf die Untersuchung von ΨDOs betrachten wir hier Symbole, die nur von ξ abhängen, und deren (inverse) Fouriertransformation.

Satz 17. *Sei $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Die inverse Fouriertransformation $\check{p}$ hat folgende Eigenschaften.*

a) $\operatorname{sing\,supp} \check{p} \subset \{0\}$. *Genauer:* $w^\beta \check{p}(w) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ *für* $|\beta| > m+n+k$

b) $\check{p}\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *mit Abschneidefunktion* χ *wie in* (25)

c) Falls $\check{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *so ist* $p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap\limits_{m \in \mathbb{R}} S^m(\mathbb{R}^n)$

Bemerkungen:

- $S^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, also ist $\check{p} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.
- Der im Folgenden wichtigste Teil ist a). Er zeigt, dass die Symbolabschätzungen von p (Verhalten $\xi \to \infty$) die Lage (und 'Stärke') der Singularität von $\check{p}$ bestimmen: Singularität bei Null entspricht wenig Oszillation für große ξ. Dazu zwei Beispiele mit $n = 1$:

  a) $p(\xi) = \xi^k \quad \Rightarrow \quad \check{p} = c\delta^{(k)}$.

  b) $p(\xi) = e^{i\xi}$ ist kein Symbol, $\check{p} = 2\pi\delta(w+1)$ und $\operatorname{sing\,supp} \check{p} = \{-1\}$
- b) drückt aus, dass Glattheit von p schnelles Abfallen von $\check{p}$ bei unendlich bewirkt.
- c) kehrt a) um: Ist p Symbol und hat $\check{p}$ keine Singularität, so muss die Symbolordnung $-\infty$ sein.

Beweis: a) $w^\beta \check{p}(w) = \pm \widecheck{(D_\xi^\beta p)}$. Wegen $|D_\xi^\beta p| \leqslant C_\beta < \xi >^{m-|\beta|}$ ist $D_\xi^\beta p \in L^1$ für $m - |\beta| < -n$. Die (inverse) Fouriertransformation einer L^1-Funktion ist in C_b^0. Also ist $w^\beta \check{p} \in C_b^0$, falls $|\beta| > m+n$. Dies ist die Behauptung im Fall $k = 0$.

Allgemeiner gilt: $D_w^\gamma w^\beta \check{p} = \pm \widecheck{(\xi^\gamma D_\xi^\beta p)}$, und $\xi^\gamma D_\xi^\beta p \in L^1$ für $|\gamma| + m - |\beta| < -n$, also $D_w^\gamma w^\beta \check{p} \in C_b^0$ für $|\beta| > m+n+|\gamma|$. Damit folgt die zweite Aussage von a).

Die Aussage über den singulären Träger folgt hieraus im Fall $n = 1$ unmittelbar (teile durch w^β). In höheren Dimensionen hat w^β auch andere Nullstellen als 0, daher argumentieren wir wie folgt: Für $l \in \mathbb{N}$ betrachte $|w|^{2l} = (w_1^2 + \ldots + w_n^2)^l = \sum_{|\beta|=2l} c_\beta w^\beta$. Also ist $|w|^{2l}\check{p}(w) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, falls $2l > m+n+k$. Gegeben ein beliebiges k, können wir so ein l wählen. Nach Teilen durch $|w|^{2l}$ folgt $\check{p} \in C^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Da k beliebig war, ist $\check{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, d.h. $\operatorname{sing\,supp} \check{p} \subset \{0\}$.

b) Nach a) ist $\check{p}\chi$ glatt, also genügt es, zu zeigen, dass $|w|^{2l} D_w^\gamma \check{p}$ in $|w| > 1$ beschränkt ist für alle l, γ. Wegen $|w| > 1$ genügt es, dies für $2l > m + |\gamma| + n$ zu zeigen. Wegen $D_w^\gamma \check{p} = (\xi^\gamma p)\check{}$ folgt dies aus der Abschätzung in a), angewendet auf $\xi^\gamma p$.

c) Falls $\check{p}$ glatt ist, dann ist $\check{p}(1-\chi) \in C_0^\infty$ und aus b) folgt dann $\check{p} \in \mathcal{S} \Rightarrow p \in \mathcal{S} = S^{-\infty}$. □

Technische Bemerkung:

Formal ausgeschrieben folgt $w^\beta \check{p} = \pm \widecheck{(D_\xi^\beta p)}$ durch partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
\check{p}(w) &= \int e^{iw\xi} p(\xi)\, đ\xi, \quad \text{dann} \\
\widecheck{(D_\xi^\beta p)}(w) &= \int e^{iw\xi} D_\xi^\beta p(\xi)\, đ\xi = \int ((-D_\xi)^\beta e^{iw\xi}) p(\xi)\, đ\xi = \pm w^\beta \check{p}(w)
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, dass in dieser Situation "partielle Integration" zulässig ist, obwohl die Integrale divergieren (jedenfalls für $m \geqslant -n$). Im Folgenden ist es sehr hilfreich, diese Schreibweise zu verwenden.

Distributionen, deren Singularitäten wie die von $\check{p}$ aussehen, sind wichtig und haben daher einen Namen:

Definition 18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **konormal bezüglich** $\{0\}$, falls gilt:*

a) $\operatorname{sing\,supp} u \subset \{0\}$

b) Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ und ein $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ mit

$$u = \check{p} \quad \textit{auf einer Umgebung von } 0. \tag{26}$$

Die Menge dieser Distributionen bezeichnen wir mit $\operatorname{Con}^m(\mathbb{R}^n, \{0\})$.

Mit $\operatorname{Con}^{-\infty} := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \operatorname{Con}^m$ ist offenbar $\operatorname{Con}^{-\infty}(\Omega, \{0\}) = C^\infty(\Omega)$. Genauer gilt:

Proposition 19. *Sei u konormal bezüglich $\{0\}$. Das Symbol p in (26) ist durch u eindeutig bestimmt modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Die Äquivalenzklasse heißt **(vollständiges) Symbol von** u. Die induzierte Symbol-Abbildung*

$$\operatorname{Con}^m(\Omega, \{0\})/C^\infty(\Omega) \to S^m(\mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$$

ist ein Isomorphismus.

Kurz: Singularitäten konormaler Distributionen entsprechen Symbolen modulo Schwartz-Funktionen.

Beweis: Sind $p, q \in S^m$ und gilt $\check{p} = \check{q}$ auf einer Umgebung von 0, so ist $p - q \in S^m$ und $(p-q)\check{}$ ist glatt, also $p - q \in S^{-\infty}$ nach Satz 17c).

Die Symbol-Abbildung ist offenbar linear. Injektivität bedeutet, dass $p \in S^{-\infty}$ Glattheit von $\check{p}$ impliziert, das wissen wir bereits. Die Abbildung ist surjektiv, da wir zu $p \in S^m$ einfach $u = \check{p}$ wählen können. □

Weitere Bemerkungen:

- Die Bezeichnung $\operatorname{Con}^m(\Omega, \{0\})$ ist nicht standard. Die übliche Bezeichnung für diesen Raum ist $I^{m-\frac{n}{4}}(\Omega, \{0\})$. Die seltsam anmutende Verschiebung der Ordnung ist erst im größeren Zusammenhang der Theorie der Lagrange-Distributionen natürlich.
- Allgemeiner definiert man $I^m(M, N)$, wobei M eine Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Mehr dazu z.B. in Hörmander.

III.3 ΨDOs: Definition, Schwartz Kern und Abbildungseigenschaften

Das Unterkapitel III.1 hat gezeigt, dass beim Versuch, die Methode der Fouriertransformation auf das Lösen von PDGen mit variablen Koeffizienten anzuwenden, Integrale der Form

$$\int e^{ix\xi}\, p(x,\xi) \underbrace{\hat{u}(\xi)}_{=\int e^{-iy\xi}u(y)\,dy} \,đ\xi = \int\int e^{i(x-y)\xi} p(x,\xi) u(y)\,dy\,đ\xi$$

auftreten: Sowohl der Operator P als auch die Parametrix Q und der Restterm R ließen sich in dieser Form (mit unterschiedlichen Funktionen p) schreiben. Dies motiviert die Definition von Pseudodifferentialoperatoren.

Für spätere Beweise und eine systematische Theorie ist es nützlich, zunächst etwas allgemeinere Ausdrücke zu betrachten, bei denen die Funktion $p(x,\xi)$ im rechten Integral durch eine Funktion $a(x,y,\xi)$ ersetzt wird. Im Folgenden ist immer $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, und x- oder y-Integrale laufen immer über Ω, ξ-Integrale immer über $\mathbb{R}^n$.

Definition 20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{R}$, $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt der durch*

$$(P_a u)(x) := \int\int e^{i(x-y)\xi} a(x,y,\xi) u(y) dy\, đ\xi, \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{27}$$

*definierte Operator **Pseudodifferentialoperator** (ΨDO) der **Ordnung** m mit **Amplitude** a. Weiter definieren wir*

$$\Psi^m(\Omega) := \text{ die Menge der } \Psi DO \text{ auf } \Omega \text{ der Ordnung } m.$$

(Die Bezeichnung P_a ist ein 'slight abuse of notation', da wir mit P_K auch den Operator mit Schwartz-Kern K bezeichnet haben. Was gemeint ist, wird aus dem Kontext klar sein.)

Beispiele:

- Sei $\mathrm{Diff}^m(\Omega)$ die Menge der Differentialoperatoren auf Ω der Ordnung m. Dann ist

  $$\mathrm{Diff}^m(\Omega) \subset \Psi^m(\Omega)$$

  Denn für $P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ist $P = P_a$ mit $a(x,y,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ nach (23).

  Zwei konkrete, physikalisch bedeutsame Beispiele hierfür sind:
- $a(x,\xi) = |\xi|^2 + V(x)$ mit $V \in C^\infty$, dann ist $P_a = -\Delta + V$ (Schrödinger-Operator)
- $a(x,\xi) = x \cdot \xi \Rightarrow P_a = x \cdot D$. Hier ist interessant, dass $p(x,\xi) = x \cdot \xi = \xi \cdot x$ gilt, aber $x \cdot D \neq D \cdot x$. Darauf kommen wir später zurück.

Wir formulieren nun die grundlegenden Sätze zu ΨDOs und verschieben die Beweise nach hinten. Zunächst sollten wir sicherstellen, dass $P_a u$ überhaupt definiert ist (d.h. dass die Integrale konvergieren) und P_a einen vernünftigen Operator definiert.

Satz 21. *Sei $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist $(P_a u)(x)$ für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert, $P_a u \in C^\infty(\Omega)$ und der Operator*

$$P_a : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$$

ist linear und stetig. Weiterhin hat P_a eine stetige Fortsetzung

$$P_a : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

Wir betrachten nun den Schwartz Kern eines ΨDOs. Er hat folgende fundamentale Eigenschaften.

Satz 22. *Sei $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Der Schwartz Kern von P_a ist*

$$K_a(x,y) := \int e^{i(x-y)\xi} a(x,y,\xi)\, đ\xi \tag{28}$$

Beachten Sie, dass hier eine Überlegung nötig ist, was dies bedeuten soll, da das Integral für $m \geqslant -n$ im Allgemeinen divergiert. Wir werden sehen, dass es im Sinne der Distributionen trotzdem für alle m konvergiert.

Satz 23. *Der Schwartz Kern eines ΨDOs ist nur auf der Diagonale singulär:*

$$a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \operatorname{sing\,supp} K_a \subset \operatorname{Diag}_\Omega$$

Insbesondere sind ΨDOs pseudolokal, d.h. für $P \in \Psi^m(\Omega)$ gilt

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subset \operatorname{sing\,supp} u \qquad \textit{für alle } u \in \mathcal{E}'(\Omega)$$

Der zweite Teil folgt aus dem ersten mittels Satz 9. Schließlich betrachten wir noch Adjungierte von ΨDOs:

Satz 24. *Sei $P \in \Psi^m(\Omega)$. Dann ist $P^* \in \Psi^m(\Omega)$. Genauer gilt für $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$*

$$(P_a)^* = P_{a^*} \qquad \textit{mit } a^*(x,y,\xi) = \overline{a(y,x,\xi)} \tag{29}$$

Wir kommen nun zu den Beweisen. Wir gehen in zwei Schritten vor:

1. Wir rechnen formal und kümmern uns nicht um Konvergenz. Daran sieht man am besten, woher die Aussagen kommen. Im Fall, dass m genügend negativ ist, gibt es kein Konvergenzproblem und wir sind (fast) fertig.
2. Wir zeigen, dass die Aussagen auch für beliebige m gelten. Der wesentliche Trick ist hierbei eine partielle Integration (bzgl. y).

Beweise: Die zentralen Punkte

Zu Satz 21 bemerken wir zunächst nur, dass das $dy\,đ\xi$-Integral (27) für $m < -n$ absolut konvergiert. Daher ist $P_a u$ zumindest stetig. Ist sogar $m < -n - k$, so kann man k mal unter dem Integral nach x ableiten und erhält $Pu \in C^k(\Omega)$.

Beweis (von Satz 22 im Fall $m < -n$): Wenn $m < -n$ ist, so konvergiert das Integral, das K_a definiert. Außerdem konvergiert das $dy\,đ\xi$-Integral (27) absolut, daher kann man Fubini anwenden und erhält $(P_a u)(x) = \int K_a(x,y)u(y)\,dy$, d.h. K_a ist der Schwartz Kern von P_a. □

Für später halten wir noch fest:

$$K_a \in C^k(\Omega \times \Omega) \quad \text{für } a \in S^m,\ m < -n - k. \tag{30}$$

Denn $D^\alpha_{x,y}\left(e^{i(x-y)\xi}a(x,y,\xi)\right) \leqslant C < \xi >^{m+|\alpha|}$, und dies ist für $m + |\alpha| < -n$ bzgl. ξ integrierbar.

Beweis (von Satz 24, unter der Annahme von Satz 22): Nach Satz 13 hat $(P_a)^*$ den Schwartz-Kern

$$\overline{K(y,x)} = \overline{\int e^{i(y-x)\xi} a(y,x,\xi)\,đ\xi} = \int e^{i(x-y)\xi}\overline{a(y,x,\xi)}\,đ\xi = K_{a^*} \qquad \square$$

Für Satz 23 benötigen wir folgende wichtige Formel:

Proposition 25. *Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt*

$$(y-x)^\alpha K_a = K_{(y-x)^\alpha a} = K_{D^\alpha_\xi a}$$

Dies zeigt insbesondere, dass verschiedene Amplituden denselben Kern (und damit ΨDO) definieren können.

Beweis (von Proposition 25 im Fall $m < -n$): Die erste Gleichheit ist klar. Für die zweite schreibe

$$K_{(y-x)^\alpha a}(x,y) = \int (y-x)^\alpha e^{i(x-y)\xi} a \, đ\xi = \int \left((-D_\xi)^\alpha e^{i(x-y)\xi} \right) a \, đ\xi = \\ = \int e^{i(x-y)\xi} D_\xi^\alpha a \, đ\xi$$

mit mehrfacher partieller Integration in ξ. □

Beweis (von Satz 23): Nach Proposition 25 ist $(y-x)^\alpha K_a = K_{D_\xi^\alpha a}$, und aus $D_\xi^\alpha a \in S^{m-|\alpha|}$ folgt mit (30), dass

$$(y-x)^\alpha K_a \in C^k(\Omega \times \Omega), \qquad \text{falls } m - |\alpha| < -n - k,$$

d.h. falls $|\alpha| > m+n+k$. Wie können nun wie bei Satz 17a) argumentieren: Zu gegebenem k wähle $l \in \mathbb{N}$ mit $2l > m+n+k$. Dann ist $|y-x|^{2l} K_a \in C^k(\Omega \times \Omega)$, also $K_a \in C^k([\Omega \times \Omega] \setminus \mathrm{Diag}_\Omega)$. Da dies für jedes k gilt, folgt $K_a \in C^\infty([\Omega \times \Omega] \setminus \mathrm{Diag}_\Omega)$. □

Beweise: Wie man divergente Integrale konvergent macht

Im Endeffekt sagen die Sätze 21 - 24, dass man mit den hier vorkommenden Integralen formal rechnen darf, ohne sich um Konvergenz zu kümmern. Hierfür ist allerdings wesentlich, dass a die Symbolabschätzungen erfüllt.

Wir wollen dies nun genau begründen. Beim ersten Lesen kann dieser Abschnitt übersprungen werden. Es ist noch zu klären:

- Beweis von Satz 21: Warum gilt das für beliebige m, und warum kann man Pu unendlich oft differenzieren, obwohl Ableitungen nach x unterm Integral bewirken, dass das Integral 'immer schlimmer' divergiert?
- Definition von K_a, Beweis von Satz 22 für beliebige m
- Beweis von Proposition 25 für beliebige m.

Beachte, dass bei all diesen Punkten das Problem darin besteht, dass das ξ-Integral möglicherweise divergiert, da der Integrand für $|\xi| \to \infty$ nicht (oder nicht offensichtlich) schnell genug gegen Null geht. Das y-Integral ist kein Problem, da u kompakten Träger in Ω hat und glatt ist.

Idee: Der zentrale Trick ist, wie so oft, **partielle Integration**, diesmal bezüglich y: Schreibe $e^{i(x-y)\xi} = -\frac{1}{\xi_j} D_{y_j} e^{i(x-y)\xi}$ Setzt man dies in (27) ein und integriert partiell bzgl. y_j, so verbessert sich die Konvergenz des ξ-Integrals bei unendlich wegen der negativen ξ_j-Potenz.

Da Teilen durch ξ_j aber ein neues Problem bei $\xi_j = 0$ generiert, modifizieren wir diese Idee ein wenig: Es gilt

$$e^{-iy\xi} = <\xi>^{-k} <D_y>^k e^{-iy\xi}, \qquad k \in \mathbb{N}\,\text{gerade} \tag{31}$$

wobei wir $<D_y>^2 = 1 + \sum_{j=1}^n D_{y_j}^2$ schreiben.

(Beweis: Aus $D_{y_j} e^{-iy\xi} = -\xi_j e^{-iy\xi}$ folgt durch zweifache Anwendung, Summieren über j und Addieren von $e^{-iy\xi}$, dass $(1 + \sum_{j=1}^n D_{y_j}^2) e^{-iy\xi} = (1 + |\xi|^2) e^{-iy\xi}$ gilt. Mehrfache Anwendung liefert $(1 + \sum_{j=1}^n D_{y_j}^2)^l e^{-iy\xi} = (1+|\xi|^2)^l e^{-iy\xi}$ für $l \in \mathbb{N}$. Durch Umstellen folgt (31).)

Wir formulieren zunächst in etwas vereinfachtem Kontext, was uns das bringt:

Lemma 26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{R}$.*

a) Sei $a \in S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Das Integral

$$I_a(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} a(y,\xi)\, đ\xi$$

konvergiert in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Für $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\rho(0) = 1$ und $\rho_N(\xi) = \rho(\frac{\xi}{N})$ gilt

$$I_a = \lim_{N\to\infty} I_{\rho_N a}$$

Allgemeiner ist $\lim_{N\to\infty} I_{\rho_N a} = \rho(0) I_a$ für $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) a) und b) gelten analog für Symbole $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ und die Integrale

$$I_a(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} a(x,y,\xi)\, đ\xi \quad \textit{und} \quad \tilde{I}_a(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} a(x,y,\xi)\, đ\xi$$

Beachte, dass $\rho_N a \in S^{-\infty}$. Das heißt, Teil b) gibt eine Approximation von I_a durch glatte Funktionen.

