DANIEL GRIESER

Entdeckendes Lernen am Beispiel des Satzes über implizite Funktionen

1 Einleitung

Dieser Artikel setzt *nicht* voraus, dass Sie als Leser/in den Satz über implizite Funktionen kennen!

Der Satz über implizite Funktionen (SIF) verbindet die drei großen klassischen Gebiete der Mathematik:

Geometrie – Algebra – Analysis.

Es geht um die Auflösbarkeit von Gleichungen (Algebra) und um Eigenschaften ihrer Lösungsmengen (dies sind Kurven oder Flächen – Geometrie), und als wesentlich dabei stellt sich eine Ableitungs-Bedingung heraus (Analysis). Dieser fundamentalen innermathematischen Bedeutung entspricht die große Bedeutung des Satzes in Anwendungen der Mathematik.

Leider gilt der SIF als einer der größten Stolpersteine im ersten Jahr des Mathematik-Studiums. Häufig wird er bei der ersten Bekanntschaft nur von wenigen Studierenden verstanden. Worin liegt genau die Schwierigkeit? Lässt sich der Lernerfolg durch einen gut gewählten Einstieg steigern? In diesem Beitrag möchte ich einen Zugang vorstellen, der besonderen Wert auf das Entdecken durch die Studierenden legt, in der Hoffnung, dass damit mehr Studierende – und vielleicht auch einige Leser/innen – diesen zentralen Satz der Mathematik schätzen und lieben lernen. Sie finden hier die Sicht eines Praktikers, also eines Lehrenden, keine systematische didaktische Untersuchung. Ich erhebe keinen Anspruch auf Originalität – es gibt sicher Kollegen, die die Sache ähnlich oder besser angehen. Ich gehe hier ähnlich vor wie in GRIESER [2017], jedoch behandelt dieses Buch elementarmathematische Inhalte.

In diesem Aufsatz nehme ich an, dass Sie mit den Grundlagen der Differentialrechnung vertraut sind, auch schon mal partielle Ableitungen gesehen haben. Sie werden auf eine Entdeckungsreise mitgenommen, die Sie bis zur präzisen Formulierung des Satzes führt. Einige didaktische Überlegungen runden den Aufsatz ab.

In der Schule hat der SIF keinen Platz. Die Ideenwelt ist jedoch nicht weit von Dingen entfernt, die auch in der Schule behandelt werden, etwa die explizite und implizite Geradenform für Geraden in der Ebene und im Raum, die Normalenform für Ebenen im Raum, die Darstellung von Kurven als Funktionsgraphen, auch einige konkrete Kurven und Flächen, z. B. Kreis und Kugel.

2 Wir entdecken den Satz

Wir wollen den SIF gemeinsam entdecken. Wir fangen mit einer vage formulierten Frage an, verfeinern diese nach ersten Überlegungen und gelangen dann zu einer sehr vernünftig klingenden Antwort – dies ist der SIF, genauer seine zwei-dimensionale Version. Aus Platzgründen kann die höher-dimensionale Version hier nur angedeutet werden.

Gleichungen in einer Variablen sind gängiges Schulthema, und es ist weithin bekannt, dass viele Gleichungen genau eine Lösung haben (z. B. $2x+1=3$), aber manche auch gar keine oder mehrere Lösungen besitzen (z. B. $x^2=-1$ oder $x^2=1$). Das motiviert die Einführung des Begriffs der Lösungsmenge. Dieser bleibt aber ziemlich farblos und wird erst bei mehreren Variablen spannend. Eine Lösung einer Gleichung in zwei Variablen x, y ist ein Zahlenpaar (x, y), also ein Punkt in der Ebene.

2.1 Untersuchungsfrage, Version 1

Wie sehen Lösungsmengen von Gleichungen in zwei Variablen x, y aus?

Hier sind einige mögliche Gedankengänge, wie sie bei einem geleiteten entdeckenden Lernen entstehen könnten.

Sehen wir uns ein paar Beispiele an

$2x+3y=1$: Die Lösungsmenge ist eine Gerade, wie aus der Schule bekannt.

$x^2+y^2=1$: Nach PYTHAGORAS ist die Lösungsmenge ein Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.

