Woher kommen eigentlich die Bernoulli-Zahlen?

D. Grieser

17. April 2002

Die Bernoulli-Zahlen $(B_k)_{k\geq 0} = (1, 1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, \ldots)$, definiert durch

$$\tau(t) := \frac{t}{1-e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, t^k, \tag{1}$$

treten z.B. in der *Euler-MacLaurin'schen Summenformel* auf:

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \int_0^n f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)) + R_N. \tag{2}$$

(R_N ist ein Restglied.)

Was hat die Funktion τ mit Summation zu tun? Folgendes Folklore-Argument macht dies (im Unterschied zum üblichen Induktionsbeweis von (2)) unmittelbar klar:

Bekanntlich ist die Exponentialfunktion die Mutter aller Mathematik. Betrachten wir also, für $t > 0$, das Integral $\int_{-\infty}^{0} e^{tx}\,dx = 1/t$ und die Summe $\sum_{x=-\infty}^{0} e^{tx} = 1/(1-e^{-t})$. Man sieht

$$\sum_{x=-\infty}^{0} e^{tx} = \tau(t) \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\,dx. \tag{3}$$

Also:

> *τ vermittelt zwischen Integration und Summation (für die Exponentialfunktion).*

Aus (3) leiten wir nun (2) für den Fall her, dass f ein Polynom vom Grad höchstens N ist (in diesem Fall verschwindet R_N):

Multiplizieren wir (3) mit e^{nt}, $n \in \mathbb{N}$, indizieren Summe und Integral um und subtrahieren (3), so folgt

$$\sum_{x=1}^{n} e^{tx} = \tau(t) \int_0^n e^{tx}\, dx. \tag{4}$$

Dies ist eine Identität zwischen drei Potenzreihen in t. Wir setzen nun formal

$$t = \frac{d}{dh},$$

wobei h eine zusätzliche Variable bezeichnet. Nach dieser Ersetzung wird (4) zu einer Identität zwischen (formalen) Differentialoperatoren. Wenden wir sie auf ein Polynom p in der Variablen h an, so sind alle Summen endlich. Die Taylor'sche Formel $p(h+x) = p(h) + xp'(h) + \frac{x^2}{2!}p''(h) + \ldots$ läßt sich schreiben als

$$\left(e^{x\frac{d}{dh}}p\right)(h) = p(h+x).$$

Aus (4) folgt also

$$\sum_{x=1}^{n} p(h+x) = \tau(\frac{d}{dh}) \int_0^n p(h+x)\, dx = \tau(\frac{d}{dh}) \int_h^{n+h} p(x)\, dx. \tag{5}$$

Wir sind fast fertig. Mit $I(h) = \int_h^{n+h} p(x)\, dx$ ist $I(0) = \int_0^n p(x)\, dx$, $I'(0) = p(n) - p(0)$, $I''(0) = p'(n) - p'(0)$ etc. nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Setzen wir also in (5) die Potenzreihe (1) für τ ein und werten bei $h = 0$ aus, so ergibt sich

$$\sum_{x=1}^{n} p(x) = B_0 \int_0^n p(x)\, dx + B_1(p(n) - p(0)) + \frac{B_2}{2!}(p'(n) - p'(0)) + \ldots.$$

Das ist genau die Euler-MacLaurin'sche Formel.

Als Ehrenrettung für den üblichen Induktionsbeweis von (2) sei erwähnt, dass dieser auch eine Formel für das Restglied R_N liefert, für nicht-polynomiales f.