Beweis: a) Konvergenz in $\mathcal{D}'(\Omega)$ bedeutet: Für jede Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergiert

$$\langle I_a, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \langle e^{-iy\xi} a(y,\xi), \phi(y) \rangle_y \, đ\xi = \int \underbrace{\int e^{-iy\xi} a(y,\xi) \phi(y)\, dy}_{=:A(\xi)} \, đ\xi$$

Wir wollen zeigen, dass $A(\xi)$ für große ξ schnell gegen Null geht. Mit (31) und partieller Integration folgt

$$A(\xi) = \int <\xi>^{-k} \left(<D_y>^k e^{-iy\xi} \right) a(y,\xi)\phi(y)\, dy = <\xi>^{-k} \int e^{-iy\xi} <D_y>^k (a\phi)\, dy\,.$$

Sei $\operatorname{supp} \phi \subset K \Subset \Omega$. Mit $|D_y^\beta a(y,\xi)| \leqslant C_{K,\alpha} <\xi>^m$ folgt

$$|A(\xi)| \leqslant C_{K,k} <\xi>^{m-k} \quad \text{für} \quad \operatorname{supp}\phi \subset K.$$

Wählt man $k > m+n$, folgt die Konvergenz von $\int A(\xi)\, đ\xi$.

b) Für eine Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist mit partieller Integration wie oben

$$\begin{aligned}
\langle I_{\rho_N a}, \phi \rangle &= \int\int e^{-iy\xi} \rho_N(\xi) a(y,\xi)\phi(y)\, dy\, đ\xi = \int \rho_N(\xi) \int e^{-iy\xi} a\phi\, dy\, đ\xi = \\
&= \int \rho_N(\xi) <\xi>^{-k} (\int e^{-iy\xi} <D_y>^k (a\phi) dy)\, đ\xi \\
&\overset{N\to\infty}{\to} \rho(0) \int <\xi>^{-k} (\int e^{-iy\xi} <D_y>^k (a\phi) dy)\, đ\xi = \langle \rho(0) I_a, \phi \rangle
\end{aligned}$$

für $k > m+n$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz, da $\rho_N(\xi) \overset{N\to\infty}{\to} \rho(0)$ für jedes ξ und da das ξ-Integral ohne den ρ_N-Faktor absolut konvergiert.

c) Genau wie oben, wobei die Testfunktion nun in $C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$ liegt. Die partielle Integration wird weiterhin nur bezüglich der y-Variablen durchgeführt. $\square$

Beweis (von Satz 21): Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir müssen das Doppelintegral

$$(P_a u)(x) := \int\int e^{i(x-y)\xi}\, a(x,y,\xi) u(y) dy\, đ\xi \qquad (32)$$

untersuchen. Wir betrachten zunächst das innere Integral und integrieren partiell:

$$A(x,\xi) := \int e^{-iy\xi}\, a(x,y,\xi)u(y)dy = <\xi>^{-k} \int e^{-iy\xi} < D_y >^k (au)\, dy\,.$$

Wie oben können wir damit $|A(x,\xi)|$ abschätzen, aber indem wir nach x ableiten, erhalten wir sogar für $K, K' \Subset \Omega$ und beliebige k, β

$$|D_x^\beta A(x,\xi)| \leqslant C_{K,K',k,\beta} < \xi >^{m-k} \quad \text{für} \quad \operatorname{supp} u \subset K,\ x \in K'. \qquad (33)$$

Da k, K und K' beliebig waren, haben wir gezeigt, dass $D_x^\beta A = O(<\xi>^{-N})$ für alle N gilt, lokal gleichmäßig in x. Daraus folgt sofort, dass das Integral

$$(P_a u)(x) = \int e^{ix\xi} A(x,\xi)\, đ\xi$$

konvergiert und stetig in x ist, und dass beliebig häufiges Ableiten nach x unterm Integral immer zu konvergenten Integralen führt. Damit ist bewiesen, dass $(P_a u)(x)$ definiert ist und dass $P_a u \in C^\infty(\Omega)$.

Es bleibt die Stetigkeit des Operators $P_a : C_0^\infty \to C^\infty$ zu zeigen. Diese folgt daraus, dass sich die Konstanten in (33) durch die Suprema endlich vieler Ableitungen von u abschätzen lassen.

Dass P_a eine stetige Fortsetzung $\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ hat, folgt mit Hilfe des üblichen Dualitätsarguments (siehe (16)) daraus, dass der transponierte Operator P_a^t ebenfalls ein ΨDO ist (nach dem schon bewiesenen Satz 24) und daher stetig $C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ ist. □

Beachte, dass im Fall $a = a(x,\xi)$ einfach $A(x,\xi) = a(x,\xi)\hat{u}(\xi)$ ist. Die Abschätzungen im Beweis verallgemeinern die wohlbekannte Tatsache, dass $\hat{u}$ eine Schwartz-Funktion ist. Der Standard-Beweis für diese Tatsache ist im Wesentlichen identisch zum oben gegebenen Beweis.

Beweis (von Satz 22): Das Integral in (28) konvergiert nach Lemma 26c) in $\mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$. Die Aussage ‚$K_a$ ist Schwartz-Kern von P_a' bedeutet per Definition (siehe (8)):

$$< P_a u, v > = < K_a, v \otimes u > \quad \forall\, u,\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nun ist

$$< P_a u, v > = \int \left[\int\int e^{i(x-y)\xi} a\, u(y) dy\, đ\xi\right] v(x) dx \quad \text{und}$$
$$< K_a, v \otimes u > = \int\int\int e^{i(x-y)\xi} a\, v(x) u(y) dy dx\, đ\xi.$$

Beide Integrale sind gleich, wenn wir Fubini anwenden dürfen, um die dx und $d\xi$-Integrale zu vertauschen. Da wir das y-Integral wie vorher als $<\xi>^{-k} \int ...dy$ umschreiben können, konvergiert das $dx\, đ\xi$-Integral, also ist Fubini anwendbar. □

Beweis (von Proposition 25): Dies hatten wir bereits für $m < -n$ bewiesen, und die linke Gleichung gilt offenbar immer. Für beliebiges m verwenden wir Lemma 26b). Es genügt, $\alpha = e_j$ zu betrachten. Sei $\tilde{\rho} = D_{\xi_j}\rho$ und $\tilde{\rho}_N(\xi) = \tilde{\rho}(\frac{\xi}{N})$, dann ist $D_{\xi_j}\left(\rho\left(\frac{\xi}{N}\right)\right) = \frac{1}{N}(D_{\xi_j}\rho)\left(\frac{\xi}{N}\right) = \frac{1}{N}\tilde{\rho}_N$. Wegen $a\rho_N \in S^{-\infty}$ gilt für jedes N

$$\underbrace{K_{(y-x)_j a\rho_N}}_{\to K_{(y-x)_j a}} = K_{D_{\xi_j}(a\rho_N)} = \underbrace{K_{(D_{\xi_j}a)\rho_N}}_{\to K_{D_{\xi_j}a}} + \underbrace{K_{a\frac{1}{N}\tilde{\rho}}}_{\to 0},$$

weil im letzten Term $K_{a\tilde{\rho}_N} \to \tilde{\rho}(0)K_a$, also $K_{a\frac{1}{N}\tilde{\rho}} = \frac{1}{N}K_{a\tilde{\rho}_N} \to 0$. □

Bemerkung: Man könnte auch versuchen, beim Beweis von Proposition 25 wie in den vorherigen Beweisen zu argumentieren, indem man mittels der $<\xi>^{-k}$-Faktoren die Integrale konvergent macht. Das führt aber zu unnötigen algebraischen Verwicklungen, denn zum Beweis von Proposition 25 muss man bzgl. ξ ableiten und partiell integrieren, und dabei werden die $<\xi>^{-k}$-Faktoren mit abgeleitet. Daher ist es einfacher, über Lemma 26(b) zu argumentieren.

III.4 Asymptotische Summation

Im Folgenden schreiben wir oft kurz S^m für $S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, oder für $S^m(\mathbb{R}^n)$.

Definition 27. *Seien $a_j \in S^{m_j}$ mit $m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \to -\infty$. Sei $a \in S^{m_0}$. Wir sagen*

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

(in Worten: a ist asymptotische Summe der a_j), falls gilt:

$$a - \sum_{j:m_j>-M} a_j \in S^{-M} \quad \text{für alle } M$$

Beachten Sie, dass die Partialsumme $\sum_{j:m_j>-M} a_j$ endlich ist. Dies ist ähnlich zur Definition der Summe von Reihen: Für reelle Zahlen x, x_j ist $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j :\Leftrightarrow x - \sum_{j=0}^{M} x_j \to 0$ für $M \to \infty$.
Der wichtigste Spezialfall ist $m_j = m - j$:

$$a_j \in S^{m-j}, \text{ dann } a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Leftrightarrow a - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \in S^{m-k} \; \forall k$$

Beispiel: $a(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$ ist nach Proposition 16 ein Symbol der Ordnung -2 auf $\mathbb{R}$. Für $|\xi| > 1$ ist

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{1}{\xi^2}\frac{1}{1+\frac{1}{\xi^2}} = \xi^{-2} - \xi^{-4} + \xi^{-6} - + \ldots$$

Bis auf die Singularität bei $\xi = 0$ stehen rechts Symbole abnehmender Ordnung. Mit χ wie in (25) erwarten wir also, dass gilt

$$\frac{1}{1+\xi^2} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j, \quad a_j(\xi) = (-1)^j \xi^{-2-2j}\chi(\xi)$$

Um dies genau zu begründen, müssen wir den Rest nach Abziehen einer Partialsumme betrachten: Für alle k gilt (geometrische Summe)

$$\frac{1}{1+\xi^2} = -\sum_{j=1}^{k}(-\xi^2)^{-j} + \frac{(-\xi^2)^{-k}}{1+\xi^2}$$

und $\frac{(-\xi^2)^{-k}}{1+\xi^2} \in S^{-2-2k}(\mathbb{R})$.

In diesem Beispiel war die Summe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi)$ sogar für jedes ξ konvergent. Im Allgemeinen muss dies jedoch nicht der Fall sein. Zum Beispiel könnte man die Summe $\sum_{j=0}^{\infty} j!\,\xi^{-2j}\chi(\xi)$ betrachten. Diese konvergiert für kein ξ mit $\chi(\xi) \neq 0$. Dass und in welchem Sinn die Summe trotzdem definiert ist, zeigt folgender Satz.

Satz 28. *Seien $a_j \in S^{m_j}$, $m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \to -\infty$.*

a) Es existiert $a \in S^{m_0}$ mit

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

b) a ist eindeutig mod $S^{-\infty}$, d.h.: Falls $\tilde{a} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ für ein Symbol $\tilde{a}$, so folgt $a - \tilde{a} \in S^{-\infty}$.

Beachte, dass a priori klar ist, dass die Summe nur mod $S^{-\infty}$ eindeutig sein kann, denn falls $a \sim \sum a_j$ und $\tilde{a} \in S^{m_0}$ mit $a - \tilde{a} \in S^{-\infty}$, so folgt $\tilde{a} \sim \sum a_j$.

Beweis:
Eindeutigkeit mod $S^{-\infty}$: Gilt $a \sim \sum a_j$, $\tilde{a} \sim \sum a_j$, so folgt per Definition für jedes M

$$a - \sum_{m_j > -M} a_j \in S^{-M}, \quad \tilde{a} - \sum_{m_j > -M} a_j \in S^{-M}$$

Nimmt man die Differenz, so folgt $a - \tilde{a} \in S^{-M}$. Da dies für alle M gilt, folgt $a - \tilde{a} \in S^{-\infty}$.

Beweisskizze der Existenz: Man setzt

$$a(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi)\chi\left(\frac{\xi}{R_j}\right), \quad R_j \to \infty \text{ für } j \to \infty.$$

Für jedes x, ξ ist dies eine endliche Summe und somit konvergiert die Reihe (χ sei wie in (25)). Man zeigt nun, dass man R_j so wählen kann, dass $a \in S^{m_0}$ und $a \sim \sum a_j$. □

III.5 Restterme

In Satz 28 haben wir gesehen, dass gewisse Aussagen nur modulo $S^{-\infty}$ gelten. Solche Symbole, bzw. die zugehörigen Operatoren, werden wir daher als Restterme, die wir nicht genauer bestimmen können, ansehen. Wir definieren

$$S^{-\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad \Psi^{-\infty}(\Omega) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m(\Omega).$$

Diese Schreibweise ist sinnvoll, da $S^m \supset S^{m-1} \supset S^{m-2} \supset ...$ und $\Psi^m(\Omega) \supset \Psi^{m-1}(\Omega) \supset \dots$.

Satz 29. *Für einen stetigen Operator $P : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ sind äquivalent:*

i) $P \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$

ii) P *ist glättend*

Zur Erinnerung: P glättend bedeutet, dass $P : \mathcal{E}'(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, und dies ist äquivalent zu $K \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ für den Schwartz Kern K von P.

Beweis:
i)⇒ ii): Für $P \in \Psi^m$ mit Kern K ist $K \in C^k$ für $k < -m - n$ nach (30). Für $P \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m$ folgt also $K \in \bigcap_k C^k = C^\infty$.

ii)⇒ i): Sei $K \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ der Kern von P. Wähle $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \rho = 1$. Setze $a(x, y, \xi) = e^{-i(x-y)\xi} K(x, y)\rho(\xi)$, dann ist $a \in S^{-\infty}$, da es kompakten Träger in ξ hat. Außerdem gilt $K_a = K$. Also $a \in S^m \, \forall m$, d.h. $P \in \Psi^m \, \forall m$ und damit $P \in \Psi^{-\infty}$. □

Der Beweis zeigt auch, dass die Bedingungen äquivalent sind zu $P = P_a$ für ein $a \in S^{-\infty}(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

Schreibweise: $P \equiv P' \mod \Psi^{-\infty} \;:\Leftrightarrow\; P - P' \in \Psi^{-\infty}$. Nach dem Satz ist dies äquivalent zu $K - K' \in C^\infty$, d.h. K, K' haben dieselbe Singularität bei Diag_Ω.

III.6 Reduktion, Symbol eines ΨDOs

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass man einen ΨDO, der durch eine Amplitude $a(x, y, \xi)$ gegeben ist, auch durch eine Amplitude darstellen kann, die nur von x und ξ abhängt, nicht von y (bis auf einen $\Psi^{-\infty}$ Restterm), und dass diese bis auf Restterme eindeutig ist. Man nennt sie das Symbol des ΨDOs. Das Symbol enthält die wesentlichen Informationen über den Operator.

Der Fall von Differentialoperatoren

Für Differentialoperatoren ist leicht zu verstehen, was die y-Abhängigkeit einer Amplitude $a(x, y, \xi)$ bedeutet:

$$\begin{aligned}
&(L) \quad P = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha \quad \Rightarrow \quad P = P_p \text{ mit } p = p(x, \xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha \\
&(R) \quad P = \sum_\alpha D^\alpha b_\alpha \quad \Rightarrow \quad P = P_a \text{ mit } a(x, y, \xi) = \sum b_\alpha(y)\xi^\alpha
\end{aligned}$$

Hierbei ist b_α als Multiplikationsoperator mit der Funktion b_α zu verstehen, also $D^\alpha b_\alpha$ als der Operator $u \mapsto D^\alpha(b_\alpha u)$. (R) folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
D^\alpha(b_\alpha u) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(D^\alpha(b_\alpha u))) = \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \mathcal{F}(b_\alpha u)) = \\
&= \int e^{ix\xi} \xi^\alpha \underbrace{\mathcal{F}(b_\alpha u)(\xi)}_{= \int e^{-iy\xi} b_\alpha(y) u(y) dy} \,đ\xi = \int\int e^{i(x-y)\xi} \xi^\alpha b_\alpha(y) u(y) dy \,đ\xi.
\end{aligned}$$

d.h. $D^\alpha b_\alpha$ hat Amplitude $\xi^\alpha b_\alpha(y) = b_\alpha(y)\xi^\alpha$. Allgemeiner:

$$P = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha b_\alpha \quad \Rightarrow \quad P = P_a \text{ mit } a(x, y, \xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x) b_\alpha(y) \xi^\alpha.$$

Mit der Produktregel kann dies in die Form (L) (oder auch (R)) umgeschrieben werden:

$$Pu = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha(b_\alpha u) = \sum_\alpha a_\alpha \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} b_\alpha) D^\beta u = \sum_\beta c_\beta D^\beta$$

für geeignete c_β. (Hierbei ist $D^{\alpha-\beta} b_\alpha$ die Ableitung der Funktion b_α, also kein Operator!)

Wir sehen: Für denselben Operator gibt es viele verschiedene Amplituden a mit $P = P_a$. In anderer Weise zeigte dies bereits Proposition 25.

Der Reduktionssatz

Folgender Satz zeigt, dass die Reduktion auf die Form (L) auch für ΨDOs geht (bis auf glättende Fehler), und gibt eine kompakte Formel an.

Satz 30. *Für jeden ΨDO $P \in \Psi^m(\Omega)$ gibt es ein $p \in S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $P \equiv P_p \mod \Psi^{-\infty}(\Omega)$, wobei p als Amplitude $p(x,\xi)$ aufgefasst wird. p ist durch P eindeutig mod $S^{-\infty}$ bestimmt.*

Ist $P = P_a$ mit $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, so lässt sich p wie folgt berechnen:

$$p(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \underbrace{\frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\right)|_{y=x}}_{\in S^{m-|\alpha|}} \tag{34}$$

*Man nennt p das **Symbol** von P und schreibt $p = \sigma(P)$.*

Manchmal schreibt man auch σ_P oder $\sigma_L(P)$ (Linkssymbol, s. unten). Da p nicht eindeutig durch P festgelegt ist, sollte man genauer das Symbol von P als die Äquivalenzklasse $[p] = p + S^{-\infty}$ definieren, also als Element des Quotientenraums $S^m/S^{-\infty}$. Wie auch bei den L^1-Räumen (integrierbare Funktionen) üblich, schreiben wir trotzdem p statt $[p]$.[8]

Die asymptotische Summe (34) ist definiert, da es für jedes j nur endlich viele α mit $|\alpha| = j$ gibt. Die ersten Terme sind

$$p(x,\xi) \sim a(x,y,\xi) + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} a(x,y,\xi)|_{y=x} + \dots$$

Beweis (von Satz 30): Existenz von p mit $P \equiv P_p$: Für festes x, ξ verwende die Taylorentwicklung der Funktion $y \mapsto a(x,y,\xi)$ um den Punkt $y = x$:

$$a(x,y,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant N-1} \frac{1}{\alpha!} (y-x)^\alpha \partial_y^\alpha a|_{y=x} + R_N(x,y,\xi).$$

Nach Proposition 25 ist $P_{(y-x)^\alpha b} = P_{D_\xi^\alpha b}$ für beliebige Amplituden b. Wenden wir dies auf $b(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!}\left(\partial_y^\alpha a(x,y,\xi)\right)|_{y=x}$ an, so folgt mit

$$p_\alpha(x,\xi) := \frac{1}{\alpha!} \left(D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x,y,\xi)\right)|_{y=x},$$

(wobei man statt $D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha$ auch $D_y^\alpha \partial_\xi^\alpha$ schreiben kann), dass

$$P_a = P_{\sum_{|\alpha| \leqslant N-1} p_\alpha} + P_{R_N}.$$

[8] Unter einer Zusatzbedingung an P – eigentlich getragen, siehe Definition 35 – kann man P einen kanonischen Vertreter dieser Äquivalenzklasse zuordnen. Siehe z.B. Shubin oder Folland. Dies ist jedoch für die lokale Theorie nicht sinnvoll, da es eine Eindeutigkeit suggeriert, die keine Bedeutung hat.