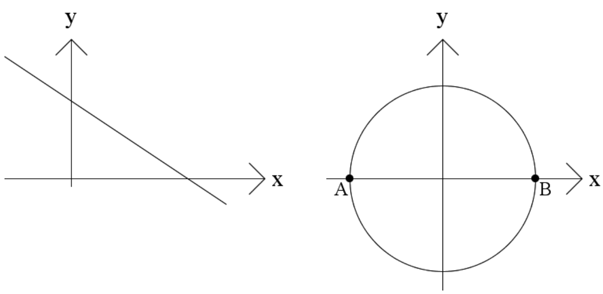

Abb. 1: Graphen zu den Beispielen

Beobachtungen: Unsere Frage hat mit Geometrie zu tun: Geraden, Kreise … , siehe **Abb. 1**. Ein ganz neuer, spannender Aspekt verglichen mit der Situation bei einer Variablen.

In diesen Beispielen ist die Lösungsmenge eine Kurve. Warum ist die Lösungsmenge eine Kurve? Ist das für jede Gleichung so?

Kleines philosphisches Zwischenspiel

Was ist eigentlich eine Kurve? Eine aus Schülersicht naheliegende Antwort wäre: Ein Funktionsgraph. Dies ist im 1. Beispiel der Fall. Die Antwort ist etwas unbefriedigend: die Kreislinie im 2. Beispiel würde man doch anschaulich als Kurve betrachten, sie ist aber kein Funktionsgraph.

Eine Idee für einen Ausweg: Der obere und der untere Halbkreis sind Funktionsgraphen. Der linke und der rechte Halbkreis sind es auch, wenn man x als Funktion von y schreibt. Natürlich gibt es andere Definitionen für Kurven, z. B. mittels Parametrisierung. Diese sind wichtig – und führen in höheren Dimensionen auf den Begriff der durch lokale Karten definierten Mannigfaltigkeit, dies geht aber in eine andere Richtung als hier angestrebt.

Wir können die bisherigen Beobachtungen so ausdrücken: Betrachten wir irgendeinen kleinen Ausschnitt aus dem Kreis, so ist er ein Funktionsgraph. Wir führen dafür eine kurze Sprechweise ein: Der Kreis ist *überall lokal* ein Funktionsgraph.

Eine Kurve ist also eine Teilmenge der Ebene, die überall lokal ein Funktionsgraph (für eine Funktion von x oder von y) ist. Dass man auch Funktionen von y braucht, sieht man ganz deutlich an der vertikalen Geraden mit $x=0$, dem Graphen der Funktion $g(y)=y$.

Im 1. Beispiel ist die Lösungsmenge ein Funktionsgraph. Wie findet man die Funktion? Zu jedem x wollen wir dasjenige y finden, das die Gleichung erfüllt. Das heißt, wir wollen nach y auflösen: $2x+3y=1 \Leftrightarrow 3y=1-2x \Leftrightarrow y=\frac{1-2x}{3}$.

Das heißt, die Lösungsmenge ist der Graph der Funktion f mit $f(x)=\frac{1-2x}{3}$.

Können wir im 2. Beispiel auch nach y auflösen? Wir formen zunächst um: $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2$. Jetzt können wir die Wurzel ziehen: $y=\sqrt{1-x^2}$, aber wir müssen auf zwei Dinge achtgeben:

Es gibt noch eine zweite Lösung: $y=-\sqrt{1-x^2}$, und das Wurzelziehen geht nur, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, wenn also $-1 \le x \le 1$ ist.

Einsichten: „Die Lösungsmenge ist Graph einer Funktion von x“ ist gleichbedeutend mit „Die Gleichung ist nach y auflösbar“.

Dass die Lösungsmenge im 2. Beispiel aus zwei Funktionsgraphen zusammengesetzt ist, entspricht genau der Tatsache, dass eine quadratische Gleichung zwei Lösungen hat.

Dass man nur auflösen kann, wenn $-1 \le x \le 1$ gilt, heißt, dass die beiden Funktionen nur auf diesem Intervall definiert sind.

