Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

# Geometrische Analysis

## Blatt 11

**Aufgabe 1.** (5 Punkte)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Zeige: $A \in L^m(X)$ ist dann und nur dann eigentlich getragen, wenn es eine eigentlich getragene Amplitude $a \in S^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ gibt mit $K_A = I(a, \langle x-y, \xi\rangle)$. (Siehe Theorem 7.4.)

(ii) Zeige, dass jeder Pseudodifferentialoperator $A \in L^m(X)$ als Summe $A = A_0 + A_1$ geschrieben werden kann, so, dass $K_{A_0} \in C^\infty(X \times X)$ und $A_1$ eigentlich getragen ist. (Siehe Theorem 7.5.)

**Aufgabe 2.** (5 Punkte)

Eine Funktion $a(x,\theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ heisst *klassisches Symbol der Ordnung* $m$, $m \in \mathbb{C}$, falls (im Sinne der asymptotischen Entwicklung)

$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\theta) a_{m-j}(x,\theta)$$

so, dass

- $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi(\theta) = 0$ für $|\theta| \leq 1/2$, $\psi(\theta) = 1$ für $|\theta| \geq 1$, und
- $a_{m-j}(x,\theta) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^N \setminus 0))$ positiv homogen vom Grad $m-j$, d.h. $a_{m-j}(x,t\theta) = t^{m-j} a_{m-j}(x,\theta)$ für $t > 0$ und $(x,\theta) \in X \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$.

Sei $CS^m(X \times \mathbb{R}^N)$ die Klasse aller klassischen Symbole der Ordnung $m$, und sei $CL^m(X)$ die Klasse aller Pseudodifferentialoperatoren mit mindestens einer Amplitude in $CS^m(X \times X \times \mathbb{R}^n)$. Diese Operatoren nennt man *klassische* Pseudodifferentialoperatoren. Zeige:

(i) $\psi(\theta) a_{m-j}(x,\theta) \in S^{\mathrm{Re}\, m-j}(X \times \mathbb{R}^n)$.

(ii) Falls $A \in CL^m(X)$ eigentlich getragen ist, dann ist $\sigma_A(x,\xi) \in CS^m(X \times \mathbb{R}^n)$.

(iii) Falls $A \in CL^{m_1}(X)$ und $B \in CL^{m_2}(X)$ eigentlich getragen sind, dann ist $BA \in CL^{m_1+m_2}(X)$.

(iv) Falls $A \in CL^m(X)$, dann ist $A^t \in CL^m(X)$ und $A^* \in CL^m(X)$.

**Aufgabe 3.** (5 Punkte)

Sei $A \in L^m X$ eigentlich getragen. Die Funktion $a(x,\xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ sei eine ($y$-unabhängige) Amplitude für $A$. Zeige: $\sigma_A - a \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$.