Denn die Zuordnung $a \mapsto P_a$ ist offenbar linear. Am Ende dieses Beweises zeigen wir $P_{R_N} \in \Psi^{m-N}$. Wählt man nun p mit (vgl. Satz 28)

$$p(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} p_\alpha(x,\xi),$$

das heißt $R'_N := p - \sum_{|\alpha|\leqslant N-1} p_\alpha \in S^{m-N}\ \forall N$, so folgt

$$P_p - P_a = P_{p-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1} p_\alpha} - P_{a-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1} p_\alpha} = P_{R'_N} - P_{R_N} \in \Psi^{m-N}$$

für alle N, also $P_p - P_a \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$. Damit ist die Existenz von p bewiesen.

Eindeutigkeit von p modulo $S^{-\infty}$: Für $p = p(x,\xi)$ folgt für den Schwartz Kern aus (28)

$$K_p(x,y) = \check{p}(x, x-y) \tag{35}$$

wobei $\check{p}(x,z) = \int e^{iz\xi} p(x,\xi)\, đ\xi$ die inverse Fouriertransformation bzgl. ξ ist. Ist nun $P_p \equiv P_{p'} \mod \Psi^{-\infty}$, so ist für $r = p - p'$ der Kern K_r glatt, also $\check{r}(x,z)$ glatt bei $z = 0$. Aus Satz 17c), angewendet mit lokal gleichmäßiger C^∞-Abhängigkeit vom Parameter x, folgt, dass $r \in S^{-\infty}$.

Wir müssen noch $P_{R_N} \in \Psi^{m-N}$ zeigen. Die Idee hierfür ist, die Formel für das Restglied[9]

$$R_N(x,y,\xi) = N \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha \int_0^1 (1-s)^{N-1} \left(\partial_y^\alpha a\right)(x, x+s(y-x), \xi)\, ds \tag{36}$$

zu verwenden. Das Integral definiert für jedes α ein Element von S^m, da die Symbolabschätzungen lokal gleichmäßig in x, y gelten. Zwar ist R_N selbst nicht in S^{m-N}, aber durch das Umwandeln der $(y-x)^\alpha$-Faktoren in D_ξ^α wie oben sehen wir, dass es ein $R''_N \in S^{m-N}$ gibt mit $K_{R_N}(x,y) = K_{R''_N}(x,y)$. Damit sind wir fast fertig. Wir müssen noch beachten, dass (36) nur gilt, wenn die Strecke von x nach y ganz in Ω liegt, denn $x + s(y-x)$ durchläuft diese Strecke. Wählt man für jedes $x \in \Omega$ ein $r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) \subset \Omega$, so gilt (36) immerhin in der Umgebung $U = \{(x,y) : x \in \Omega, y \in B_{r_x}(x)\}$ von Diag_Ω, somit gilt dort $K_{R_N}(x,y) = K_{R''_N}(x,y)$. Mit Hilfe einer Abschneidefunktion ρ mit Träger in U, die gleich 1 in einer kleineren Umgebung von Diag_Ω ist, schreiben wir schließlich $K_{R_N} = \rho K_{R''_N} + (1-\rho)K_{R_N}$. Der erste Term liefert einen Operator in Ψ^{m-N}, der zweite einen glättenden Operator wegen Satz 23. □

Lemma 31. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $U \subset \Omega \times \Omega$ eine offene Umgebung von Diag_Ω. Dann gibt es eine Funktion $\rho \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ mit Träger in U, die in einer kleineren Umgebung von Diag_Ω gleich eins ist.*

Beweis als Übung.

[9] Dies folgt aus der eindimensionalen Taylorformel

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{t^N}{(N-1)!} \int_0^1 (1-s)^{N-1} f^{(N)}(ts)\, ds$$

wenn man $f(t) = a(x, x+t(y-x), \xi)$ setzt und bei $t = 1$ auswertet.

Bedeutung des Symbols

Das Symbol p eines ΨDOs P beschreibt genau die Singularität des Kerns K von P bei Diag_Ω: Denn $K \equiv K_p \mod C^\infty$, und nach (35) ist $K_p(x,y) = \check{p}(x, x-y)$, mit $\check{p}$ die inverse Fouriertransformation bzgl. ξ. Das heißt, wenn man K_p für festes x als Funktion von $z = x - y$ auffasst, so beschreibt das Verhalten von $p(x,\xi)$ für $\xi \to \infty$ die Singularität von $K_p(x,y) = K_p(x, x-z)$ bei $z = 0$.

Operator und Symbol bestimmen einander in folgendem Sinn eindeutig:

Satz 32. *Die Zuordnung $p \mapsto P_p$ definiert einen Isomorphismus, für jedes $m \in \mathbb{R}$,*

$$S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n) \to \Psi^m(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega). \tag{37}$$

Beweis: Offenbar ist $p \mapsto P_p, S^m \to \Psi^m$ linear. Verknüpft man dies mit der natürlichen Projektion $\Psi^m \to \Psi^m/\Psi^{-\infty}$, erhält man die Abbildung $S^m \to \Psi^m/\Psi^{-\infty}$. Diese ist surjektiv nach Satz 30. Es bleibt zu zeigen, dass der Kern dieser Abbildung $S^{-\infty}$ ist. Ein Symbol p liegt in diesem Kern genau dann, wenn $P_p \in \Psi^{-\infty}$, also K_p glatt ist. Ist $K_p = \check{p}(x, x-y)$ glatt, so ist $D_x^\alpha \check{p}(x,z)$ glatt als Funktion von z, lokal gleichmäßig in x und für jedes α, also folgt $p \in S^{-\infty}$ nach Satz 17c). □

Formel für das Symbol des adjungierten Operators

Nach Satz 24 ist das Adjungierte $(P_a)^*$ eines ΨDO der ΨDO mit Amplitude $a^*(x,y,\xi) = \overline{a(y,x,\xi)}$. Wenn $a(x,y,\xi) = p(x,\xi)$ nur von x,ξ abhängt (also das Symbol von P_a ist), ist $a^*(x,y,\xi) = \overline{p(y,\xi)}$ eine Funktion von y,ξ. Im Fall von Differentialoperatoren ist das leicht zu verstehen: Aus $D^* = D$ (partielle Integration und $\bar{i} = -i$) und $(AB)^* = B^*A^*$ folgt

$$P = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha \Rightarrow P^* = \sum_\alpha D^\alpha \overline{a_\alpha},$$

und dies hat Amplitude $\sum_\alpha \overline{a_\alpha}(y)\xi^\alpha$. Man kann $\overline{p(y,\xi)}$ wieder in ein x,ξ-Symbol 'umwandeln' und erhält:

Satz 33. *$P \in \Psi^m$ habe das Symbol p. Dann hat $P^* \in \Psi^m$ das Symbol*

$$q(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)}. \tag{38}$$

Beweis: Nach den vorhergehenden Bemerkungen und Satz 30 hat P^* das Symbol

$$\sum \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \overline{p(y,\xi)}|_{y=x}$$ □

Links- und Rechtssymbol

Nach Satz 30 hat jedes $P \in \Psi^m(\Omega)$ ein $\mod S^{-\infty}$ eindeutiges Symbol $p(x,\xi)$, auch Links-Symbol von P genannt und mit $\sigma_L(P)$ bezeichnet. Analog kann man P durch eine Amplitude darstellen, die nur von y und ξ abhängt, und diese ist wieder $\mod S^{-\infty}$ eindeutig. Man nennt diese Rechtssymbol von P, Bezeichnung $\sigma_R(P)$.

Dies folgt direkt aus den Überlegungen zur Adjungierten, die auch eine Formel liefern:

$$\sigma_R(P) = \overline{\sigma_L(P^*)} \tag{39}$$

III.7 Komposition von ΨDOs

Für Differentialoperatoren gilt offenbar

$$P \in \mathrm{Diff}^m(\Omega),\ Q \in \mathrm{Diff}^l(\Omega) \quad \Rightarrow \quad P \circ Q \in \mathrm{Diff}^{m+l}(\Omega).$$

Unser Ziel ist es, dies auf ΨDOs verallgemeinern, d.h. überall Diff durch Ψ ersetzen.

Eigentlich getragene Operatoren

Zunächst müssen wir uns um ein kleines Problem kümmern[10]: ΨDOs bilden wie folgt ab:

$$\begin{aligned} P &: C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega) \\ Q &: C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

also ist für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ nur $Qu \in C^\infty(\Omega)$ (nicht $C_0^\infty(\Omega)$) und somit $P(Qu)$ nicht definiert[11]. Wir formulieren nun eine Bedingung, unter der die Komposition $P \circ Q$ definiert ist.

Dazu definieren wir zunächst die beiden Projektionen

$$\pi_1, \pi_2 : \Omega \times \Omega \to \Omega,\ \pi_1(x, y) = x,\ \pi_2(x, y) = y$$

und erinnern an folgenden topologischen Begriff:

Definition 34. *Seien X, Y topologische (z.B. metrische) Räume. $f : X \to Y$ heißt* ***eigentlich***[12]*, falls f^{-1}(kompakt) = kompakt, d.h. $\forall\ K' \Subset Y$ gilt: $f^{-1}(K') \Subset X$.*

Zur Erinnerung: Wenn f stetig ist, gilt f(kompakt) = kompakt und f^{-1}(offen) = offen sowie f^{-1}(abgeschlossen) = abgeschlossen. Jedoch muss ein stetiges f nicht eigentlich sein, z.B. sind für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Projektionen $\pi_{1,2}$ stetig, aber nicht eigentlich, da z.B. $(\pi_1)^{-1}(\{x_0\}) = \{x_0\} \times \Omega$ nicht kompakt ist ($x_0 \in \Omega$ beliebig).

Falls X kompakt ist, so ist jedoch jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ eigentlich, denn $K' \subset Y$ kompakt $\Rightarrow K'$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(K')$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(K')$ kompakt, da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt sind.

Definition 35. *$K \Subset \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ heißt* ***eigentlich getragen***[13]*, falls die Einschränkungen der Projektionen*

$$\pi_1,\ \pi_2 : \operatorname{supp} K \to \Omega$$

eigentlich sind. Ein stetiger Operator $P : C_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt eigentlich getragen, wenn sein Schwartz Kern es ist.

Mit anderen Worten, für kompakte Mengen $K' \Subset \Omega$ muss $\operatorname{supp} K \cap (\pi_{1,2})^{-1}(K')$ kompakt sein. Beispiele:

- $\operatorname{supp} K$ kompakt $\Rightarrow K$ eigentlich getragen
- Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $K(x, y) = \rho(x - y),\ \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\operatorname{supp} K$ nicht kompakt aber K eigentlich getragen.

[10] auch wenn dies im Vergleich eher nebensächlich ist

[11] Konkret bedeutet dies, dass schon das y-Integral in (27) möglicherweise nicht konvergiert.

[12] englisch: proper

[13] englisch: properly supported

Proposition 36. *Ist $P \in \Psi^m(\Omega)$ eigentlich getragen, dann bildet P stetig ab:*

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\Omega) &\to C_0^\infty(\Omega) \\ \mathcal{E}'(\Omega) &\to \mathcal{E}'(\Omega) \\ C^\infty(\Omega) &\to C^\infty(\Omega) \\ \mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega). \end{aligned}$$

Beweis: Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und sei K der Kern von P. Es gilt

$$\operatorname{supp} Pu \subset \operatorname{supp} K \circ \operatorname{supp} u = \pi_1(\operatorname{supp} K \cap \pi_2^{-1}(\operatorname{supp} u)) \tag{40}$$

und $\operatorname{supp} K \cap \pi_2^{-1}(\operatorname{supp} u)$ ist kompakt, da $\operatorname{supp} u$ kompakt und K eigentlich getragen. Also ist $Pu \in C_0^\infty(\Omega)$, d.h. $P : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$. Außerdem ist $P : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ stetig (Übung). Offenbar ist mit P auch P^t eigentlich getragen. Also $P^t : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$, und mittels Dualität folgt $P : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

Da (40) auch für Distributionen gilt, zeigt dasselbe Argument $P : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$, dann $P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ mit Dualität. □

Wir können also festhalten: Sind P, Q ΨDOs und einer davon ist eigentlich getragen, so ist $P \circ Q : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ definiert, denn:

- P eigentlich getragen: $C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{Q} C^\infty(\Omega) \xrightarrow{P} C^\infty(\Omega)$
- Q eigentlich getragen: $C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{Q} C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{P} C^\infty(\Omega)$

Die Kompositionsformel

Satz 37. *Sei $P \in \Psi^m(\Omega)$, $Q \in \Psi^l(\Omega)$, mindestens einer von P, Q sei eigentlich getragen. Dann ist $P \circ Q \in \Psi^{m+l}(\Omega)$. Sind p, q die Symbole von P, Q, so ist das Symbol $p\#q$ von $P \circ Q$*

$$\begin{aligned} (p\#q)(x,\xi) &\sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x,\xi) D_x^\alpha q(x,\xi) = \\ &= \underbrace{p(x,\xi)q(x,\xi)}_{S^{m+l}} + \sum_j \underbrace{\partial_{\xi_j} p(x,\xi) D_{x_j} q(x,\xi)}_{S^{m+l-1}} + \ldots \end{aligned} \tag{41}$$

Beweis: Die Komposition $P \circ Q$ direkt auszurechnen ist nicht ganz einfach, denn:

$$\begin{aligned} (Pu)(x) &= \int e^{ix\xi} p(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, đ\xi = \int\int e^{i(x-y)\xi} p(x,\xi) u(y) dy\, đ\xi, \\ (Qf)(y) &= \int e^{iy\eta} q(y,\eta) \hat{f}(\eta) đ\eta = \int\int e^{i(y-z)\eta} q(y,\eta) f(z) dz đ\eta, \quad \text{also} \\ ((PQ)f)(x) = P(Qf)(x) &= \int\int\int\int e^{i[(x-y)\xi + (y-z)\eta]} p(x,\xi) q(y,\eta) f(z) dz đ\eta dy\, đ\xi. \end{aligned}$$

Um solche Vierfach-Integrale zu vermeiden, verwenden wir folgenden Trick: Wir schreiben Q mittels eines Rechts-Symbols:

$$(Qf)(y) = \int e^{i(y-z)\eta} q_R(z,\eta) f(z) dz đ\eta = \int e^{iy\eta} \underbrace{\left[\int e^{-iz\eta} q_R(z,\eta) f(z) dz \right]}_{\text{unabh. von } y, \text{ Fkt. von } \eta} đ\eta.$$

(Wir ignorieren zunächst die Tatsache, dass P und Q nur bis auf glättende Restterme durch ihr Links- bzw. Rechtssymbol dargestellt werden können. Dazu siehe das Ende des Beweises.) Also ist Qf die inverse Fouriertransformierte der Funktion in den eckigen Klammern. Daher

$$\widehat{Qf}(\eta) = \int e^{-iz\eta} q_R(z,\eta) f(z) dz.$$

Wir setzen $u = Qf$ in P ein:

$$(P(Qf))(x) = \int e^{ix\xi} p(x,\xi) \widehat{Qf}(\xi)\, đ\xi = \int e^{ix\xi} p(x,\xi) \int e^{-iz\xi} q_R(z,\xi) f(z) dz\, đ\xi$$

und ersetzen z durch y und erhalten:

$$(PQf)(x) = \int\int e^{i(x-y)\xi} \underbrace{p(x,\xi) q_R(y,\xi)}_{a(x,y,\xi)} f(y) dy\, đ\xi.$$

Also: PQ ist ΨDO mit Amplitude $a(x,y,\xi) = p(x,\xi) q_R(y,\xi)$. Dies zeigt $PQ \in \Psi^{m+l}(\Omega)$. Wir berechnen das Symbol von PQ:

$$\begin{aligned} q_R(y,\xi) &= \sigma_R(Q) = \overline{\sigma_L(Q^*)} \sim \overline{\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \overline{q(y,\xi)}}, \quad \text{also} \\ q_R(y,\xi) &\sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha (-D_y)^\alpha q(y,\xi) = e^{-<\partial_\xi, D_y>} q(y,\xi), \end{aligned}$$

wobei $- < \partial_\xi, D_y > := \sum_{j=1}^n -\partial_{\xi_j} D_{y_j}$. Hierbei ist die e-Funktion als Kurznotation für ihre Potenzreihe zu verstehen. [14]

Mit derselben Kurznotation können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_L(PQ)(x,\xi) &= \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x} = [e^{<\partial_\xi, D_y>} a(x,y,\xi)]|_{y=x}, \text{ also} \\ \sigma_L(PQ)(x,\xi) &= \left[e^{<\partial_\xi, D_y>} \left(p(x,\xi) e^{-<\partial_\xi, D_y>} q(y,\xi)\right)\right]|_{y=x} \end{aligned} \tag{42}$$

In (42) würden wir gerne die "e-Funktionen zusammenfassen". Dies lässt sich wegen der Produktregel nicht direkt machen, weil $p(x,\xi)$ von ξ abhängt. Deshalb wenden wir einen Trick an und "entzerren" durch Einführen einer zusätzlichen Variable τ: Für Funktionen h gilt $\partial_\xi h(\xi) = \partial_\tau h(\xi+\tau)|_{\tau=0}$. Daher

$$e^{-<\partial_\xi, D_y>} q(y,\xi) = e^{-<\partial_\tau, D_y>} q(y,\xi+\tau)|_{\tau=0}$$

Dann wird aus dem Ausdruck in (42):

$$\begin{aligned} &= \left[e^{<\partial_\xi, D_y>} \left(p(x,\xi) e^{-<\partial_\tau, D_y>} q(y,\xi+\tau)\right)\right]|_{y=x,\tau=0} = \\ &= \left[e^{<\partial_\xi, D_y>} e^{-<\partial_\tau, D_y>} \left(p(x,\xi) q(y,\xi+\tau)\right)\right]|_{y=x,\tau=0} = \\ &= \left[e^{<\partial_\xi - \partial_\tau, D_y>} \left(p(x,\xi) q(y,\xi+\tau)\right)\right]|_{y=x,\tau=0} \end{aligned} \tag{43}$$

[14] Rechtfertigung dieser Kurznotation: Für $t \in \mathbb{R}$ ist $e^t = \sum_{\alpha=0}^\infty \frac{1}{\alpha!} t^\alpha$, also für $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$

$$e^{\sum_{j=1}^n t_j} = \prod_{j=1}^n e^{t_j} = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j=0}^\infty \frac{1}{\alpha_j!} t_j^{\alpha_j} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} t^\alpha$$

Dies kann als Identität formaler Potenzreihen interpretiert werden. Setze nun $t_j = -\partial_{\xi_j} D_{y_j}$.

nach der Produktregel für die Exponentialfunktion (die ja durch formale Rechnung aus der Darstellung als Exponentialreihe folgt). Wir wollen nun verwenden, dass $(\partial_\xi - \partial_\tau)^\alpha q(y, \xi + \tau) = 0$. Dazu führen wir den Variablenwechsel $(\xi, \tau) \mapsto (\tilde{\xi}, \zeta)$ mit $\tilde{\xi} := \xi$ und $\zeta := \xi + \tau$ durch, womit

$$\begin{aligned}\partial_\xi &= \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \zeta} = \partial_{\tilde{\xi}} + \partial_\zeta, \\ \partial_\tau &= \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \zeta} = 0 + \frac{\partial}{\partial \zeta} = \partial_\zeta\end{aligned}$$

folgt. Also ist $\partial_\xi - \partial_\tau = \partial_{\tilde{\xi}}$ und somit wird aus dem Ausdruck in (43):

$$= \left[e^{<\partial_{\tilde{\xi}}, D_y>} \left(p(x, \tilde{\xi}) q(y, \zeta) \right) \right]_{\zeta = \tilde{\xi},\, y = x}$$

und wenn wir die "e-Funktion" wieder in eine Summe umschreiben, erhalten wir den Ausdruck (41) im Satz.