Zweites philosophisches Zwischenspiel

Was heißt eigentlich „auflösbar nach y“? Hier sind zwei mögliche Antworten:

A. Man kann eine Formel für y als Funktion von x angeben, z. B. $y=\frac{1-2x}{3}$ im 1. Beispiel.

B. Man kann ein Argument angeben, das beweist, dass es zu jedem x genau eine Lösung y der Gleichung gibt. Aber man findet keine Formel für y. Gegebenenfalls muss die Menge der x-Werte eingeschränkt werden. Ein Beispiel ist durch die Gleichung $y^5+y=x$ gegeben. Diese hat zu jedem x genau eine Lösung y. Denn die linke Seite (LS) wird für große positive y beliebig groß und für betragsgroße negative y beliebig klein (negativ). Da die LS stetig von y abhängt, muss es für jedes x eine Lösung y geben. Außerdem wächst die LS an, wenn y anwächst, also führen verschiedene y-Werte zu verschiedenen x-Werten. Daher gibt für jedes x *genau* eine Lösung y. Also ist die Gleichung im Sinne von B. nach y auflösbar. Die Lösungsmenge ist also der Funktionsgraph folgender Funktion: $f(x)=$ die Lösung y der Gleichung $y^5+y=x$ mit diesem Wert x.

   Zum Beispiel ist $f(0)=0$ und $f(2)=1$, aber $f(1)$ können wir nicht so einfach ausrechnen.

Einsicht: Die Begriffe „Funktion“ und „auflösen“ sollten nicht auf explizite Formeln beschränkt sein.

Nebenbei: Die Frage, welche Gleichungen im Sinne von A. auflösbar sind, ist sehr interessant und wird für Polynomgleichungen in der Algebra behandelt. Zum Beispiel kann man mit der GALOIS-Theorie zeigen, dass es für $y^5+y=x$ keine Lösungsformel gibt, die aus Wurzeln und arithmetischen Operationen zusammengesetzt ist. Wir fokussieren aber auf geometrische Aspekte, daher ist dies hier nicht relevant.

Bei der letzten Gleichung war es noch recht einfach, die Form der Lösungsmenge zumindest ungefähr zu verstehen (z. B. als Graph der Funktion $g(y)=y^5+y$ von y, siehe **Abb. 2**).

Komplizierter ist das folgende Beispiel: $xy+\sin(x+y)=0$. Eine Lösung ist $x=0$, $y=0$. Gibt es weitere? Wie sieht die Lösungsmenge aus? Ist sie ein Funktionsgraph, zumindest nahe $(0, 0)$? Schwierige Fragen!

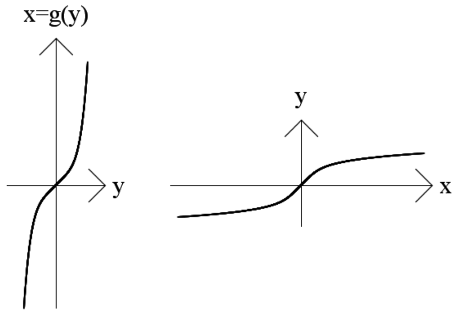

Abb. 2: Funktionsgraphen

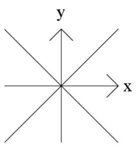

Abb. 3: Die Lösungsmenge zum letzten Beispiel

Weitere Beispiele zeigen, dass die Lösungsmenge nicht immer eine Kurve sein muss: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ besteht nur aus dem Punkt $x = 0,\ y = 0.$ Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ ist leer. Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = y^2$ ist die Vereinigung der beiden sich kreuzenden Geraden mit $x = y$ und $x = -y$, siehe **Abb. 3**.

Der Zoo der Möglichkeiten scheint unüberschaubar. Lässt sich trotzdem etwas Allgemeines über unsere Untersuchungsfrage aussagen? Um weiterzukommen, führen wir etwas Notation ein: Wir schreiben die Gleichung in der Form $F(x, y) = 0$ für eine Funktion F von zwei Variablen. Diese Form lässt sich immer erreichen, indem man „alles nach links“ bringt. Die Lösungsmenge bezeichnen wir mit $L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$.

Die Untersuchungsfrage war recht vage formuliert. Man kann sie in verschiedenen Richtungen präzisieren, um sie handhabbar zu machen. Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, ob die Lösungsmenge ein Graph ist.

Im 2. Beispiel war zwar ganz L (der Kreis) kein Graph, wohl aber Teile davon. Daher formulieren wir die Frage lokal:

2.2 Untersuchungsfrage, Version 2

Angenommen, wir kennen schon einen Punkt $P = (x_0, y_0)$ der Lösungsmenge L der Gleichung $F(x, y) = 0$. Können wir eine nachprüfbare Bedingung an F angeben, unter der die Lösungsmenge L in der Nähe von P der Graph einer Funktion ist?

