Prof. Dr. Boris Vertman
M. Sc. Artem Nepechiy

Wintersemester 2014

Geometrische Analysis

Blatt 5

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Seien $u < t < s$ reelle Zahlen. Zeige, dass es zu $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon)$ gibt, so dass für $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_t \leq \varepsilon \|f\|_s + C(\varepsilon)\|f\|_u.$$

Aufgabe 2. (Schwartz-Raum) (5 Punkte)

Zeige, dass der Schwartz-Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit den Halbnormen

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$$

ein Fréchet-Raum ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Zeige: Für $s \in \mathbb{R}$ setzt sich das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C} \\ (f,g) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} g \end{aligned}$$

zu einer *dualen Paarung*, d.h. nichtausgearteten Bilinearform, $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{-s}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ fort.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Für $n \geq 2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi(\|x\|) \cdot (-\log(\|x\|)^\alpha & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \quad x = 0 \end{cases}$$

Wobei $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset B^1_{1-\varepsilon}$ und $\varphi_{|B^1_\varepsilon} \equiv 1$ für ein $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie

$$f_\alpha \in H^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow n = 2, \alpha < \frac{1}{2} \text{ oder } n > 2, \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Insbesondere existieren für $n \geq 2$ Funktionen in $H^1(\mathbb{R}^n)$, die nicht stetig sind.