Im Beweis oben haben wir $P = P_p$, $Q = P_{q_R}$ angenommen. Im Allgemeinen wissen wir jedoch nur $P = P_p + R$, $Q = P_{q_R} + R'$ mit $R, R' \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$. Nun gilt aber

$$PQ = P_p P_{q_R} + R P_{q_R} + P_p R' + R R' \tag{44}$$

und alle drei Summanden mit R oder R' sind glättend. Allerdings müssen wir noch sicherstellen, dass jedes der Produkte definiert ist, d.h. dass in jedem mindestens ein Faktor eigentlich getragen ist. Damit wäre der Beweis oben gerettet.

Sei P eigentlich getragen. Folgendes Lemma zeigt, dass p so gewählt werden kann, dass auch P_p eigentlich getragen ist (für beliebiges p stimmt das nicht). Dann ist auch R eigentlich getragen, und damit sind alle Terme in (44) definiert. Ähnlich können wir im Fall argumentieren, dass Q eigentlich getragen ist. □

Folgendes Lemma ist nur für das technische Detail am Ende des vorigen Beweises wichtig.

Lemma 38. *Sei $p_0 \in S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es ein $p \in S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $p \equiv p_0 \mod S^{-\infty}$, für das P_p eigentlich getragen ist.*

Beweis: Idee: Wir verwenden die Formel $K_{p_0}(x, y) = \check{p}_0(x, x - y)$. Dies schneiden wir nahe der Diagonalen ab, so dass das Resultat eigentlich getragen ist, und bestimmen ein Symbol p, für das K_p genau dieses Resultat ist.

Genauer: Wähle eine eigentlich getragene Funktion $\rho_0 \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, die in einer Umgebung der Diagonale gleich eins ist. Setze $\rho(x, z) = \rho_0(x, x - z)$, so dass $\rho(x, x - y) = \rho_0(x, y)$. Da ρ_0 eigentlich getragen ist, hat die Funktion $z \mapsto \rho(x, z)$ für jedes x kompakten Träger und ist für $z \in \mathbb{R}^n$ definiert und glatt. Sei $\hat{\rho}(x, \xi)$ die Fouriertransformation bzgl. der z-Variablen. Sei nun p_0 ein beliebiges Symbol von P und setze

$$p(x, \xi) = \int \hat{\rho}(x, \eta) p_0(x, \xi - \eta)\, d\eta,$$

d.h. die Faltung bzgl. der ξ-Variablen. Dann ist $\check{p}(x, z) = \rho(x, z)\check{p}_0(x, z)$, also $K_p(x, y) = \check{p}(x, x - y) = \rho_0(x, y)\check{p}_0(x, x - y)$. Da ρ_0 eigentlich getragen ist, gilt dasselbe für K_p.

Es bleibt nachzuprüfen, dass $p \in S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Übung! (Verwende, dass $\hat{\rho}(x, \eta)$ für $\eta \to \infty$ schnell abfällt.)

Schließlich ist $K_p - K_{p_0} = 0$ in einer Umgebung der Diagonalen, also glatt, und daher ist $p \equiv p_0 \mod S^{-\infty}$.[15] □

[15] Eine andere Konstruktion, die zu einem kompakt getragenen Operator P ein Symbol p mit $P = P_p$

III.8 Hauptsymbol, klassische Operatoren

Die Kompositionsformel (41) zeigt, dass das Symbol der Komposition zweier ΨDOs bis auf Terme niedrigerer Ordnung gleich dem Produkt der Symbole der beiden Operatoren ist. Dies motiviert folgende Definition.

Definition 39. *Sei $P \in \Psi^m(\Omega)$ und p ein Symbol für P. Das **Hauptsymbol** von P ist die Äquivalenzklasse von p in*

$$S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)/S^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \textit{(Quotientenraum)}$$

und wird mit $\sigma_m(P)$ bezeichnet.

Offenbar ist dies wohldefiniert, da p modulo $S^{-\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eindeutig durch P festgelegt ist.[16] Wir schreiben $\sigma_m(P) = [p]$, wobei die eckigen Klammern die Äquivalenzklasse zum Ausdruck bringen. Der folgende Satz zeigt, dass sich mit Hauptsymbolen viel leichter rechnen lässt als mit den vollständigen Symbolen.

Satz 40. *Seien $P \in \Psi^m(\Omega)$, $Q \in \Psi^l(\Omega)$. Dann gilt*

a) $\sigma_{m+l}(P \circ Q) = \sigma_m(P)\sigma_l(Q)$

b) $\sigma_m(P^*) = \overline{\sigma_m(P)}$

c) $\sigma_m(P) = [\sigma_L(P)] = [\sigma_R(P)]$

d) Der Kommutator $[P, Q] := P \circ Q - Q \circ P$ ist in $\Psi^{m+l-1}(\Omega)$ und

$$\sigma_{m+l-1}([P, Q]) = \frac{1}{i}\{p, q\} \quad \textit{mit} \quad \{p, q\} := \sum_{j=1}^{n} \left(\partial_{\xi_j} p \, \partial_{x_j} q - \partial_{x_j} p \, \partial_{\xi_j} q\right)$$

wobei $p = \sigma_m(P)$, $q = \sigma_l(Q)$.

*In c) ist $\sigma_L(P)$ das Linkssymbol (= das Symbol) und $\sigma_R(P)$ das Rechtssymbol von P. Die Funktion $\{p, q\}$ in (d) heißt **Poisson-Klammer** von p und q.*

Beweis: Dies folgt direkt aus den Formeln (41), (38) und (39). □

Eine wichtige Teilklasse der ΨDOs sind die klassischen ΨDOs. Sie sind dadurch charakterisiert, dass ihr Symbol sich als asymptotische Summe *positiv homogener* (bzgl. ξ) Funktionen darstellen lässt. Wir hatten bereits das Beispiel

$$\frac{1}{1+\xi^2} \sim \xi^{-2} - \xi^{-4} + - \dots \tag{45}$$

gesehen, bei dem der Term ξ^{-2j} homogen vom Grad $-2j$ ist. Streng genommen haben wir diese asymptotische Summe noch nicht definiert, da die Funktionen ξ^{-2j} keine Symbole sind, da sie in $\xi = 0$ nicht glatt sind. Da es aber für Symbole nur auf das Verhalten für $|\xi| \to \infty$ ankommt, verwenden wir auch die Schreibweise (45) und meinen streng genommen $\frac{1}{1+\xi^2} \sim \xi^{-2}\chi(\xi) - \xi^{-4}\chi(\xi) + \dots$, mit unserer üblichen Abschneidefunktion χ.

konstruiert, ist folgende: Setze $p(x, \xi) = e^{-ix\xi}(Pe_\xi)(x)$, wobei $e_\xi(x) = e^{ix\xi}$. Es ist formal leicht zu zeigen, dass $P = P_p$. Jedoch ist es etwas schwieriger nachzuprüfen, dass p ein Symbol ist. Siehe Shubin oder Folland.

[16] Genau genommen sollte man ‚Hauptsymbol der Ordnung m' sagen, da man $P \in \Psi^m(\Omega)$ auch als Element von $\Psi^{m+1}(\Omega)$ betrachten könnte. Sein Hauptsymbol der Ordnung $m+1$ wäre dann Null.

Definition 41. *Ein Symbol $p \in S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt* ***klassisch (oder polyhomogen)****, falls es $p_j \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$ gibt mit*

a) $p \sim \sum_{j=0}^\infty p_j$

b) p_j *ist positiv homogen in ξ vom Grad $m-j$, d.h.*

$$p_j(x, t\xi) = t^{m-j} p_j(x, \xi) \text{ für alle } t > 0,\ x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0.$$

Ein Operator $P \in \Psi^m(\Omega)$ heißt ***klassisch****, wenn sein Symbol klassisch ist.*
Die Menge der klassischen Symbole bzw. Operatoren bezeichnen wir mit $S^m_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ bzw. $\Psi^m_{\mathrm{cl}}(\Omega)$.

Beispiele:

- Sei p ein Polynom bzgl. ξ, dann ist p ein klassisches Symbol: Für $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ setze $p_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m-j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.
- $p(\xi) = |\xi| \chi(\xi)$ ist klassisch, aber kein Polynom. Hier ist $p_0(\xi) = |\xi|$.
- Siehe (45). Hier sind die p_j sogar homogen, nicht bloss positiv homogen.

Bemerkungen:

- Die meisten real vorkommenden Operatoren sind klassisch.
- Die gesamte bisherige Theorie funktioniert für klassische Symbole und Operatoren: Z.B. $P = P_a$ mit $a \in S^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ klassisch, dann existiert ein klassisches $p = p(x, \xi)$ und $P \equiv P_p \bmod \Psi^{-\infty}$.

Ein Vorteil klassischer Operatoren ist, dass der Quotientenraum in der Definition des Hauptsymbols durch einen konkreten Funktionenraum ersetzt werden kann:

Lemma und Definition 42. *Sei*

$$S^{[m]}_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{p \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})) : p \text{ ist positiv homogen vom Grad } m \text{ bzgl. } \xi\}$$

Dann definiert $p \mapsto [p \cdot \chi(\xi)]$ einen Isomorphismus

$$S^{[m]}_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} S^m_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n) / S^{m-1}_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n)\,. \tag{46}$$

Ist $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so nennen wir das entsprechende Element von $S^{[m]}_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ das ***Hauptsymbol*** *von P.*

Mit anderen Worten, hat P ein Symbol wie in Definition 41, so nennen wir den führenden Term p_0 sein Hauptsymbol.

Beweis: Es ist nur nachzuprüfen, dass die Abbildung (46) wohldefiniert und bijektiv ist. Sie ist wohldefiniert, da für eine anderes $\tilde{\chi}$ die Differenz $p\chi - p\tilde{\chi} = p(\chi - \tilde{\chi})$ kompakt getragen in ξ, also in $S^{-\infty} \subset S^{m-1}_{\mathrm{cl}}$ ist. Bijektivität als Übung. □

Beispiele:

- $P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ hat Hauptsymbol $\sigma_m(P) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.
- $P = (-\Delta + 1)^{-1}$ auf $\mathbb{R}^n$ hat Symbol $\frac{1}{|\xi|^2 + 1}$ und Hauptsymbol $|\xi|^{-2}$.

III.9 Die Parametrixkonstruktion für elliptische Operatoren

Definition 43. *$P \in \Psi^m(\Omega)$ heißt **elliptisch**, falls sein Hauptsymbol $\sigma_m(P)$ invertierbar ist.*

Für klassisches P, bei dem man $\sigma_m(P)$ als Funktion auf $\Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ interpretieren kann, meinen wir mit Invertierbarkeit

$$\sigma_m(P)(x, \xi) \neq 0 \text{ für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

In diesem Fall folgt aus $\sigma_m(P) \in S_{\mathrm{cl}}^{[m]}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, dass $\frac{1}{\sigma_m(P)} \in S_{\mathrm{cl}}^{[-m]}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
Beispiele:

- Δ ist elliptisch, da $\sigma_2(\Delta) = -|\xi|^2 \neq 0$ für $\xi \neq 0$.
- $\partial_t - \Delta_x$ (Wärmeleitungsoperator auf $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Variablen $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$) ist nicht elliptisch, denn das dazugehörige Symbol ist $i\tau + |\xi|^2$ und das Hauptsymbol $|\xi|^2$. Elliptisch würde bedeuten, dass $|\xi|^2 \neq 0$ für $(\tau, \xi) \neq 0$ und dies ist z.B. für $(\tau, \xi) = (1, 0)$ nicht erfüllt.

Bemerkung: (Elliptizität für nicht-klassische Operatoren)
Invertierbarkeit von $\sigma_m(P)$ soll genauer auch im nicht-klassischen Fall bedeuten, dass es ein Inverses in $S^{[-m]} = S^{-m}/S^{-m-1}$ hat. Man sieht leicht, dass dies bedeutet, dass für ein beliebiges Symbol $p \in S^m$ von P ein $q \in S^{-m}$ existiert mit $pq \equiv 1 \mod S^{-1}$. Dies ist auch äquivalent dazu, dass es für jedes $K \Subset \Omega$ ein $c > 0$ und $R > 0$ gibt, so dass für alle $x \in K$ gilt

$$|p(x, \xi)| \geqslant c|\xi|^m \quad \text{für } |\xi| > R.$$

(Beweis als Übung) Dies ist die Elliptizitätsbedingung, die Sie in vielen Büchern finden. □

Definition 44. *Eine **Parametrix** eines Operators $P \in \Psi^m(\Omega)$ ist ein Operator $Q \in \Psi^{-m}(\Omega)$ mit:*

$$PQ \equiv I \operatorname{mod} \Psi^{-\infty},$$
$$QP \equiv I \operatorname{mod} \Psi^{-\infty}.$$

Satz 45. *Jeder elliptische Operator $P \in \Psi^m(\Omega)$ hat eine Parametrix, und diese kann explizit konstruiert werden. Die Parametrix ist modulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$ eindeutig bestimmt.*

Für klassisches P ist auch die Parametrix klassisch, wie die Konstruktion zeigen wird.

Wofür dieser Satz? Eigentlich würde man gerne ein Inverses P^{-1} konstruieren. Dieses existiert jedoch i.Allg. nicht, und selbst wenn es existiert, hat man im Fall variabler Koeffizienten meist keine Chance, es zu konstruieren. Eine Parametrix ist für viele Zwecke ein guter Ersatz. Sie hat folgende Vorteile:

- Eine Parametrix existiert immer (für elliptische Operatoren), auch wenn der Operator nicht invertierbar ist.
- Eine Parametrix kann wie folgt bestimmt werden:
  1. Zunächst bestimmt man das Symbol der Parametrix. Dies geht mit rein algebraischen Operationen und Ableitungen.
  2. Die Parametrix (genauer: ihren Schwartz Kern) erhält man aus ihrem Symbol mittels Fourier-Transformation, siehe (35).

Beweis (Die Parametrixkonstruktion): Wir geben die Konstruktion an und ergänzen am Schluss einige Details. In den Schritten 1.-3. konstruieren wir zunächst eine Rechts-Parametrix, d.h. ein Q mit $PQ \equiv I \mod \Psi^{-\infty}$.

1. Bestimme $Q_0 \in \Psi^{-m}$ mit Hauptsymbol $\sigma_{-m}(Q_0) = \frac{1}{\sigma_m(P)}$.
2. Es gilt $PQ_0 \in \Psi^0$ und $\sigma_0(PQ_0) = \sigma_m(P)\sigma_{-m}(Q_0) = 1 = \sigma_0(I)$. Daher ist $\sigma_0(PQ_0 - I) = 0$, woraus $PQ_0 - I \in \Psi^{-1}$ folgt. Also ist
$$PQ_0 = I + R_0 \text{ mit } R_0 \in \Psi^{-1}\,. \tag{47}$$
Also ist Q_0 immerhin schon eine ‚schwache' Rechts-Parametrix: Wir müssen den Fehler noch von Ψ^{-1} auf $\Psi^{-\infty}$ verbessern.[17]
Zu diesem Zweck würden wir gerne (47) von rechts mit $(I + R_0)^{-1}$ multiplizieren. Dieses Inverse muss aber nicht existieren. Was tun?
3. Wir verwenden die Idee der Neumannschen Reihe (= geometrische Reihe für Operatoren). Da diese aber nicht konvergieren muss, verwenden wir asymptotische Summation: Bestimme $S \in \Psi^0$ mit
$$S \sim I - R_0 + R_0^2 - \dots$$
S existiert, da $R_0 \in \Psi^{-1}$, $R_0^2 \in \Psi^{-2}$, ... Die asymptotische Summe bedeutet, dass man für alle N schreiben kann
$$S = I - R_0 + R_0^2 - \dots \pm R_0^{N-1} + R_N \quad \text{mit } R_N \in \Psi^{-N}$$
Setze nun $Q = Q_0 S$, dann folgt für alle N
$$\begin{aligned} PQ &= PQ_0S = (I + R_0)S = (I + R_0)(I - R_0 + R_0^2 - ... \pm R_0^{N-1} + R_N) \\ &= I \pm R_0^N + (I + R_0)R_N. \end{aligned}$$
Hierbei ist $\pm R_0^N + (I + R_0)R_N \in \Psi^{-N}$, also $PQ - I \in \Psi^{-N}$. Da dies für alle N gilt, folgt $PQ - I \in \Psi^{-\infty}$. Also ist $PQ = I + R$ mit $R \in \Psi^{-\infty}$.
4. Wir zeigen, dass eine Rechtsparametrix auch eine Linksparametrix ist. Zunächst gilt (immer modulo $\Psi^{-\infty}$)
$$PQ \equiv I \Rightarrow QPQ \equiv Q \tag{48}$$
□
(multipliziere von links mit Q). Mit P ist auch Q elliptisch (da für die Hauptsymbole gilt $\sigma_m(P)\sigma_{-m}(Q) = 1$), also hat Q eine Rechtsparametrix $\tilde{P}$, d.h. $Q\tilde{P} \equiv I$. Damit folgt
$$QP \equiv QPQ\tilde{P} \overset{(48)}{\equiv} Q\tilde{P} \equiv I\,,$$
das heißt, Q ist auch eine Linksparametrix.
5. Damit folgt die Eindeutigkeit der Links- (und damit auch der Rechts-)Parametrix: Multipliziert man $I \equiv PQ \equiv PQ'$ von links mit Q, folgt
$$Q \equiv Q(PQ) \equiv Q(PQ') = (QP)Q' \equiv Q'\,.$$

Der Beweis ruht auf folgenden Tatsachen über ΨDOs.

[17] Q_0 ist genau der im Abschnitt ‚ΨDOs, Grundidee' angegebene Operator (dort Q genannt, R_0 wurde dort R genannt).

- Dem Kompositionssatz und der Formel $\sigma_{m+l}(P \circ Q) = \sigma_m(P)\sigma_l(Q)$.
- Zu jedem Element $q \in S^{[-m]}$ gibt es ein $Q \in \Psi^{-m}$ mit Hauptsymbol q. (Schritt 1 mit $q = \frac{1}{\sigma_m(P)}$)
- Der Linearität der Abbildung $\sigma_0 : \Psi^0 \to S^{[0]}$. (Schritt 2)
- Ist $A \in \Psi^0$ und $\sigma_0(A) = 0$, so folgt $A \in \Psi^{-1}$. (Schritt 2 mit $A = PQ_0 - I$)
- Die asymptotische Summation für Operatoren ist definiert. (Schritt 3)

Aufbauend hierauf war der Beweis reine (einfache) Algebra.

Die algebraische Struktur hinter der Parametrixkonstruktion

Wir fassen die wesentlichen Eigenschaften des Pseudodifferentialkalküls in algebraische Begriffe. (Dieser Abschnitt kann beim ersten Lesen übersprungen werden.)

Definition 46. *Eine (assoziative)* ***Algebra*** A *(über $\mathbb{C}$) ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit zusätzlicher Produktstruktur, d.h. einer Abbildung $A \times A \to A : (v, w) \mapsto v \cdot w$, die bilinear ist und das Assoziativgesetz erfüllt.*

Beispiele:

- $A =$ die Menge der $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf einer Menge, mit Multiplikation als Produkt.
- $A =$ die Menge der linearen Operatoren auf einem Vektorraum V, mit Komposition als Produkt.
- $A =$ die Menge der $n \times n$-Matrizen (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Matrixprodukt. Diese ist isomorph zum vorigen Beispiel im Fall $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.
- Ein bekanntes Beispiel einer *nicht-assoziativen* Algebra ist $A = \mathbb{R}^3$, mit Kreuzprodukt $(v, w) \mapsto v \times w$.