Der Einfachheit halber soll von nun an „Graph einer Funktion“ immer heißen: Graph einer Funktion $y = f(x)$.

Einige Überlegungen

Lassen wir uns vom 2. Beispiel, dem Kreis, leiten: Für welche Punkte P lautet die Antwort „Ja“? Offenbar für alle Punkte außer $A = (-1, 0)$ und $B = (1, 0)$, siehe **Abb. 1** rechts. Können wir beschreiben, wo das Problem liegt? Was unterscheidet A und B von allen anderen Punkten des Kreises?

Antwort: Bei A und B verläuft der Kreis vertikal. Genauer ist die Tangente an den Kreis dort vertikal. Formulieren wir dies positiv:

Einsicht: Falls L bei P eine nicht-vertikale Tangente hat, so ist L in der Nähe von P Graph einer Funktion.

Dies ist zumindest anschaulich klar; siehe Punkt C in **Abb. 4**.

Wir wollten eine *nachprüfbare* Bedingung. Wie können wir an der Funktion F ablesen, ob der Graph von L eine nicht-vertikale Tangente bei P hat?

Hier müssen wir uns an die partiellen Ableitungen und die Bedeutung des Gradienten erinnern: Der Gradient $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ steht immer senkrecht auf der Lösungsmenge. Verläuft diese bei P vertikal, steht der Gradient horizontal, d. h. es gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0.$

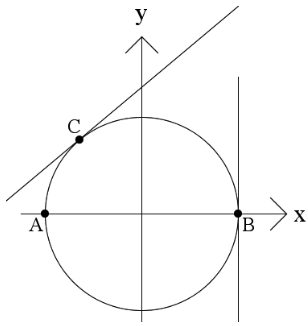

Abb. 4: Punkt *C*

Umgekehrt formuliert: Gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0,$ so ist $\nabla F(P)$ nicht horizontal und daher die Lösungsmenge bei P nicht vertikal. Ohne den Gradienten und seine Bedeutung lässt sich auch so argumentieren: Die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}(P)$ ist die Steigung des Graphen von F bei P in y-Richtung. Mit anderen Worten, sie gibt an, wie schnell sich der Funktionswert $F(x, y)$ ändert, wenn sich (x, y) in vertikaler Richtung von P wegbewegt. Ist nun $F(P) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0,$ so ist der Funktionswert ober- und unterhalb von P ungleich Null. Genauer wächst (oder fällt) er linear mit dem Abstand von P, also von der Größenordnung her mindestens so schnell wie in x-Richtung, und damit kann der Graph bei P nicht vertikal verlaufen. Für dieses Argument wäre eine dreidimensionale Skizze nützlich, die zeigt, wie der Graph von F die Ebene $z = 0$ schneidet. Kritische Leser werden anmerken, dass nicht alle Zwischenschritte der Überlegung exakt stimmen. Zum Beispiel kann es Punkte geben, wo der Graph zwei Tangenten hat, wie bei $x^2 - y^2 = 0$ und $P = (0, 0)$. Oder was soll das Wort „Tangente" bei einer einpunktigen Lösungsmenge im Beispiel $x^2 + y^2 = 0$ bedeuten?

Es ist wichtig, sich zu erinnern, dass dies *heuristische* Überlegungen sind, die dazu dienen, dass man *am Ende* eine brauchbare Vermutung findet, die dann eine Chance hat, wahr zu sein.

Wir sind also zu folgender Vermutung gelangt:

Vermutung: Ist P ein Punkt der Lösungsmenge L und gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0,$ so ist L nahe P ein Funktionsgraph.

Prüfen wir nach, ob dies bei den obigen Beispielen das schon bekannte Ergebnis liefert:

a. $F(x, y) = 2x + 3y - 1.$ Hier ist $\frac{\partial F}{\partial y} = 3$ unabhängig von x und y und daher immer ungleich Null. Tatsächlich ist die Lösungsmenge überall ein Graph.

b. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$ Hier ist $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$ Dies ist genau bei den Punkten gleich Null, wo $y = 0$ ist, also bei A und B.

c. $F(x, y) = y^5 + y - x.$ Hier ist $\frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 + 1$ immer positiv, und die Lösungsmenge ist überall ein Graph.

d. $F(x, y) = x^2 - y^2.$ Hier ist $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$ Tatsächlich ist die Lösungsmenge überall lokal ein Graph außer bei $y = 0,$ d. h. im Punkt $(0, 0)$.