  (Es gilt das Distributivgesetz, aber nicht das Assoziativgesetz, z.B. ist $e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$, aber $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0$.)
- $A = \mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt ist keine Algebra, da das Skalarprodukt Werte in $\mathbb{R}$, nicht in $\mathbb{R}^n$ hat.

Die Algebra im ersten Beispiel ist kommutativ, d.h. $v \cdot w = w \cdot v$ für alle $v, w \in A$, die anderen nicht.

Im Folgenden sind alle Algebren assoziativ, daher schreiben wir das nicht immer hin.

Die hier auftretenden Algebren haben eine weitere Struktur:

Definition 47. *Eine* ***Filtrierung*** *einer Algebra A ist eine Folge von Untervektorräumen $A_m \subset A$, $m \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} &i) && A = \bigcup_m A_m, \\ &ii) && \cdots \subset A_{-2} \subset A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \\ &iii) && A_m \cdot A_{m'} \subset A_{m+m'}. \end{aligned}$$

Eine ***filtrierte Algebra*** *ist eine Algebra zusammen mit einer gegebenen Filtrierung.*

Man nennt dies auch eine $\mathbb{Z}$-Filtrierung. Analog gibt es $\mathbb{R}$-Filtrierungen (dann ist ein A_m für jedes $m \in \mathbb{R}$ gegeben, und ii) ist ersetzt durch: $A_m \subset A_{m'}$ für $m < m'$).

Beispiele:

- $A = \{\text{Polynome auf } \mathbb{R}^n\}$, $A_m = \{\text{Polynome vom Grad } \leqslant m\}$ mit dem üblichen Produkt.
- $A = \{\text{Differentialoperatoren auf } \Omega\}$, $A_m = \mathrm{Diff}^m(\Omega) := \{\text{Differentialoperatoren der Ordnung} \leqslant m\}$ mit der Komposition von Operatoren als Produkt.

  Man schreibt auch $A = \mathrm{Diff}^*(\Omega)$ statt $A = \bigcup_m \mathrm{Diff}^m(\Omega)$.
- $A_m = S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$, also $A = S^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, mit der Multiplikation als Produkt.
- $A_m = S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, also $A = S^*(\Omega, \mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, mit dem Produkt $\#$, definiert durch (41).
- $A_m = \Psi^m_{\mathrm{eig}}(\Omega)$ und $A = \Psi^*_{\mathrm{eig}}(\Omega)$ (eigentlich getragene ΨDOs), mit Komposition als Produkt.

In den ersten beiden Beispielen ist $A_m = \{0\}$ für $m < 0$. In den anderen Beispielen kann man $m \in \mathbb{R}$ oder $m \in \mathbb{Z}$ betrachten und auch klassische Symbole bzw. Operatoren betrachten. Die Algebren im ersten und dritten Beispiel sind kommutativ, die anderen nicht.

Wie immer spielen auch die strukturerhaltenden Abbildungen eine wichtige Rolle:

Definition 48. *Seien A, B Algebren. Eine Abbildung $F : A \to B$ heißt **Algebra-Homomorphismus**, wenn F linear und $F(v \cdot w) = F(v) \cdot F(w)$ für alle v, w. Sind A, B filtriert, so sagen wir, F ist ein **Homomorphismus filtrierter Algebren**, wenn zusätzlich $F(A_m) \subset B_m$ für alle m gilt.*

Wir wollen nun das Hauptsymbol algebraisch fassen. Dazu zunächst folgender Begriff.

Definition 49. *Sei A eine filtrierte Algebra. Setze $A^{[m]} := A_m/A_{m-1}$. Dann heißt $A^{gr} := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} A^{[m]}$ die A zugeordnete graduierte Algebra.*[18]

Man sollte sich überzeugen, dass A^{gr} tatsächlich eine Algebra ist: Um das Produkt zu definieren, reicht es, es auf einzelnen Summanden der direkten Summe zu definieren. Seien also $[a] \in A^{[m]}, [b] \in A^{[l]}$, d.h. die Äquivalenzklassen von Elementen $a \in A_m, b \in A_l$. Dann definiere $[a] \cdot [b] := [ab]$ (wie auch sonst?). Nachzuprüfen ist, dass dies wohldefiniert ist, d.h. dass aus $[a'] = [a], [b'] = [b]$ auch $[a'b'] = [ab]$ folgt.[19]

Der Sinn dieses Begriffs liegt darin, dass das Produkt auf A^{gr} nur den führenden Teil des Produkts auf A übrigbehält und dieser oft einfacher zu berechnen ist und doch wesentliche Information enthält. Beispiel:

$A = S^*_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit dem (komplizierten) Produkt $\#$, dann

$A^{gr} = \bigoplus_m S^{[m]}_{\mathrm{cl}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit punktweiser Multiplikation von Funktionen als Produkt.

[18] Allgemein ist eine **Graduierung** einer Algebra A eine Folge von Untervektorräumen A^m, $m \in \mathbb{Z}$, mit $A = \bigoplus_m A^m$ als Vektorraum und $A^m \cdot A^{m'} \subset A^{m+m'}$ für alle m, m', und eine **graduierte Algebra** ist eine Algebra mit Graduierung. Dies nennt man auch eine $\mathbb{Z}$-Graduierung (häufig trifft man auch $\mathbb{Z}_2$-Graduierungen an, wobei $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$). Graduierte Algebren sind spezieller als filtrierte Algebren: Jede graduierte Algebra ist mittels $A_m := \bigoplus_{m' \leqslant m} A^m$ filtriert, aber nicht jede filtrierte Algebra ist graduiert (d.h. isomorph zu ihrer graduierten Algebra). Z.B. ist die Algebra der Polynome graduiert (mit $A^m = \{\text{Polynome, die homogen vom Grad } m \text{ sind}\}$). Aber $\mathrm{Diff}^*(\Omega)$ mit Komposition ist nicht graduiert, da das Produkt zweier homogener Elemente nicht wieder homogen zu sein braucht, z.B. ist mit $P = D$, $Q = a$ (Multiplikation mit der Funktion a) zwar P homogen vom Grad 1 und Q homogen vom Grad 0, aber $PQ = aD + \frac{1}{i}a$ ist nicht homogen, da es Terme nullter und erster Ordnung enthält.

[19] Beweis: $[a'] = [a] \Rightarrow a' = a + r$ mit $r \in A_{m-1}$. $[b'] = [b] \Rightarrow b' = b + s$ mit $s \in A_{l-1}$. Dann $a'b' = ab + rb + as + rs$, und $rb + as + rs \in A_{m+l-1}$, also $[a'b'] = [ab]$.

Insbesondere ist in diesem Beispiel das Produkt auf A nicht-kommutativ, das auf A^{gr} aber kommutativ.

Wir formulieren nun die wesentlichen Eigenschaften, die die Parametrix-Konstruktion, Satz 45, ermöglichen. Wir schreiben $S^{[m]} = S^m/S^{m-1}$. Damit alle Kompositionen definiert sind, formulieren wir dies für eigentlich getragene Operatoren Ψ^*_{eig}.

Satz 50. *$\sigma_* : \Psi^*_{\text{eig}} \to S^{[*]}$ ist ein Homomorphismus filtrierter Algebren.*

D.h. σ_* ist linear, bildet $\Psi^m_{\text{eig}} \to S^{[m]}$ ab und $\sigma_{m+m'}(P \circ Q) = \sigma_m(P)\sigma_m(Q)$.

Satz 51. *Die Folge von Abbildungen*

$$0 \to \Psi^{m-1}_{\text{eig}} \xrightarrow{i} \Psi^m_{\text{eig}} \xrightarrow{\sigma_m} S^{[m]} \to 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz für jedes m, d.h. das Bild jeder Abbildung ist gleich dem Kern der folgenden Abbildung (i ist die Inklusion).

Die erste und letzte Abbildung sind die einzig möglichen, trivialen, also die Nullabbildungen: $0 \to 0$ bzw. $p \to 0$ für alle p. Im Einzelnen:

- Exakt bei Ψ^{m-1}_{eig}: Wegen Bild$(0) = 0$ bedeutet dies, dass i injektiv ist. Das ist trivial.
- Exakt bei Ψ^m_{eig}: Dies bedeutet, dass für alle $P \in \Psi^m_{\text{eig}}$ gilt: $P \in \Psi^{m-1}_{\text{eig}} \Leftrightarrow \sigma_m(P) = 0$. Das stimmt, da $\sigma_m(P) = 0 \Leftrightarrow \sigma(P) \in S^{m-1}$ nach Definition des Hauptsymbols.
- Exakt bei $S^{[m]}$: Wegen Kern$(0) = S^{[m]}$ bedeutet dies, dass σ_m surjektiv ist, d.h. $\forall\, p \in S^{[m]}$ gibt es $P \in \Psi^m_{\text{eig}}$ mit $p = \sigma_m(P)$. Das folgt aus Lemma 38.

Bemerkung: Die Aussage des Satzes ist äquivalent zur Aussage, dass σ_m einen Isomorphismus $\Psi^m_{\text{eig}}/\Psi^{m-1}_{\text{eig}} \to S^{[m]}$ definiert. Wegen $S^{[m]} = S^m/S^{m-1}$ ist dies eine 'grobe' Version (Hauptsymbol statt Symbol) der Umkehrabbildung von (37).

Schließlich brauchen wir noch die asymptotische Summation:

Satz 52. *Für $P_j \in \Psi^{m-j}_{\text{eig}}$, $j \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $P \in \Psi^m_{\text{eig}}$ mit $P \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j$, d.h. $P - \sum_{j=0}^{N-1} P_j \in \Psi^{m-N}_{\text{eig}}$, $\forall N$.*

Dies folgt direkt aus Satz 28 über die asymptotische Summation für Symbole.

In Kapitel III.11 lernen wir als erste Anwendung der Parametrixkonstruktion den Satz über die elliptische Regularität kennen.

III.10 ΨDOs auf Sobolevräumen

Bisher kennen wir folgende Abbildungseigenschaften eines ΨDO P:

$$P : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega), \quad P : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

und Verbesserungen bzgl. der Trägereigenschaften, falls P eigentlich getragen ist.

Zwischen $C_0^\infty(\Omega)$ und $\mathcal{E}'(\Omega)$ liegen viele andere Funktionenräume, z.B. die Sobolevräume. Wie verhalten sich ΨDOs auf Sobolevräumen?

Zur Erinnerung: Für $s \in \mathbb{R}$ ist

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : <\xi>^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

die Menge der Distributionen auf $\mathbb{R}^n$, die global die Sobolev-Regularität s haben. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen definieren wir

$$H^s_{\text{loc}}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \rho u \in H^s(\mathbb{R}^n)\, \forall \rho \in C_0^\infty(\Omega)\}$$
$$H^s_{\text{comp}}(\Omega) := H^s_{\text{loc}}(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$$

die Menge der Distributionen auf Ω, die lokal die Sobolev-Regularität s haben, und die kompakt getragenen H^s-Distributionen auf Ω. Beachte, was Zugehörigkeit einer Funktion (bzw. Distribution) zu den Funktionenräumen bedeutet:

- $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ und $C^\infty(\Omega)$: Bedingungen an *lokales Verhalten*[20];
- $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$: zusätzlich *kompakter Träger*;
- $H^s(\Omega)$ bzw. $C_b^\infty(\Omega)$: das jeweilige Regularitätsverhalten gilt *gleichmäßig* auf ganz Ω.[21]

Offenbar gilt $H^s_{\text{comp}}(\Omega) \subset H^s(\Omega) \subset H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ und analog $C_0^\infty(\Omega) \subset C_b^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$.

Was können wir erwarten? Betrachten wir die zwei Aspekte *Regularität* (d.h. die Sobolevordnung s) und *Trägereigenschaften/Gleichmäßigkeit* getrennt:

Regularität: Wir wissen, dass ein Differentialoperator der Ordnung m die Sobolevordnung (also s) um m reduziert. Dasselbe werden wir für ΨDOs der Ordnung m zeigen.[22]

Trägereigenschaften/Gleichmäßigkeit: Wir können ΨDOs nur auf kompakt getragene Distributionen anwenden. Da sie nicht lokal sind, wird das Ergebnis i.A. nicht kompakt getragen sein und nur lokale Regularität haben.

Falls wir zusätzliche Forderungen stellen, lässt sich das verbessern:

- Eigentlich getragene ΨDOs werden comp $\to$ comp und loc $\to$ loc abbilden, vgl. Proposition 36.
- Falls wir annehmen, dass die Symbolabschätzungen *gleichmäßig auf* Ω gelten (d.h. die Konstanten in (15) hängen nicht von K ab), erwarten wir gute Abbildungeigenschaften zwischen H^s-Räumen (ohne loc und comp).

Daher ist folgender Satz nicht überraschend.

Satz 53. *Sei $P \in \Psi^m(\Omega)$. Dann gilt:*

a) P bildet ab
$$P : H^s_{\text{comp}}(\Omega) \to H^{s-m}_{\text{loc}}(\Omega)\,.$$

b) Ist P eigentlich getragen, so
$$P : H^s_{\text{loc}}(\Omega) \to H^{s-m}_{\text{loc}}(\Omega), \quad P : H^s_{\text{comp}}(\Omega) \to H^{s-m}_{\text{comp}}(\Omega)\,.$$

c) Falls $P \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$ (Definition siehe unten), so
$$P : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)\,.$$

[20] aber keine Bedingung daran, wie sich dies quantitativ zum Rand oder nach 'unendlich' hin verschlechtert

[21] Wir haben $H^s(\Omega)$ hier nur für $\Omega = \mathbb{R}^n$ definiert. Für allgemeine offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $H^s(\Omega)$ im Fall $s \in \mathbb{N}_0$ definiert als die Menge der $L^2(\Omega)$-Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung s in $L^2(\Omega)$ sind. Für beliebige $s \in \mathbb{R}$ lässt sich $H^s(\Omega)$ ausgehend von diesem Spezialfall mittels Interpolation und Dualität definieren, aber wir benötigen das hier nicht.

[22] wobei für ΨDOs m auch negativ sein kann, also die Sobolevordnung verbessert werden kann!

Man kann die Räume $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ und $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ mit natürlichen Topologien versehen, dann ist P jeweils stetig.

Wir werden den Satz nicht vollständig beweisen, aber die wesentlichen Schritte skizzieren. Zunächst zur Definition von $\Psi^m_b(\mathbb{R}^n)$. Die Symbolabschätzungen sollen hier gleichmäßig für alle x gelten.

Definition 54. *Für $m \in \mathbb{R}$ definiere*

$$S^m_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^n) := \{p \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n) : \forall\, \alpha, \beta,\ \exists\, C_{\alpha,\beta} \text{ mit}$$
$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} < \xi >^{m-|\beta|}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N,\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

$\Psi^m_b(\mathbb{R}^n)$ sei die Menge der Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathbb{R}^n$, die mittels einer Amplitude in $S^m_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiert werden können.

Analog zu $\text{Diff}^m(\mathbb{R}^n) \subset \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ haben wir $\text{Diff}^m_b(\mathbb{R}^n) \subset \Psi^m_b(\mathbb{R}^n)$, wobei $\text{Diff}^m_b(\mathbb{R}^n)$ die Differentialoperatoren mit $C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$-Koeffizienten sind.

Für $\Psi^m_b(\mathbb{R}^n)$ gelten dieselben Sätze wie für $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, mutatis mutandis, und einige Verbesserungen. Z.B. hat jeder Operator ein Symbol in $S^m_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\Psi^*_b(\mathbb{R}^n)$ ist abgeschlossen unter Adjungieren und sogar unter Komposition (ohne die Einschränkung, eigentlich getragen zu sein). Siehe Abschnitt III.14.

Der Kern des Beweises von Satz 53 liegt in folgender Aussage. Dies ist der Spezialfall $s = m = 0$ von c). Wegen seiner Bedeutung formulieren wir ihn als eigenen Satz.

Satz 55. *$P \in \Psi^0_b(\mathbb{R}^n)$, dann ist $P : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt.*

Genauer bedeutet dies: Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|Pu\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{L^2}\,.$$

Weil $C^\infty_0(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist, gibt es dann eine eindeutige stetige Fortsetzung $P : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

Ein Beweis ist z.B. in Shubin zu finden. Hier soll nur kurz erläutert werden, warum diese Aussage sinnvoll ist. Dazu betrachten wir zwei Spezialfälle für einen ΨDO

$$(Pu)(x) = \int e^{ix\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, đ\xi$$

mit $p \in S^0_b$:

a) p hängt nur von x ab, $p(x,\xi) = b(x)$ für eine beschränkte Funktion b auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $Pu = bu$ (Multiplikationsoperator mit b) und daher $\|Pu\|^2_{L^2} = \int |bu|^2 \leqslant (\sup|b|)^2\|u\|^2_{L^2}$.

b) p hängt nur von ξ ab. Dann ist $\widehat{Pu} = p(\xi)\hat{u}$, also

$$\|Pu\|_{L^2} = \|\widehat{Pu}\|_{L^2} = \|p\hat{u}\|_{L^2} \leqslant (\sup|p|)\,\|\hat{u}\|_{L^2} = (\sup|p|)\,\|u\|_{L^2}$$

nach Parseval. In diesem Fall ist P der Faltungsoperator $Pu = \check{p} * u$.

Im Fall a) wird das 'b' von S^0_b verwendet, im zweiten Fall die '0'.[23]

[23] wobei in diesem Spezialfall nur die Abschätzung $|p(\xi)| \leqslant C < \xi >^0$, nicht aber die Abschätzungen für die Ableitung benötigt wurden

Beweis (von Satz 53): Aufbauend auf Satz 55 beweisen wir zunächst Teil c). Sei $< D >^s$ der ΨDO mit Symbol $< \xi >^s$. Per Definition ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $< D >^s u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Genauer: $< D >^s$: $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus. Analog ist $< D >^{s-m}$: $H^{s-m}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus.

Sei nun $P \in \Psi_0^m(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $P' :=< D >^{s-m} P < D >^{-s}$. Wegen $< D >^s \in \Psi_b^s(\mathbb{R}^n)$ ist $P' \in \Psi_b^0(\mathbb{R}^n)$ und somit $P' : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Damit ist

$$P =< D >^{-s+m} P' < D >^s \colon H^s \xrightarrow{<D>^s} L^2 \xrightarrow{P'} L^2 \xrightarrow{<D>^{-s+m}} H^{s-m}$$

beschränkt.

Für Teil a) genügt es, zu zeigen, dass für beliebige $\rho, \rho' \in C_0^\infty(\Omega)$ und $P \in \Psi^m(\Omega)$ gilt, dass der Operator $P' := \rho P \rho'$ beschränkt $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ ist. Nun ist aber $P' \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$, denn falls P durch die Amplitude a gegeben ist, so ist P' durch die Amplitude $a'(x, y, \xi) = \rho(x)\rho'(y)a(x, y, \xi)$ gegeben, und diese ist in $S_b^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ wegen der kompakten Träger.

Beweis der ersten Aussage in b): Sei P eigentlich getragen. Aus der Definition von ‚eigentlich getragen' folgt:

Für jedes $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt es $\rho' \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\rho P = \rho P \rho'$.[24]

Sei nun $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Fixiere $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$, dann müssen wir $\rho P u \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ zeigen. Wähle $\rho' \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\rho P = \rho P \rho'$. Mit $\rho P \rho' \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$ folgt $\rho P u = \rho P \rho' u \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ aus c).

Die zweite Aussage in b) folgt direkt aus a), da P kompakt getragene Distributionen in kompakt getragene Distributionen abbildet. □

III.11 Elliptische Regularität

Wir kommen nun zu einer ersten Anwendung der Parametrixkonstruktion.

Satz 56 (Elliptische Regularität, C^∞-Version). *Sei $P \in \Psi^m(\Omega)$ elliptisch, $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Dann gilt*

$$Pu = f,\ f \in C^\infty(\Omega) \Longrightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

Ist P eigentlich getragen (z.B. ein Differentialoperator), gilt dies auch für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiel:

- $P = \Delta$: harmonische Funktionen sind C^∞. (wähle $f = 0$)

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $f = 0$. Sei $Q \in \Psi^{-m}$ eine Parametrix für P, also $QP = I + R$ mit $R \in \Psi^{-\infty}$. Dann gilt:

$$0 = Pu \Longrightarrow 0 = QPu = (I + R)u = u + Ru \Longrightarrow u = -Ru.$$

Da R glättend ist, folgt $Ru \in C^\infty$ und schließlich $u \in C^\infty$.

Sei nun $f \in C^\infty$. Zunächst bemerken wir, dass P sogar eine eigentlich getragene Parametrix hat. Denn ist Q eine beliebige Parametrix mit Schwartz Kern K, so setze $K' = \rho K$, wobei $\rho \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ eigentlich getragen und gleich 1 in einer Umgebung der Diagonale ist. Wegen $\operatorname{sing\,supp} K \subset \mathrm{Diag}_\Omega$ ist $K' - K$ glatt, d.h. für den Operator Q' mit Schwartz Kern K' gilt $Q' - Q \in \Psi^{-\infty}$. Daraus folgt sofort, dass Q' auch eine Parametrix für P ist, und Q' ist kompakt getragen.

[24] Etwas schärfer gilt sogar: Für jedes $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt es $K' \Subset \Omega$ derart, dass $\rho P = \rho P \rho'$ für alle $\rho' \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\rho'_{|K'} = 1$ gilt. Das braucht man, wenn man die Stetigkeit von P zwischen den Sobolevräumen zeigen will.

Sei also Q eine eigentlich getragene Parametrix für P. Dann haben wir

$$f = Pu \Longrightarrow Qf = QPu = (I + R)u = u + Ru \Longrightarrow u = Qf - Ru.$$

Da $Qf \in C^\infty$ und $Ru \in C^\infty$, folgt wieder $u \in C^\infty$.

Ist P eigentlich getragen, so ist es auch R und die Gleichung $Pu = f$ sowie Ru sind für $u \in \mathcal{D}'$ definiert. Dasselbe Argument wie vorher liefert $f \in C^\infty$. □

Mittels der Sobolev-Räume lässt sich dies verfeinern:

Satz 57 (Elliptische Regularität, Sobolev-Version). *Sei $P \in \Psi^m(\Omega)$ elliptisch, $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Dann gilt*

$$Pu = f,\ f \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Longrightarrow u \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Ist P eigentlich getragen, gilt dies auch für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiel:

- $P = \Delta$, also $m = 2$. Aus $\Delta u = f$ und $f \in H^s_{\mathrm{loc}}$ folgt $u \in H^{s+2}_{\mathrm{loc}}$.

Dies ist die natürliche Umkehrung der offensichtlichen Aussage $u \in H^{s+2}_{\mathrm{loc}} \Rightarrow f \in H^s_{\mathrm{loc}}$ und damit die bestmögliche Regularität, die man für u erhoffen kann.

Zum Vergleich: Aus $u \in C^{k+2}$ folgt $f \in C^k$, aber aus $f \in C^k$ folgt nicht $u \in C^{k+2}$.

Beweis: Der Beweis ist im Wesentlichen identisch mit dem Beweis von Satz 56. Der Hauptpunkt ist $f \in H^s_{\mathrm{loc}} \Rightarrow Qf \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}$. Zusätzlich ist $Ru \in C^\infty \subset H^{s+m}_{\mathrm{loc}}$. □

Satz 56 lässt sich aus Satz 57 herleiten: Ist $f \in C^\infty$, so ist $f \in H^s_{\mathrm{loc}}$ für alle s, also $u \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}$ für alle s, also $u \in C^\infty$ nach dem Einbettungssatz.

III.12 Transformation von ΨDOs unter Koordinatentransformationen

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ und $\kappa : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus, dann ist durch κ ein Koordinatenwechsel gegeben.

Beispiel:

- $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^2$, $x' = \kappa(x)$ mit $x'_1 = x_1 + x_2$ und $x'_2 = x_1 - x_2$. Dies ist ein linearer Koordinatenwechsel.

Jedem Objekt (z.B. Funktion, Operator) auf Ω' entspricht ein Objekt auf Ω. Für Funktionen ist diese Entsprechung durch Zurückziehen $\kappa^* : C^\infty(\Omega') \to C^\infty(\Omega)$, $u \mapsto u \circ \kappa$ gegeben. Die Gleichung $u = \kappa^* u'$ kann man auch

$$u(x) = u'(x'), \quad \text{falls } x' = \kappa(x)$$

schreiben. Für Operatoren (z.B. ΨDOs) liest man die Entsprechung an dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_0^\infty(\Omega') \arrow[r, "P'"] \arrow[d, "\kappa^*"] & C^\infty(\Omega') \arrow[d, "\kappa^*"] \\ C_0^\infty(\Omega) \arrow[r, "P"] & C^\infty(\Omega) \end{tikzcd}$$

ab: $P = \kappa^* \circ P' \circ (\kappa^*)^{-1}$. Dies ließe sich auch schreiben als

$$(Pu)(x) = (P'u')(x'), \quad \text{falls } x' = \kappa(x),\ u = \kappa^* u'.$$

Wir schreiben auch $P = (P')_\kappa$, der unter κ zurückgezogene Operator P'.

Satz 58. *Sei $\kappa : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus und $P' \in \Psi^m(\Omega')$. Sei $P := (P')_\kappa$ der transformierte Operator. Dann ist $P \in \Psi^m(\Omega)$, und es gilt*

$$\sigma_m(P)(x, \xi) = \sigma_m(P')(x', \xi'), \text{ mit } x' = \kappa(x), \ \xi' = (d\kappa^t_{|x})^{-1}\xi \tag{49}$$

Hierbei bezeichnet $d\kappa$ die Jacobimatrix von κ und $d\kappa^t$ ihr Transponiertes. Bemerkenswert ist hier vor allem, wie die ξ-Variable transformiert wird. Es gibt auch eine Formel für das vollständige Symbol, doch ist diese sehr viel komplizierter.

Beweis: Wir schreiben den Operator P' explizit aus und wechseln die Variablen. Sei P' durch die Amplitude a' gegeben. Mit $x' = \kappa(x)$ und $u = \kappa^* u'$, also $u'(y') = u(y)$ für $y' = \kappa(y)$ gilt:

$$\begin{aligned}(Pu)(x) = (P'u')(x') &= \int\int e^{i(x'-y')\xi'} a'(x', y', \xi')u'(y')dy' \,đ\xi' = \\ &= \int\int e^{i(\kappa(x)-\kappa(y))\xi'} a'(\kappa(x), \kappa(y), \xi')|\det d\kappa_{|y}|u(y)dy\,đ\xi'. \end{aligned}\tag{50}$$

Wir müssen dies so umschreiben, dass der Exponentialterm in (50) von der Form $e^{i(x-y)\xi}$ ist. Dies geht wie folgt:

- Falls $\kappa(x) = Tx$ linear ist, dann ist $(\kappa(x) - \kappa(y))\xi' = (Tx - Ty)\xi' = [T(x - y)]\xi' = (x - y)(T^t\xi') = (x - y)\xi$ mit $\xi = T^t\xi'$, wobei T^t das Transponierte von T ist.
- Falls κ beliebig ist, verwenden wir die Taylorentwicklung erster Ordnung: $\kappa(x) = \kappa(y) + G(x, y)(x - y)$, wobei $G(x, y)$ eine $n \times n$-Matrix für alle x, y ist und glatt von x, y abhängt. Dabei ist
$$G(y, y) = d\kappa_{|y} \tag{51}$$
Also $\kappa(x)-\kappa(y) = G(x, y)(x-y)$ und $(\kappa(x)-\kappa(y))\xi' = (x-y)(G^t(x, y)\xi') = (x-y)\xi$ mit $\xi = G^t(x, y)\xi'$. Für das Volumenelement folgt $d\xi' = \frac{1}{|\det G^t(x,y)|}d\xi$.

Aus (50) wird nun:

$$\begin{aligned}(Pu)(x) &= \int\int e^{i(x-y)\xi} a'(\kappa(x), \kappa(y), G^t(x, y)^{-1}\xi)\frac{|\det d\kappa_{|y}|}{|\det G^t(x, y)|}u(y)dy\,đ\xi \\ &= \int\int e^{i(x-y)\xi} a(x, y, \xi)u(y)dy\,đ\xi \quad \text{ mit} \\ a(x, y, \xi) &= a'(\kappa(x), \kappa(y), G^t(x, y)^{-1}\xi)\frac{|\det d\kappa_{|y}|}{|\det G^t(x, y)|}\end{aligned}\tag{52}$$

Wir haben hier angenommen, dass $G(x, y)$ für alle x, y invertierbar ist. Dies ist nicht notwendig der Fall. Wir wissen aber, dass $G(y, y) = d\kappa_{|y}$ für alle $y \in \Omega$ invertierbar ist, da κ ein Diffeomorphismus ist. Nun ist die Menge der invertierbaren Matrizen offen in der Menge aller Matrizen (als Urbild der Null unter der Abbildung det). Da G stetig ist, folgt, dass die Menge $U = \{(x, y) : G(x, y) \text{ ist invertierbar}\} \subset \Omega \times \Omega$ offen ist. Da diese Menge Diag_Ω enthält, gibt es nach Lemma 31 eine glatte Funktion ρ mit Träger in U, die gleich eins in einer Umgebung von Diag_Ω ist. Die Rechnung oben ist nun gerechtfertigt, wenn wir a durch ρa (bzw. a' durch $\rho' a'$) ersetzen. Der Fehler $(1 - \rho)a$ trägt nur einen glättenden Operator bei, für den die Behauptung des Satzes offensichtlich ist. Daher können wir im Folgenden o.B.d.A. annehmen, dass schon $\operatorname{supp} a \subset U \times \mathbb{R}^n$, also $G(x, y)$ auf dem Integrationsgebiet invertierbar ist.

Es ist nachzuprüfen, dass a ein Symbol ist. Dies kann man relativ leicht nachrechnen und wird dem Leser überlassen. Also folgt $P \in \Psi^m(\Omega)$.

Es ist noch die Relation (49) der Hauptsymbole nachzuprüfen. Allgemein folgt aus der Formel für das Symbol $\sigma(P)(x', \xi') = a'(x', x', \xi') + \sum_{|\alpha| \geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} \partial_y^\alpha D_\xi^\alpha a'_{|y'=x'}$, dass in $S^m(\Omega, \mathbb{R}^n)/S^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\sigma_m(P')(x', \xi') = [a'(x', x', \xi')].$$

Aus (52) und (51) erhält man also

$$\sigma_m(P)(x, \xi) = [a(x, x, \xi)] = [a'(\kappa(x), \kappa(x), G^t(x, x)^{-1}\xi) \underbrace{\frac{|\det D\kappa_{|x}|}{|\det G^t(x, x)|}}_{=1}] = \sigma_m(P')(x', \xi')$$

mit $\xi' = ((D\kappa)^t_{|x})^{-1}\xi$, was zu zeigen war. □

III.12a Invarianz von Sobolevräumen unter Koordinatentransformationen

Die Sobolevräume sind mittels der Fourier-Transformation definiert. Da sich diese auf die lineare Struktur des $\mathbb{R}^n$ bezieht, ist zunächst unklar, ob eine (nicht-linear) transformierte Sobolev-Funktion wieder eine Sobolev-Funktion ist. Mittels PsiDO ist das einfach zu klären. Es ist natürlicher, dies lokal zu formulieren:

Satz 59. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\kappa : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt für $u' \in \mathcal{D}'(\Omega')$:*

$$u' \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega') \Leftrightarrow \kappa^* u' \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

Dies ist leicht einzusehen im Fall $s \in \mathbb{N}_0$ mittels der Kettenregel, da dann H^s_{loc} durch lokale L^2-Beschränktheit der Ableitungen bis zur Ordnung s charakterisiert werden kann.

Doch wie geht man für allgemeines $s \in \mathbb{R}$ vor? Zunächst charakterisieren wir H^s_{loc} mittels PsiDO:

Lemma 60. *Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow Pu \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ für alle eigentlich getragenen } P \in \Psi^s(\Omega)$$

Beweis: Zu "⇒" siehe Satz 53. Für "⇐" würden wir gerne P^{-1} auf Pu anwenden, das geht aber nur, wenn P invertierbar ist, und es ist nicht klar, ob es überhaupt invertierbare P gibt. Die brauchen wir auch nicht, Elliptizität reicht:

Wähle $P \in \Psi^s(\Omega)$ eigentlich getragen und elliptisch (das existiert offenbar, man nehme z.B. das Symbol $< \xi >^s$ und schneide dann den Schwartz-Kern mittels einer eigentlich getragenen Funktion, die nahe der Diagonale gleich Eins ist, ab; vgl. Lemma 38). Sei $Q \in \Psi^{-s}(\Omega)$ eine Parametrix für P, also $QP = I + R$ mit Q und $R \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ eigentlich getragen.

u erfülle nun die rechte Bedingung, insbesondere $Pu \in L^2_{\mathrm{loc}}$. Wegen $Q : L^2_{\mathrm{loc}} \to H^s_{\mathrm{loc}}$ ist

$$u + Ru = QPu \in H^s_{\mathrm{loc}}.$$

Da R glättend ist, bildet es $\mathcal{D}' \to H^s_{\mathrm{loc}}$ ab, also ist $Ru \in H^s_{\mathrm{loc}}$ und damit auch $u \in H^s_{\mathrm{loc}}$. □

Beweis (von Satz 59): Wir formulieren beide Seiten der behaupteten Äquivalenz wie im Lemma mittels PsiDO. Wegen deren Koordinateninvarianz (Satz 58) und der Invarianz der L^2_{loc}-Räume sind die resultierenden Bedingungen äquivalent zueinander. □

III.13 ΨDOs auf Mannigfaltigkeiten

Grundzüge der Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n, d.h. $\forall p \in M\, \exists$ eine offene Umgebung U von p in M und eine lokale Karte $\varphi : \tilde{U} \to U$ mit $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$.[25] Mit Hilfe der lokalen Karten können wir Begriffe der Analysis von $\mathbb{R}^n$ auf M übertragen. Dies wird im Folgenden skizziert.

Definition 61. *Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt **glatt**, wenn $f \circ \varphi : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ glatt ist für alle Karten φ. Damit sind $C^\infty(M)$ und $C_0^\infty(M)$ definiert. f heißt **lokal integrierbar** ($f \in L^1_{\text{loc}}(M)$), wenn $f \circ \varphi$ für alle φ lokal integrierbar ist. Die Topologien auf $C^\infty(M)$ und $C_0^\infty(M)$ sind analog wie im Fall von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert.*

Die Abbildung $\varphi^{-1} : U \to \tilde{U}$ nennt man auch **lokale Koordinaten**, denn schreiben wir $\varphi^{-1}(p) = x = (x_1, \dots, x_n)$, so können wir $x_1, \dots, x_n$ als Koordinaten des Punktes $p \in U \subset M$ auffassen. Die Funktion $\tilde{f} = f \circ \varphi$ ist dann „f **in lokalen Koordinaten**“, da $f(p) = \tilde{f}(x)$. Eine Funktion ist also per Definition glatt, wenn sie in beliebigen lokalen Koordinaten glatt ist.

Wie im Fall von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ möchten wir Distributionen auf M wieder als stetige lineare Funktionale auf $C_0^\infty(M)$ definieren und dabei $L^1_{\text{loc}}(M)$ als Teilmenge von $\mathcal{D}'(M)$ auffassen. Für Distributionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ taten wir das mittels der Formel $< T_f, \psi >:= \int_\Omega f(x)\psi(x)dx$ für Testfunktionen ψ. Im Fall von Mannigfaltigkeiten stellt sich die Frage, was anstelle des Lebesgue-Maßes dx verwendet werden soll. Die einfachste Art, damit umzugehen, ist, als Ersatz für dx eine feste **positive Dichte** $d\mu$ auf M zu wählen. Das heißt:

- $d\mu$ ist ein Maß auf M (bzgl. der σ-Algebra der Borelmengen).
- $d\mu$ ist “glatt“ in folgenden Sinn: für alle Karten $\varphi : \tilde{U} \to U \subset M$ ist das Maß $(\varphi^{-1})_* d\mu_{|U}$ auf $\tilde{U}$ von der Form $(\varphi^{-1})_* d\mu_{|U} = c(x)dx$ mit $c \in C^\infty(\tilde{U})$ und $c > 0$ (das schließt beispielsweise das Dirac-Maß aus).

Definition 62. *Sei $d\mu$ eine fest gewählte positive Dichte auf M. Eine **Distribution auf** M ist ein stetiges lineares Funktional auf $C_0^\infty(M)$. Wir identifizieren $f \in L^1_{loc}(M)$ mit einer Distribution T_f mittels $< T_f, \psi >:= \int_M f\psi d\mu$ für $\psi \in C_0^\infty(M)$.*[26]

Damit ist $\mathcal{D}'(M)$ und $\mathcal{E}'(M)$ definiert (aber nicht $\mathcal{S}'(M)$).

Definition 63. *Ein **Differentialoperator auf** M ist ein linearer Operator $P : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, der bzgl. jeder lokalen Karte $\varphi : \tilde{U} \to U$ ein Differentialoperator auf $\tilde{U}$ ist, genauer: P ist lokal und für alle $u \in C_0^\infty(U)$ ist $Pu = (\varphi^*)^{-1} P_\varphi \varphi^* u$, wobei P_φ ein Differentialoperator auf $\tilde{U}$ ist.*

Sind $\varphi : \tilde{U} \to U$ und $\varphi' : \tilde{U}' \to U'$ lokale Karten mit $U \cap U' \neq \emptyset$, so heißt die Abbildung $\kappa = (\varphi')^{-1} \circ \varphi$ **Koordinatenwechsel**.[27]

[25] Dies ist eine Kurzfassung, es müssen zusätzlich ein paar weitere Bedingungen erfüllt sein: M ist topologischer Raum mit der Hausdorff- und der zweiten Abzählbarkeitseigenschaft, die φ sind Homöomorphismen und die Koordinatenwechsel sind glatt. Für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ sind diese Bedingungen automatisch erfüllt, wenn man fordert, dass φ eine Immersion und ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

[26] Alternativ kann man $\mathcal{D}'(M)$ als Dualraum von $C_0^\infty(M, \Omega) :=$ {glatte Dichten auf M mit kompaktem Träger} definieren. Eine glatte Dichte ist dabei ein signiertes Maß, das glatt im obigen Sinne ist. Dabei muss c nicht positiv sein. Ist $\psi \in C_0^\infty(M, \Omega)$ und $f \in L^1_{\text{loc}}(M)$, so ist $\int_M f\psi$ definiert. Diese Definition ist auf lange Sicht besser, da sie natürlich – unabhängig von der Wahl eines $d\mu$ – ist.

[27] Es ist $\kappa : \tilde{V} \to \tilde{V}'$, wobei $\tilde{V} = \varphi^{-1}(U \cap U') \subset \tilde{U}$ und $\tilde{V}' = (\varphi')^{-1}(U \cap U') \subset \tilde{U}'$ ist.