Prüfen wir nun nach, was sich für das schwierige Beispiel $F(x, y) = xy + \sin(x + y)$ ergibt: Hier ist $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \cos(x + y)$. Bei $P = (0, 0)$ ist dies gleich $0 + \cos(0) = 1$, also ist die Lösungsmenge nahe $(0, 0)$ ein Graph.

Die Vermutung liefert also neue Einsichten (*falls* sie stimmt). Ist das nicht großartig?

3 Der Satz

Stimmt die oben angegebene Vermutung? Vielleicht haben wir bei der Vielfalt der Möglichkeiten etwas übersehen. Gewissheit kann uns nur ein Beweis geben. In der Tat ist die Vermutung korrekt und Inhalt des Satzes über implizite Funktionen. Formulieren wir ihn etwas genauer. Damit wir von Ableitungen sprechen können, müssen wir voraussetzen, dass die Funktion F differenzierbar ist. Sind die (partiellen) Ableitungsfunktionen stetig, nennen wir F glatt. In der „Praxis“ ist das immer der Fall.

3.1 Satz über implizite Funktionen (2-dimensionale Version):

Es sei F eine glatte Funktion zweier Variablen x, y. Es sei (x_0, y_0) eine Lösung der Gleichung $F(x_0, y_0) = 0$. Angenommen, es gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ lässt sich für x nahe x_0 glatt nach y nahe y_0 auflösen.
2. Die Lösungsmenge $L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ ist nahe (x_0, y_0) Graph einer glatten Funktion f, hat dort also die Form $\{(x, y) : y = f(x)\}$.

Die beiden Aussagen sind zwei Seiten derselben Medaille, wie wir oben sahen, genauer ist die zweite eine Präzisierung der ersten.

Für vollständige logische Klarheit sollte noch der Begriff „nahe“ präzisiert werden. Dies sieht dann so aus:

2 . Es gibt offene Intervalle I und J mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ sowie eine glatte Funktion $f : I \to J$, so dass für alle $x \in I$, $y \in J$ gilt: $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Hier ist eine *Beweisskizze*: Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $x_0 = y_0 = 0$ und dass $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) > 0$ gilt. Da die Ableitung stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ für $|x| \leq \varepsilon$ und $|y| \leq \varepsilon$ gilt. Daraus folgt $F(0, \varepsilon) > 0$ und $F(0, -\varepsilon) < 0$. Wegen der Stetigkeit von F gibt es ein $\varepsilon' > 0$ (wobei o. B. d. A. $\varepsilon' \leq \varepsilon$ sei), sodass $F(x, \varepsilon) > 0$ und $F(x, -\varepsilon) < 0$ für alle x mit $|x| \leq \varepsilon'$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für jedes solche x ein $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $F(x, y) = 0$. Weil im betrachteten Bereich $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ gilt, kann es nur ein solches y geben. Definieren wir also $f(x) =$ dieser Wert y, so ist die Aussage des Satzes mit $I = (-\varepsilon', \varepsilon)$ und $J = (-\varepsilon, \varepsilon)$ erfüllt. Es bleibt nun noch nachzuweisen, dass f glatt ist. Das ist ein wenig schwieriger, sei hier aber ausgelassen.

Sie können den vollständigen Beweis und auch die höherdimensionale Version des Satzes in allen Lehrbüchern der mehr-dimensionalen Analysis nachlesen oder in GRIESER [2018], wo ein ähnlicher Zugang wie hier gewählt ist. KRANTZ und PARKS [2002] geben mehrere Beweise und auch Details zur Geschichte und zu Anwendungen des Satzes.