Bedeutung von κ: Ist $p \in U \cap U'$ und sind x, x' die Koordinaten von p bzgl. der Koordinaten φ^{-1}, $(\varphi')^{-1}$, so ist $\kappa(x) = x'$.
Dann ist P_φ der bzgl. κ umgeschriebene Operator $P_{\varphi'}$, also

$$P_\varphi = (P_{\varphi'})_\kappa \tag{53}$$

Definition 64. *Sobolevräume auf einer Mannigfaltigkeit M:*

$$H^s_{\text{loc}}(M) := \{u \in \mathcal{D}'(M) : \textit{für jede lokale Karte } \varphi \in \tilde{U} \to U \textit{ ist } \varphi^*(u_{|U}) \in H^s_{\text{loc}}(\tilde{U})\},$$
$$H^s_{\text{comp}}(M) := H^s_{\text{loc}}(M) \cap \mathcal{E}'(M).$$

Ist M kompakt, so schreiben wir $H^s(M) := H^s_{\text{loc}}(M)$.

Wegen der Koordinateninvarianz der Sobolev-Räume braucht man die Bedingung nur für alle Karten einer gewählten Überdeckung zu überprüfen. Die wichtigsten Sätze über Sobolev-Räume gelten auch auf Mannigfaltigkeiten, in der folgenden Form:

- Restriktionssatz: Sei $N \subset M$ Untermannigfaltigkeit, wobei $\dim N = \dim M - 1$. Für $u \in H^s_{\text{loc}}(M)$ und $s > \frac{1}{2}$ ist die Einschränkung $u_{|N}$ definiert und liegt in $H^{s-\frac{1}{2}}_{\text{loc}}(N)$.
- Einbettungssatz: $H^s_{\text{loc}}(M) \subset C^k(M)$, falls $s > \frac{n}{2} + k$.
- Kompaktheitssatz (Satz von Rellich): Falls M kompakt ist, so ist die Einbettung $H^s(M) \to H^t(M)$ ein kompakter Operator, falls $s > t$. (Mehr dazu siehe unten.)

(Der Restriktionssatz ist selbst für $M = \mathbb{R}^n$ nicht-trivial: Man beweist ihn zunächst für lineare Unterräume – eine direkte Abschätzung mittels der Fourier-Transformation – und verwendet dann die Koordinateninvarianz.)

Bemerkung: Ist M kompakt, dann ist $H^s(M)$ ein Hilbertraum. Das Skalarprodukt ist wie folgt definiert:[28] Sei $M = \bigcup_i U_i$ eine endliche Überdeckung mit lokalen Kartengebieten. Sei (ρ_i) eine Partition der Eins zur Überdeckung U_i. Dann definiere das Skalarprodukt von $u, v \in H^s(M)$ durch

$$< u, v >_{H^s(M)} := \sum_i < \varphi_i^*(\rho_i u), \varphi_i^*(\rho_i v) >_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

Verschiedene Wahlen der U_i, φ_i und ρ_i ergeben verschiedene Skalarprodukte, doch sind diese äquivalent zueinander.

Im Fall $s = 0$ lässt sich ein (äquivalentes) Skalarprodukt auf $H^0(M) = L^2(M)$ auch durch $< u, v >= \int_M u\overline{v}\, d\mu$ definieren, für eine positive Dichte $d\mu$.

Der Schwartzsche Kernsatz gilt auch auf Mannigfaltigkeiten. Sei $d\mu$ eine fest gewählte positive Dichte auf M. Dann definiert jedes $K \in \mathcal{D}'(M \times M)$ einen stetigen linearen Operator $P_K : C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mittels der Formel

$$(P_K u)(x) = \int_M K(x, y) u(y) d\mu(y)$$

und für jeden stetigen linearen Operator $P : C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ gibt es genau ein $K \in \mathcal{D}'(M \times M)$ mit $P = P_K$.[29]

[28] Erinnerung: Das Skalarprodukt auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist durch

$$< u, v >_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} < \xi >^{2s} d\xi$$

definiert.

[29] Wiederum lässt sich dies natürlicher mit Dichten formulieren...

Definition 65. *Ein ΨDO der Ordnung m auf M ist ein stetiger linearer Operator $C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dessen Schwartzkern K folgende Eigenschaften hat:*

- $\operatorname{sing\,supp} K \subset \mathrm{Diag}_M := \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$.
- *Für jede lokale Karte $\varphi : \tilde{U} \to U$ ist $K_\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) := K(\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}))$ der Schwartzkern eines ΨDO P_φ auf $\tilde{U}$, d.h. $\exists\, a \in S^m(\tilde{U} \times \tilde{U}, \mathbb{R}^n) : K_\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\xi} a(\tilde{x}, \tilde{y}, \xi)\, đ\xi$.*

Bemerkungen:

- Das Hauptsymbol eines ΨDO auf M kann als Funktion auf T^*M (Kotangentialbündel) **invariant** verstanden werden, d.h. $\sigma_m(P)(x, \xi)$ ist mit $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$ zu interpretieren[30]. Denn (53) gilt auch hier, und die Transformationsformel für das Hauptsymbol (49) lautet

  $$\sigma_m(P_\varphi)(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \sigma_m(P_{\varphi'})(\kappa(\tilde{x}), (D\kappa_{|\tilde{x}}^t)^{-1}\tilde{\xi}).$$

  Das ist dieselbe Formel, nach der sich Kotangentialvektoren transformieren. D.h. ist $\tilde{\xi}$ die Koordinatendarstellung von $\xi \in T_xM$ bzgl. der Karte φ, so ist $(D\kappa_{|\tilde{x}}^t)^{-1}\tilde{\xi}$ die Koordinatendarstellung von ξ bzgl. der Karte φ'.
- Das (vollständige) Symbol eines ΨDO auf M lässt sich jedoch nicht in natürlicher Weise invariant auf M definieren.

Die wichtigsten Sätze über ΨDOs auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten erscheinen zunächst komplizierter als offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sie haben aber einen Vorteil: Es gibt kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand, und viele davon haben in verschiedenen Gebieten der Mathematik Bedeutung. Die einfachste ist die Sphäre S^n.

Sei M kompakt. Dann ist $C_0^\infty(M) = C^\infty(M)$, d.h. jeder Operator ist eigentlich getragen. Also ist die Komposition zweier ΨDOs immer definiert.

- Sei $P \in \Psi^m(M)$ und $Q \in \Psi^l(M)$, dann ist $PQ \in \Psi^{m+l}(M)$ und $\sigma_{m+l}(PQ) = \sigma_m(P)\sigma_l(Q)$.
- Man hat die kurze exakte Sequenz $0 \to \Psi^{m-1}(M) \to \Psi^m(M) \xrightarrow{\sigma_m} S^{[m]}(T^*M) \to 0$.
- Asymptotische Summation: Für $P_j \in \Psi^{m-j}(M)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ existiert ein $P \in \Psi^m(M)$ mit $P \sim \sum_{j=0}^\infty P_j$.
- Parametrix: Für $P \in \Psi^m(M)$ elliptisch (d.h. $\sigma_m(P)$ invertierbar) existiert ein $Q \in \Psi^{-m}(M)$ mit:

  $$PQ = I \bmod \Psi^{-\infty}(M),$$
  $$QP = I \bmod \Psi^{-\infty}(M).$$

- Beschränktheit: Für $P \in \Psi^m(M)$ gilt: $P : H^s(M) \to H^{s-m}(M)$ ist beschränkt.
- Kompaktheit: Für $P \in \Psi^m(M)$ und $m < 0$ gilt: P ist ein kompakter Operator $H^s(M) \to H^s(M)$ für alle s. (s. unten)

Manchmal ist noch folgendes Lemma nützlich:

Lemma 66. *Sei M kompakt, $P \in \Psi^m(M)$ elliptisch und invertierbar als Operator $H^m(M) \to L^2(M)$. Dann ist $P^{-1} \in \Psi^{-m}(M)$.*

[30] T_xM ist der Tangentialraum an M im Punkt $x \in M$, ein n-dimensionaler Vektorraum. T_x^*M ist sein Dualraum und $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ (disjunkte Vereinigung).

Bemerkung: Falls $m > 0$, dann ist die Invertierbarkeit von P als beschränkter Operator $H^m \to L^2$ äquivalent zur Invertierbarkeit von P als unbeschränkter Operator in L^2 (mit Definitionsbereich H^m).

Beweis: Das geht mit einem hübschen Trick: Zunächst wählt man eine Parametrix $Q \in \Psi^{-m}(M)$, also

$$PQ = I + R\,, \quad QP = I + R' \qquad R, R' \in \Psi^{-\infty}(M)\,.$$

Wäre $R = R' = 0$, so wäre $P^{-1} = Q$. Im Allgemeinen lässt sich die Differenz von P^{-1} zu Q immerhin mittels R, R' ausdrücken: Multipliziere die erste Gleichung mit P^{-1} von links, erhalte

$$Q = P^{-1} + P^{-1}R\,, \text{ also } P^{-1} = Q - P^{-1}R$$

Das Problem ist, dass wir über den Restterm $P^{-1}R$ nicht viel wissen. Besser wird es, wenn wir analog aus der zweiten Gleichung $P^{-1} = Q - R'P^{-1}$ herleiten und darin das zweite P^{-1} durch $Q - P^{-1}R$ ersetzen:

$$P^{-1} = Q - R'(Q - P^{-1}R) = Q - R'Q + R'P^{-1}R\,.$$

Nun ist $R'Q \in \Psi^{-\infty}$. Außerdem gilt: $R, R' \in \Psi^{-\infty}$, P^{-1} beschränkt auf $L^2 \Rightarrow R'P^{-1}R \in \Psi^{-\infty}$ (Übung, schreibe alles als Integraloperatoren). □

Weiterhin sind folgende **Ordnungsreduktionsoperatoren** manchmal nützlich. Sie ersetzen die z.B. im Beweis von Satz 53 verwendeten Operatoren $< D >^s$ im $\mathbb{R}^n$.

Lemma 67. *Für jedes $m \in \mathbb{R}$ gibt es einen elliptischen Operator $\Lambda_m \in \Psi^m(M)$, der als Operator $H^s(M) \to H^{s-m}(M$ für alle $s \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.*

Beweis: Setze $\Lambda_0 = I$. Für $m > 0$ wähle eine glatte Dichte $d\mu$ auf M. Wähle einen elliptischen Operator $P \in \Psi^{m/2}(M)$. Setze $\Lambda_m = P^*P + I$. Für die Adjungiertenbildung benötigt man $d\mu$. Der Operator Λ_m ist in $\Psi^m(M)$ und elliptisch. Außerdem ist $P^*P \geqslant 0$, also $\Lambda_m \geqslant I$. Also ist Λ_m invertierbar. (Hier benötigt man etwas Funktionalanalysis, insbesondere sind die Aussagen im Sinne unbeschränkter Operatoren in L^2 mit Definitionsbereich H^m zu verstehen.)

Für $m < 0$ setze $\Lambda_m = (\Lambda_{-m})^{-1}$. Dies ist ein PsiDO nach Lemma 66. □

Mit etwas mehr Arbeit kann man die Λ_m als Gruppe wählen, d.h. so, dass $\Lambda_{m+l} = \Lambda_m\Lambda_l$ für alle $m, l \in \mathbb{R}$ gilt.

Kompaktheit: Beweis und Konsequenzen

Die Kompaktheit von PsiDO negativer Ordnung auf kompakten Mannigfaltigkeiten hat wichtige Konsequenzen.

Satz 68. *Sei M eine kompakte Mgfk und $P \in \Psi^m(M)$, $m < 0$. Dann ist P ein kompakter Operator $H^s(M) \to H^s(M)$ für alle s.*

Dies hängt eng mit dem **Satz von Rellich** zusammen, der sagt, dass für $t > s$ die Einbettung $H^t(M) \hookrightarrow H^s(M)$ kompakt ist.

Der Fall $m = -\infty$: Hierfür ist die Kompaktheit leicht einzusehen: $P \in \Psi^{-\infty}(M)$ hat Kern $K \in C^\infty(M \times M)$. Da M kompakt ist, folgt $K \in L^2(M \times M)$, also ist P ein Hilbert-Schmidt Operator und damit kompakt. (Man kann zeigen, dass $P \in \Psi^m(M)$ schon für $m < -\frac{n}{2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.)

Beweis (Erster Beweis von Satz 68 (unter Verwendung des Satzes von Rellich)):
Wegen $m < 0$ ist $s - m > s$, also $H^{s-m} \hookrightarrow H^s$ kompakt. Weil $P : H^s \to H^{s-m}$ beschränkt ist, ist also die Komposition $H^s \xrightarrow{P} H^{s-m} \hookrightarrow H^s$ kompakt. $\square$

Man kann den Satz auch direkt beweisen und daraus den Satz von Rellich folgern. Hier ist eine Skizze (Details z.B. im Buch von Shubin). Man zeigt zunächst, dass (im $\mathbb{R}^n$) die Operatornorm ‚fast' durch das Supremum des Symbols abgeschätzt werden kann (eine Quantifizierung der L^2-Beschränktheit von PsiDOs der Ordnung Null): Sei

$$\Psi_0^m(\mathbb{R}^n) = \{P \in \Psi^m(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} K_P \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$$

Lemma 69. *Sei $P \in \Psi_0^0(\mathbb{R}^n)$ und $\sup |\sigma_P(x,\xi)| = M$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P' \in \Psi_0^0(\mathbb{R}^n)$ und ein $R \in \Psi_0^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$P = P' + R, \quad \|P'\| \leqslant M + \varepsilon$$

Zum Beweis siehe Shubin, Satz 6.3 (der Satz ist etwas stärker, denn dort steht $\limsup_{\xi\to\infty}$ statt sup).

Beweis (Zweiter Beweis von Satz 68): Wir reduzieren zunächst auf den $\mathbb{R}^n$. Dazu überdecke M mit Koordinatenumgebungen $U_1, \dots, U_N$. Dann bilden

$$U_1 \times U_1, \dots, U_N \times U_N, \ V = (M \times M) \setminus \mathrm{Diag}_M$$

eine offene Überdeckung von $M \times M$. Mittels einer Partition der Eins können wir also den Schwartz-Kern K von $P \in \Psi^m(M)$ als

$$K = \sum_{i=1}^N K_i \quad + L, \qquad \operatorname{supp} K_i \subset U_i \times U_i, \ \operatorname{supp} L \subset V$$

schreiben. Wegen $\operatorname{sing\,supp} K \subset \mathrm{Diag}_M$ ist L glatt, der zugehörige Operator also kompakt. Mittels der lokalen Karten können wir jedes K_i nach $\tilde{U}_i \times \tilde{U}_i$ transportieren, und es ist dort kompakt getragen.

Es bleibt also zu zeigen: Ist $P \in \Psi_0^m(\mathbb{R}^n)$ und $m < 0$, so ist P ein kompakter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $p = \sigma_P$. Wir schneiden das Symbol für große ξ ab und approximieren damit P durch glättende Operatoren: Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(\xi) = 1$ für $|\xi| \leqslant 1$, und $\chi_N(\xi) = \chi(\frac{\xi}{N})$. Schreibe

$$P = K_N + P_N, \text{ wobei } \sigma_{K_N} = \chi_N p, \quad \sigma_{P_N} = (1 - \chi_N)p.$$

Dann ist K_N glättend, also kompakt, und auf dem Träger von σ_{P_N} ist $|\xi| \geqslant N$, also gilt $\sup |\sigma_{P_N}| \leqslant CN^m$. Nach dem Lemma ist $P_N = P'_N + R_N$ mit $\|P'_N\| \leqslant 2CN^m$ und R_N kompakt.

Insgesamt folgt $P = (K_N + R_N) + P'_N$ mit $K_N + R_N$ kompakt und $\|P'_N\| \to 0$ für $N \to \infty$ (wegen $m < 0$). Also ist P kompakt. $\square$

Bemerkung: Aus Satz 68 kann man den Satz von Rellich folgern: Sei $t > s$. Schreibe $t = s - m$, also $m < 0$. Wähle $\Lambda_m \in \Psi^m(M)$ invertierbar mit Inversem Λ_{-m}, siehe Lemma 67. Dann ist die Inklusion $H^{s-m} \hookrightarrow H^s$ gleich der Komposition

$$H^{s-m} \xrightarrow{\Lambda_{-m}} H^s \xrightarrow{\Lambda_m} H^s$$

eines beschränkten mit einem kompakten Operator, also kompakt.

Aus diesen Sätzen und etwas Funktionalanalysis erhält man folgenden fundamentalen Satz.

Satz 70. *Sei M kompakt und $P \in \Psi^m(M)$ elliptisch. Dann ist P ein* ***Fredholm-Operator*** *$H^m(M) \to L^2(M)$, d.h.:*

1. $\dim \operatorname{Ker} P < \infty$,
2. $\dim \operatorname{coker} P < \infty$, $\operatorname{coker} P := L^2(M)/\operatorname{Ran} P$.

Aus der zweiten Bedingung folgt, dass $\operatorname{Ran} P$ abgeschlossen ist. Äquivalent zur zweiten Bedingung ist:

(2') $\operatorname{Ran} P$ ist abgeschlossen und $\dim (\operatorname{Ran} P)^\perp < \infty$.

Die Fredholm-Eigenschaft bedeutet für die Gleichung $Pu = f$:

- $Pu = 0$ hat nur endlich viele linear unabhängige Lösungen.
- $Pu = f$ ist genau dann lösbar, wenn f endlich viele unabhängige Bedingungen erfüllt.

  D.h.: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}_0$, $h_1, ...h_N \in L^2(M)$, so dass $Pu = f$ genau dann eine Lösung u hat, wenn $f \perp h_i$ $\forall i = 1, ..., N$.

Hat $Pu = 0$ nur die Nulllösung und ist $N = 0$, so ist P bijektiv, d.h. $Pu = f$ ist für jedes f eindeutig lösbar. Fredholm zu sein bedeutet also, nur ‚endlich-dimensional weit entfernt' von Invertierbarkeit zu sein.

Für Fredholm-Operatoren ist der **Index** definiert durch

$$\operatorname{ind} P := \dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P$$

Dieser Begriff sieht zwar erstmal etwas künstlich aus, hat aber große Bedeutung in der globalen Analysis, Topologie etc.

Beweis: In der Funktionalanalysis beweist man, dass $P : H^m(M) \to L^2(M)$ genau dann ein Fredholmoperator ist, wenn ein beschränkter Operator $Q : L^2(M) \to H^m(M)$ existiert, für den $PQ - I$ und $QP - I$ kompakte Operatoren sind. Wir wählen nun eine Parametrix $Q \in \Psi^{-m}(M)$ für P, dann erfüllt diese die Bedingungen nach den Sätzen oben, denn $PQ - I$ und $QP - I$ sind in $\Psi^{-\infty}(M)$ und damit kompakt. □

Ein weiterer fundamentaler Satz ist folgender:

Satz 71. *Sei M kompakt und $P \in \Psi^m(M)$ elliptisch. Sei $m > 0$.*

1. *Das Spektrum von P ist entweder diskret* [31] *oder ganz $\mathbb{C}$.*
2. *Falls P zusätzlich selbstadjungiert bezüglich einer glatten positiven Dichte $d\mu$ ist, so existiert eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_j| \to \infty$ und eine Orthonormalbasis $u_1, u_2, \dots$ von $L^2(M, d\mu)$, so dass*

   $$Pu_j = \lambda_j u_j$$

   für alle j gilt. Die Eigenfunktionen u_j sind glatt.

Bemerkung: Der Fall Spektrum $= \mathbb{C}$ ist möglich, z.B. tritt er auf, wenn der Index von P ungleich Null ist.

[31] D.h., es besteht nur aus Eigenwerten, diese haben endliche Multiplizität und bilden eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Beweis: 1. Falls das Spektrum von P nicht ganz $\mathbb{C}$ ist, gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $P - z := P - zI$ invertierbar. Weiterhin ist $P - z$ elliptisch, also folgt nach Lemma 66

$$(P - z)^{-1} \in \Psi^{-m}(M).$$

Nach Satz 68 ist $(P-z)^{-1}$ ein kompakter Operator in $L^2(M)$, sein Spektrum besteht also aus einer Nullfolge von Eigenwerten (μ_j). Das Spektrum von P besteht dann aus den Eigenwerten $z + \frac{1}{\mu_j}$.

2. Falls P selbstadjungiert ist, ist sein Spektrum reell, also nicht ganz $\mathbb{C}$, also diskret nach dem ersten Teil. Für selbstadjungierte Operatoren folgt dann die Existenz einer ON-Basis von L^2 von Eigenvektoren. Diese sind glatte Funktionen, da sie die elliptische Gleichung $(P - \lambda_j)u_j = 0$ erfüllen (elliptische Regularität). □

Beispiele von Differentialoperatoren und ΨDOs auf Mannigfaltigkeiten

- Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. für jedes $x \in M$ ist ein Skalarprodukt g_x auf dem Tangentialraum T_xM gegeben. Der **Laplace-Beltrami-Operator** Δ_g ist ein elliptischer Operator zweiter Ordnung. In einer beliebigen lokalen Karte ist er gegeben durch

$$\Delta_g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_{x_i} g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_{x_j},$$

wobei (g_{ij}) die Darstellung von g in Koordinaten, $\det g$ deren Determinante und (g^{ij}) deren inverse Matrix ist. Für $M = \mathbb{R}^n$ und g die euklidische Metrik ist $\Delta_g = \Delta$ ($\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$). Im Allgemeinen sind die g_{ij} nicht-konstante Funktionen von x und daher ist Δ_g ein Operator mit variablen Koeffizienten.

- Der Laplace-Beltrami-Operator operiert auf Funktionen auf M. Er besitzt eine natürliche Verallgemeinerung, den **Hodge-Laplace-Operator** Δ_k. Dieser operiert auf k-Differentialformen, $k \in \{0, 1, ..., \dim M\}$.[32]

  Wenn M kompakt ist, dann ist $\dim \operatorname{Ker} \Delta_k = \beta_k$ die k-te **Betti-Zahl** von M. Die Betti-Zahl gibt die "Anzahl der k-dimensionalen Löcher von M" an, genauer ist $\beta_k = \dim H^k(M)$, wobei $\dim H^k$ die k-te Kohomologiegruppe von M bezeichnet.

  Daher hat der Raum der Lösungen von $\Delta_k u = 0$ topologische Bedeutung. Dieser Zusammenhang von Analysis und Topologie ist ein spannendes Thema, dessen Höhepunkt die Index-Theorie bildet. ΨDOs sind dabei ein nützliches Werkzeug.

- Ein weiterer wichtiger Operator ist der **Dirichlet-Neumann-Operator**. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und mit glattem Rand $\partial\Omega$. Wir definieren $N : C^\infty(\partial\Omega) \to C^\infty(\partial\Omega)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} &\text{Sei } g \in C^\infty(\partial\Omega): \\ &\text{Bestimme } u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \text{so dass} \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases}, \\ &\text{dann definiere } Ng = \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} \text{ (Normalenableitung).} \end{aligned}$$

[32] 0-Differentialformen sind Funktionen, eine 1-Differentialform ist eine Linearform auf T_xM für jedes x, z.B. df für eine Funktion f, eine 2-Differentialform ist eine eine antisymmetrischen Bilinearform auf T_xM für jedes x etc.

Dies ist wohldefiniert, da das Dirichlet-Problem im zweiten Schritt eine eindeutige Lösung u hat.

Satz 72. *$N \in \Psi^1(\partial\Omega)$ und $\sigma_1(N)(x,\xi) = |\xi|$.*

Der Beweis erfordert etwas Arbeit. Warum dies stimmen könnte, kann man jedoch schon an folgendem Beispiel sehen: Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, ..., x_n), x_n \geqslant 0\}$ (oberer Halbraum). Da Ω unbeschränkt ist, müssen wir die Definition von N für die Eindeutigkeit von u wie folgt modifizieren: Zu $g \in C_0^\infty(\partial\Omega)$ sei u die eindeutige Lösung von $\Delta u = 0$ in Ω, $u_{|\partial\Omega} = g$ mit $u(x_1, ..., x_n) \to 0$ für $x_n \to \infty$. Setze $Ng = \frac{\partial u}{\partial n}{}_{|\partial\Omega}$. Mittels Fourier-Transformation in $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ erhält man nacheinander

$$\begin{aligned}(\partial_{x_n}^2 - |\xi'|^2)\hat{u}(\xi', x_n) &= 0, \quad \hat{u}(\xi', 0) = \hat{g}(\xi') \\ \hat{u}(\xi', x_n) &= e^{-|\xi'|x_n}\hat{g}(\xi') \\ u(x', x_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\xi'} e^{-|\xi'|x_n}\hat{g}(\xi')\, đ\xi' \\ (Ng)(x') &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\xi'}|\xi'|\hat{g}(\xi')\, đ\xi'\end{aligned}$$

da die nach außen zeigende Normalenableitung $-\partial_{x_n}$ und $x_n = 0$ am Rand ist. Also ist N der ΨDO auf $\mathbb{R}^{n-1}$ mit Symbol $|\xi'|$.

Ausblick

Die Sätze 70 und 71 bilden den Ausgangspunkt für zwei große Forschungsrichtungen: Die Index-Theorie und die Spektralgeometrie.

1. Der zentrale Satz der **Index-Theorie** ist der Indexsatz, der eine Formel angibt, wie man den Index eines elliptischen PsiDOs P auf einer kompakten Mgfk direkt aus dessen Symbol berechnen kann (mittels Ableitungsoperationen und einer Integration). Dass dies geht, ist sehr überraschend, denn eine ähnliche Formel kann es für die beiden Größen $\dim\ker P$ und $\dim\operatorname{coker} P$, aus denen der Index zusammengesetzt ist, nicht geben. Die Formel ist höchst nicht-trivial und hat viele interessante Spezialfälle, z.B. den Satz von Gauß-Bonnet in der Differentialgeometrie oder den Satz von Riemann-Roch in der algebraischen Geometrie.
2. In der **Spektralgeometrie** versucht man, die Eigenwerte (λ_j) eines elliptischen Operators positiver Ordnung P auf einer kompakten Mannigfaltigkeit genauer zu beschreiben. Explizit berechnen kann man sie nur in den wenigsten Fällen. Ein zentrales Resultat ist die Weyl-Asymptotik:
$$|\lambda_j| \sim Cj^{m/n} \quad (j \to \infty)$$
mit einer expliziten, von P abhängigen Konstante C. Beispiel: Für den Laplace-Beltrami-Operator auf einer Riemannschen Mgfk ist $C = c_n \operatorname{vol}(M)^{-2/n}$. Daraus folgt z.B., dass man das Volumen und die Dimension von M aus der Folge (λ_j) bestimmen, also ‚hören' kann.

Die Theorie der PsiDOs (und weitere Techniken der mikrolokalen Analysis) sind sehr nützlich bei der Untersuchung dieser Fragen, aber es gibt auch viele interessante Dinge, die man über sie herausfinden kann, für die keine PsiDOs nötig sind.

Sowohl die Index-Theorie als auch die Spektralgeometrie haben Erweiterungen auf nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten und Räume mit Singularitäten (z.B. Kegeloberfläche), das sind sehr aktuelle Forschungsthemen.

III.14 Überblick über den Pseudodifferentialkalkül

Da man zwischen den technischen Einzelheiten manchmal den Überblick verliert, soll hier ein kurzer Überblick gegeben werden.

Das Wichtigste in Kürze

Wir betrachten Operatoren, die auf Funktionen oder Distributionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oder auf einer Mannigfaltigkeit operieren.

- Per Definition ist ein ΨDO ein Operator, dessen Schwartz Kern außerhalb der Diagonalen $\mathrm{Diag}_\Omega \subset \Omega \times \Omega$ glatt ist und auf der Diagonalen eine konormale Singularität hat.
- Das Symbol des ΨDOs gibt eine vollständige Beschreibung der Singularität des Schwartz Kerns bei der Diagonale.

  Die Beziehung von Kern zu Symbol ist über die Fourier-Transformation gegeben[33]:

$$K(x, y) \equiv \int e^{i(x-y)\xi} p(x, \xi)\, d\xi = \check{p}(x, x-y) \qquad \text{mod } C^\infty$$

- Das Hauptsymbol enthält die Information des Symbols zu führender Ordnung. Im Fall von Mannigfaltigkeiten kann das Hauptsymbol invariant als Funktion auf dem Kotangentialbündel definiert werden. Dies folgt aus der Transformationsformel für Hauptsymbole unter Koordinatenwechsel.
- Komposition und Adjungierte von ΨDOs sind ΨDOs. Für die Symbole gibt es asymptotische Formeln. Für die Hauptsymbole gelten die einfachen Formeln (für $P \in \Psi^m(\Omega), Q \in \Psi^l(\Omega)$)

$$\sigma_{m+l}(P \circ Q) = \sigma_m(P)\sigma_l(Q), \quad \sigma_m(P^*) = \overline{\sigma_m(P)}$$

- Mittels der Kompositionsformel für das Hauptsymbol, der kurzen exakten Sequenz für die Symbolabbildung und der asymptotischen Summation lässt sich für elliptische ΨDOs eine Parametrix, also Inverse modulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$, konstruieren.
- ΨDOs haben natürliche Abbildungseigenschaften auf Sobolev-Räumen.
- Der ΨDO-Kalkül ist *konstruktiv* in dem Sinn, dass er Probleme über PDG mittels Konstruktion approximativer Lösungen (Parametrices) löst.

Operatoren – Symbole – Kerne

Der Pseudodifferentialkalkül erhält seine Stärke aus der doppelten Charakterisierung von Operatoren durch Symbole und durch Schwartz Kerne. Während z.B. die Komposition von Operatoren auf der Ebene der (Haupt-)Symbole sehr einfach ist (Multiplikation), auf der Ebene der Kerne aber kompliziert (siehe (17)), sind wichtige Eigenschaften (z.B. Pseudolokalität) nur am Kern ablesbar.

In Tabelle 1 sind einige Beispiele zusammengestellt. Die Menge der Distributionen, die als Kerne von ΨDOs auftreten, nennt man den Raum der Distributionen auf $\Omega \times \Omega$, die **bzgl.** Diag_Ω **konormal der Ordnung** m sind. Bezeichnung für diesen Raum: $I^m(\Omega \times \Omega, \mathrm{Diag}_\Omega)$.

An der mit (*) bezeichneten Stelle steht dann $I^m(\Omega \times \Omega, \mathrm{Diag}_\Omega)/C^\infty(\Omega \times \Omega)$.

[33] Dies ist die Definition des Begriffs konormale Singularität in diesem Kontext

	Operator	Symbol	Schwartz Kern
Beispiele	Id	1	$\delta(x-y)$
	$P(x,D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$	$P(x,\xi)$	$P(x,D_x)\delta(x-y)$
Lösung von $P(D)u = f$		$\frac{1}{P(\xi)}$	$E(x-y)$
Räume	$\Psi^m(\Omega)$	$S^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$	$\mathcal{D}'(\Omega\times\Omega)$
Restterme	$\Psi^{-\infty}(\Omega)$	$S^{-\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$	$C^\infty(\Omega\times\Omega)$
Bijektive Beziehung	$\Psi^m(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega)$	$S^m(\Omega,\mathbb{R}^n)/S^{-\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n)$	(*)

Tabelle 1: Übersicht über Operatoren, Symbole, Kerne. In Zeile 3 wird $P(\xi) \neq 0 \, \forall \xi$ angenommen, und E ist eine Fundamentallösung für $P(D)$

Einige Details zur technischen Durchführung

- Für den Beweis der wichtigsten Sätze (z.B. Adjungierten- und Kompositionsformel) ist es nützlich, ΨDOs auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mittels Amplituden zu definieren, d.h. der Schwartz Kern ist
$$K_a(x,y) = \int e^{i(x-y)\xi} a(x,y,\xi)\, d\xi$$
- Dieses Integral konvergiert i.A. nicht. Es ist aber im Sinne der Distributionen wohldefiniert (siehe Lemma 26). Für den Beweis verwendet man partielle Integration (bzgl. y).
- Verschiedene Amplituden können denselben ΨDO definieren. Das Symbol eines ΨDOs ist eine Amplitude, die nur von x und ξ abhängt und den Operator bis auf glättende Fehler definiert. Umgekehrt ist das Symbol durch den Operator eindeutig modulo $S^{-\infty}$ definiert. Man erhält das Symbol mittels der Taylorentwicklung von $y \mapsto a(x,y,\xi)$ um den Punkt $y = x$ und der Formel
$$K_{(y-x)^\alpha a} = K_{D_\xi^\alpha a}$$
die mit partieller Integration bzgl. ξ direkt aus der Definition von K_a folgt.
- Die Adjungiertenformel folgt aus der Formel für das Symbol (vertausche x, y) und die Kompositionsformel, indem man bei $P \circ Q$ zunächst Q mittels eines Rechtssymbols (abhängig von y und ξ) schreibt.
- Damit die Komposition zweier ΨDOs definiert ist, muss man annehmen, dass mindestens einer eigentlich getragen ist. Auf die Kompositionsformel für die Symbole hat dies keine Auswirkung.

Varianten, Ausblick

Wir haben den lokalen ΨDO-Kalkül behandelt. Er erlaubt es, lokale Aussagen zu machen, z.B. über die Regularität von Lösungen partieller Differentialgleichungen. Oft möchte man aber weitergehende Informationen. Beispiele:

- Betrachtet man eine PDG auf $\mathbb{R}^n$, möchte man das Verhalten der Lösungen für $x \to \infty$ untersuchen.
- Betrachtet man eine PDG auf einem Gebiet, möchte man das Verhalten der Lösungen am Rand verstehen.
- Betrachtet man eine PDG auf einer Mannigfaltigkeit mit Singularitäten (z.B. einer Kegeloberfläche), möchte man das Verhalten der Lösungen bei Annäherung an die Singularitäten (die Kegelspitze) verstehen.
- Eine Kombination der beiden vorangehenden Punkte ist die Untersuchung der Lösungen nahe singulären Punkten des Randes eines Gebiets.

Für zahlreiche dieser Problemstellungen sind Erweiterungen des Pseudodifferentialkalküls gefunden worden (z.B. der sogenannte b-Kalkül von R. Melrose), aber eine allgemeine Theorie, die z.B. auf breite Klassen von Singularitäten anwendbar wäre, gibt es bisher nicht. Daran wird gearbeitet.

Der gleichmäßige ΨDO-Kalkül auf $\mathbb{R}^n$

Der gleichmäßige ΨDO-Kalkül auf $\mathbb{R}^n$ ist eines der einfachsten Beispiele eines globalen Kalküls. Es ist eine gute Übung, die Einzelheiten der Theorie für $\Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$ (siehe Definition 54) durchzuführen und dabei darauf zu achten, welche Verbesserungen durch die gleichmäßige Beschränktheit erreicht werden. Hier ist eine Anleitung. Ergänzen Sie die Details.

1. $P \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$ bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ab. Warum kann man als Definitionsbereich hier den Schwartz-Raum $\mathcal{S}$ statt C_0^∞ schreiben, aber $\mathcal{S}$ nicht durch C_b^∞ ersetzen?
2. Bei Proposition 25 ist Vorsicht geboten, da aus $a \in S_b^m$ nicht $(y-x)^\alpha a \in S_b^m$ folgt, weil die Funktion $(y-x)^\alpha$ unbeschränkt ist. Die Gleichheit
$$(y-x)^\alpha K_a = K_{D_\xi^\alpha a} \tag{54}$$
stimmt aber weiterhin, mit demselben Beweis.
3. Eigenschaften des Schwartz Kerns: Zusätzlich zu $\operatorname{sing\,supp} K_a \subset \mathrm{Diag}_{\mathbb{R}^n}$ folgt aus (54) für $a \in S_b^m$: Für alle α und alle N gibt es $C_{N,\alpha}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x-y| > 1$ gilt
$$|D_{x,y}^\alpha K(x,y)| \leqslant C_{N,\alpha} |x-y|^{-N} \tag{55}$$
(Der Kern ist schnell abfallend weg von der Diagonale.)
4. Restterme: Ist K glatt und erfüllt (55), so gibt es $p \in S_b^{-\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $K = K_p$. Hierbei ist $p = p(x,\xi)$ zu verstehen.[34]
5. Mit Hilfe von 3. und 4. lässt sich die Abbildungseigenschaft in 1. zu
$$P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{56}$$
(und dann mit Dualität $P : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$) verbessern.[35]

[34] Diese Aussage hat keine Entsprechung in der lokalen Theorie. p muss $K(x,y) = \check{p}(x, x-y)$ erfüllen, mittels Substitution $z = x - y$ und Fourier-Transformation also $p(x,\xi) = \int e^{-iz\xi} K(x, x-z)\, dz$. Aus (55) und Glattheit von K folgt $p \in S_b^{-\infty}$. In der lokalen Theorie hat man keine Information wie (55), daher wird dieses Integral divergieren, und wir finden nur $K = K_a$ für eine *Amplitude* $a(x,y,\xi)$, siehe den Beweis von Satz 29.

[35] Es ist $x^\beta P u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und beliebiges β zu zeigen. Schreibe $P = P_a$ und zerlege $a = a' + a''$, wobei a', a'' Träger in $|x-y| \leqslant 2$ bzw. $|x-y| \geqslant 1$ haben. Um $P_{a'}$ zu behandeln, schreibe $x^\beta = ((y-x)+y)^\beta$, multipliziere aus und verwende, dass $(y-x)^\gamma a' \in S_b^m$ ist für alle γ. Der Schwartz Kern von $P_{a''}$ ist glatt und erfüllt (55). Verwende dies, um $P_{a''} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ zu zeigen.

6. Komposition: Aus 5. folgt insbesondere, dass $P \circ Q$ für $P \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \Psi_b^l(\mathbb{R}^n)$ definiert ist, ohne Annahme an die Träger. Es gilt $P \circ Q \in \Psi_b^{m+l}(\mathbb{R}^n)$.
7. Symbol eines ΨDO: Aus 4. folgt auch, dass jeder $P \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$ ein 'exaktes' Symbol hat. D.h. es gibt $p \in S_b^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $P = P_p$, ohne Fehlerterm in $\Psi^{-\infty}$. p ist durch P eindeutig bestimmt.
8. Parametrixkonstruktion: Zunächst ist Vorsicht geboten: Das Inverse eines elliptischen Symbols in $S_b^m(\mathbb{R}^n)$ muss nicht in $S_b^{-m}(\mathbb{R}^n)$ sein, wie das Beispiel $p(x,\xi) = x$ auf $\mathbb{R}^n = (0,1) \subset \mathbb{R}$ zeigt. Man nennt $P \in \Psi_b^m(\mathbb{R}^n)$ **gleichmäßig elliptisch**, wenn sein Hauptsymbol ein Inverses in $S_b^{-m}(\mathbb{R}^n)$ hat. Unter dieser Bedingung existiert eine Parametrix in $\Psi_b^{-m}(\mathbb{R}^n)$.