4 Einige weitere Anmerkungen

a. Der Name des Satzes kommt daher, dass man sagt, die Funktion f sei durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit definiert – im Unterschied zur expliziten Definition durch einen Formelausdruck $f(x) = \ldots$ Daher sollte der Satz eigentlich „Satz über implizit definierte Funktionen" heißen, die abgekürzte Sprechweise hat sich aber eingebürgert.

b. Wie merkt man sich die Bedingung? Irgendwann erinnern Sie sich daran, dass eine der partiellen Ableitungen ungleich Null sein musste. Aber welche bloß? Eine einfache Merkhilfe ist die folgende: Damit man eine Gleichung nach y auflösen kann, muss y in der Gleichung vorkommen (z. B. kann man $x^2 - 5 = 0$ nicht nach y auflösen). Falls y nicht vorkommt, hängt F nicht von y ab, also ist $\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$ Zum Auflösen nach y braucht man, dass die y-Ableitung ungleich Null ist.

c. Der Satz sagt aus, dass die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ hinreichend dafür ist, dass die Lösungsmenge L lokal ein Graph ist. Ist sie auch notwendig?
Das ist nicht der Fall, wie das einfache Beispiel $F(x, y) = y^2$ zeigt. Ein anderes Beispiel ist $F(x,y) = y^3 - x$ mit $P = (0, 0)$. Die Lösungsmenge ist der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Allerdings ist diese an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar (vertikale Tangente).

d. Für viele Anwendungen ist die höher-dimensionale Version des Satzes wichtig. Ersetzt man x durch eine Variablengruppe $x_1, \ldots, x_n$, ändert sich nicht viel, nur die Anschauung wird schwieriger, ist aber bei $n = 2$ noch zumutbar (wobei man meistens x, y statt x_1, x_2 und z statt y schreibt). Dabei geht es um Flächen im Raum, z. B. die Ebenengleichung (etwa $x + 2y - 3z = 1$) oder die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ für die Oberfläche einer Kugel. Es geht noch allgemeiner: Man ersetzt auch y durch eine Variablengruppe $y_1, \ldots, y_m$ und die eine Funktion F durch m Funktionen $F_1, \ldots, F_m$, die alle von $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ abhängen. Man möchte die m Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ nach den m Variablen $y_1, \ldots, y_m$ (lokal nahe einer Lösung $\boldsymbol{P}$) auflösen. Die hinreichende Bedingung dafür lautet, dass die $m \times m$ Matrix $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(P) \right)_{i,j=1,\ldots,m}$ invertierbar ist.
Diese Bedingung kann man auch mit Hilfe heuristischer Überlegungen selbst finden, zum Beispiel indem man zuerst den Fall linearer Abbildungen betrachtet. Im einfachsten Fall $n = 1$ und $m = 2$ ist die Lösungsmenge eine Gerade im Raum. Hierzu braucht man Grundwissen der linearen Algebra (Auflösen linearer Gleichungssysteme). Das würde hier aber zu weit führen, und auch der Beweis ist deutlich komplexer.

e. Natürlich ist es spannend, auch quantitativ etwas über die Funktion f zu erfahren und nicht nur zu wissen, dass sie existiert. Zum Beispiel lässt sich die Ableitung $f'(x_0)$ leicht mit der Kettenregel bestimmen:

Für alle x gilt $F(x, f(x)) = 0$. Leitet man das nach x ab, folgt $\frac{\partial F}{\partial x} + f' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, also $f'(x_0) = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$, wobei die partiellen Ableitungen rechts bei (x_0, y_0) auszuwerten sind.

f. Eine andere Sichtweise des Problems, das der SIF löst, ist folgende: Wir betrachten eine Gleichung einer Variablen, z. B. $y^2 = 1$. Angenommen, wir kennen eine Lösung, im Beispiel etwa $y_0 = 1$. Wenn wir nun die Gleichung ein wenig ändern („stören"), gibt es dann immer noch eine Lösung? Und wie weit liegt diese von y_0 entfernt?
Stören wir zum Beispiel die Gleichung durch Hinzufügen eines linearen Terms: $y^2 + xy = 1$. Für x nahe Null ist das eine kleine Störung. Wie ändert sich die Lösung y? Der SIF sagt, dass es für x nahe $x_0 = 0$ eine Lösung $y = f(x)$ nahe $y_0 = 1$ gibt, und $f'(x_0) = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$ ergibt $f'(0) = \left(-y / 2y\right)_{|y=1} = -\frac{1}{2}$. Nach der TAYLORformel ist also die Lösung y in erster Näherung gleich $1 - \frac{1}{2}x$. Prüfen Sie für $x = 0{,}1$ einmal mit quadratischer Lösungsformel und Taschenrechner nach, wie gut diese Näherung ist!
Diese störungstheoretische Sichtweise ist für die Anwendungen besonders relevant.

5 Einige didaktische Anmerkungen

Als Lehrender sollte man sich bewusst machen, welche Ziele man erreichen möchte und welche besonderen Schwierigkeiten ein Thema für die Lernenden birgt. Im Zusammenhang mit dem Satz über implizite Funktionen sehe ich als *Ziele*: Die Studierenden sollten

I. die Fragestellung kennen, die der Satz beantwortet, geometrisch und im Gleichungskontext,
II. den Satz sowohl anschaulich als auch formal präzise formulieren können,
III. erklären können, warum die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ vernünftig ist und warum der Satz lokal formuliert ist,
IV. den Satz auf Beispiele anwenden können,
V. einen Beweis kennen, zumindest eine Beweisidee.

Meine Arbeitshypothese ist, dass der entdeckende Zugang für das Erreichen dieser Ziele hilfreich ist.

Einige *besondere Herausforderungen* für Studierende in diesem Zusammenhang sind:

I. der allgemeine Funktionsbegriff (nicht explizit hinschreibbare Funktionen)
II. die genaue begriffliche Unterscheidung zwischen Funktionen und ihren Graphen
III. die unterschiedlichen Variablenbedeutungen (variabel – fixiert)
IV. das Zusammenwirken von Geometrie, Analysis und (in höheren Dimensionen) linearer Algebra
V. die Komplexität der genauen Formulierung (z. B. die Notwendigkeit der Lokalisierung, deren verschachtelte präzise Formulierung)

Es ist wichtig, sich dieser Schwierigkeiten bewusst zu sein, damit man sensibel darauf eingehen und darauf vorbereiten kann.

Inhaltlich kann man die Sache aus anders angehen: Ich habe mit der geometrischen Sicht angefangen („Form“ der Lösungsmenge). Man könnte stattdessen auch mit der algebraischen Sicht anfangen (Auflösen von Gleichungen) oder mit der Sicht als Störungsproblem.

Der entdeckende Zugang stellt hohe Anforderungen an die Lernenden: er funktioniert nur gut, wenn sie sich darauf einlassen, über die Dinge eigenständig nachzudenken; daher erfordert er beständige Aufmerksamkeit und überfordert auch manche. Andererseits erlaubt er wegen der Dialogsituation ein schnelles Reagieren auf Schwierigkeiten.

Ein großer Vorteil des entdeckenden Zugangs ist, dass für die Lernenden fundamentale Aspekte der *wissenschaftlichen Methode* in der Mathematik sichtbar und erlebbar werden, etwa:

1. Man fängt mit einer vagen Fragestellung an und arbeitet sich zu einer spezifischen, beantwortbaren vor.
2. Dabei sind heuristische Überlegungen, die auch unpräzise sein dürfen, nützlich – am Ende braucht man aber präzise formulierte Aussagen.
3. Man lässt sich teilweise durch Beispiele leiten und versucht dabei immer wieder, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen.
4. Die Verbindung unterschiedlicher Sichtweisen, wie Geometrie, Analysis und Algebra, kann sehr fruchtbar sein.

Kurz: Der entdeckende Zugang kann Studierende dazu anregen, Mathematik nicht als von anderen gemachtes fertiges Gebäude, sondern als lebendigen Prozess zu begreifen. Dies ist natürlich auch auf die Schule übertragbar.

Bei allen Vorteilen – der entdeckende Zugang kostet Zeit. In der Praxis wird man daher nicht jedes Thema auf diese Weise behandeln können. Daher sollte man einzelne Themen auswählen, die man exemplarisch so angeht. Wir haben gesehen, dass selbst (oder gerade?) der schwierige Satz über implizite Funktionen hierfür hervorragend geeignet ist.

Ich wünsche Ihnen viel Freude dabei, gemeinsam mit Ihren Schülerinnen und Schülern die Mathematik immer wieder neu zu entdecken.

Literatur

[1] D. Grieser [2017]: Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik (2. Auflage). Springer-Verlag.
[2] D. Grieser [2018]: Skript zur Vorlesung Analysis 2. Juli 2018. https://uol.de/fileadmin/user_upload/mathe/personen/daniel.grieser/Lehre/Skripte/skript-ana2-Juli-2018.pdf
[3] G. Krantz und H. R. Parks [2002]: The implicit function theorem – History, theory, and applications. Birkhäuser Boston.