(ii) Für $\xi > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} g(x)\,dx = 2\pi i\, e^{\xi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \binom{n}{k} (2i)^{n}$

Beweis der Aussage für $\xi \leq 0$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{1}{(x-i)} \frac{(x+i)^n}{(x-i)^n}\,dx = (\text{Substituiere } y = -x)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{iy\xi} \frac{(-y+i)^n}{(-y-i)^n}}_{} (-1)\,dy$$

dieser Integrand besitzt eine Singularität nur an $y = -i \notin \mathbb{H}$, also wird keine Sing. eingeschlossen und das Integral $= 0$. ☒

(II) Null- und Polstellen zählendes Integral

(15.3) Satz: Sei γ ein geschlossener, sich innerhalb eines Gebietes G stetig auf einen Punkt zusammenziehbarer Weg und $f \in \mathcal{M}(G)$ ohne Sing auf γ.

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#\{\text{NST innerhalb } \gamma\} - \#\{\text{PST innerhalb } \gamma\}$$

$$= \sum_{\substack{z \in \mathrm{Int}(\gamma) \\ f(z) = 0}} \mathrm{ord}_z(f)^{n(\gamma,z)} - \sum_{\substack{z \in \mathrm{Int}(\gamma) \\ f(z) = \infty}} |\mathrm{ord}_z(f)|^{n(\gamma,z)}$$

Ordng der NST   Ordng der PST.

Beweis: Nach dem Residuensatz gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}_z\left(\frac{f'}{f}\right) \cdot n(\gamma, z)$$

Fall 1: z_0 eine Nullstelle der Ordnung $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$

$$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z) \text{ wo } g \text{ an } z_0 \text{ holomorph}, \neq 0.$$

$$\Rightarrow f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \cdot g(z) + (z - z_0)^m \cdot g'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = m(z - z_0)^{-1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \leftarrow \text{holomorph an } z = z_0$$

Damit besitzt f'/f eine Laurentreihenentwicklung mit $a_{-1} = m$. Also: $\mathrm{Res}_{z_0}(f'/f) = m$.

Fall 2: z_0 eine Polstelle der Ordnung $-m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$.

$$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z), \text{ wo } g \text{ an } z_0 \text{ holom}, \neq 0.$$

Wiederholung der gleichen Rechnung liefert

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -m \cdot (z - z_0)^{-1} + \frac{g'(z)}{g(z)} \Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}(f'/f) = -m$$

Zusammensetzung von Fall 1 + Fall 2 $\square$

~~Beispiel: [illegible] holomorph, γ ein zusammenziehbarer Weg in G und [illegible]. Zeigen Sie~~

~~$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum f^{-1}(w) \cdot n(\gamma, f^{-1}(w))$.~~

Satz 15.4 Unter den Voraussetzungen vom Satz 15.3 mit $F: G \to \mathbb{C}$ holomorph gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\ \mathrm{NST}} n(\gamma,z)\,\mathrm{ord}_z(f) - \sum_{z\ \mathrm{PST}} n(\gamma,z)\,|\mathrm{ord}_z(f)|$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\mathrm{NST}} n(\gamma,z)\,\mathrm{ord}_z(f)\,F(z) - \sum_{\mathrm{PST}} n(\gamma,z)\,|\mathrm{ord}_z(f)|\,F(z).$$

Beweis der 2-ten Aussage: Ü

Beispiel: Sei $f: G \to G'$ biholomorph, γ zusammenziehbarer Weg in G und $\omega \in G'$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)-\omega}\,dz = f^{-1}(\omega)\,n(\gamma, f^{-1}(\omega)).$$

Beweis: Die Formel ist eine direkte Konsequenz vom Satz 15.4. mit $F(z) = z$:

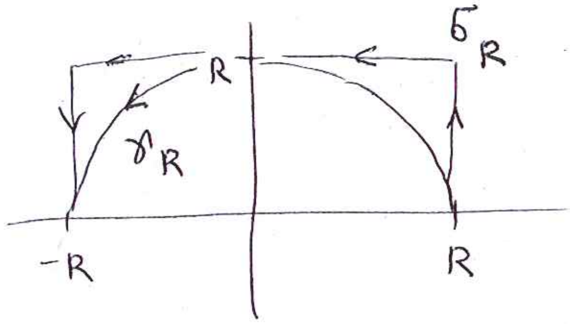
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\frac{(f(z)-\omega)'}{(f(z)-\omega)}\,dz \underset{\substack{z = f^{-1}(\omega) \\ \text{ist die einzige Nullstelle,} \\ \text{sie ist von der Ordnung 1, da} \\ f \text{ biholomorph Ü.}}}{\uparrow=} n(\gamma, f^{-1}(\omega))\cdot \underbrace{F(f^{-1}(\omega))}_{=f^{-1}(\omega)}\cdot \underbrace{\mathrm{ord}_{f^{-1}(\omega)}(f-\omega)}_{=1}$$

$$= f^{-1}(\omega)\cdot n(\gamma, f^{-1}(\omega)).$$

III Uneigentliche Hauptwertintegrale

Wir fahren fort unter allgemeinen Voraussetzungen des Satzes 15.2:

- f meromorph auf $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$
- die Singularitätenmenge von f in $\overline{\mathbb{H}}$ ist endlich
- $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ oder $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0$ (*)



<u>Satz 15.2</u>: Falls f auf $\mathbb{R}$ keine Singularitäten besitzt, dann gilt $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum\limits_{z \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_z(f)$.

~~Satz 15.8~~ Wir möchten in diesem Unterkapitel nun auch Singularitäten auf $\mathbb{R}$ zulassen.

<u>Definition 15.5</u> (Hauptwertintegral)

Sei $f : [a,b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}$ stetig.

$$\text{HW-}\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} \right) f(x)\,dx$$

falls der Grenzwert existiert.

Satz 15.6 Unter den obigen Voraussetzungen soll f nun endlich viele EINFACHE Pole auf $\mathbb{R}$ besitzen. Dann gilt:

$$\text{HW-}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\Im(z)>0} \operatorname{Res}_z(f)$$

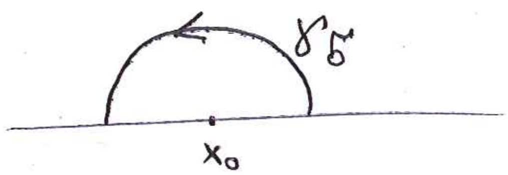
$$+ \pi i \sum_{\substack{\Im(z)=0 \\ (\text{ie } z\in\mathbb{R})}} \operatorname{Res}_z(f)$$

(d.h. die Polstellen auf $\mathbb{R}$ zählen halb so viel wie die Polstellen im Inneren von $\mathbb{H}$).

__Beweis:__ Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein einfacher Pol von f $(\operatorname{ord}_{x_0}(f) = -1)$

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res}_{x_0}(f)}{(z-x_0)} + g(z)$$

mit g holomorph in $\overline{B_\delta(x_0)}$. Betrachte γ_δ um x_0:



i) $$\left| \int_{\gamma_\delta} g(z)\,dz \right| \leq \sup_{z\in\gamma_\delta} |g(z)| \cdot \text{Länge}(\gamma_\delta)$$

$$\leq \text{Const}\cdot \pi\delta \xrightarrow{\delta\to 0} 0 .$$

ii) Setze ein $\gamma_\delta = \delta e^{it} + x_0$, $t \in [0,\pi]$ und rechne

$$\int_{\gamma_\delta} \underset{h(z)}{\underbrace{\frac{1}{z-x_0}}}\, dz = \int_0^\pi \underset{h(\gamma_\delta(t))}{\underbrace{\frac{1}{\cancel{\delta e^{it}}}}} \cdot \underset{\gamma_\delta'(t)}{\underbrace{i\cancel{\delta}\cancel{e^{it}}}}\, dt$$

$$= \int_0^\pi i\, dt = \pi i.$$

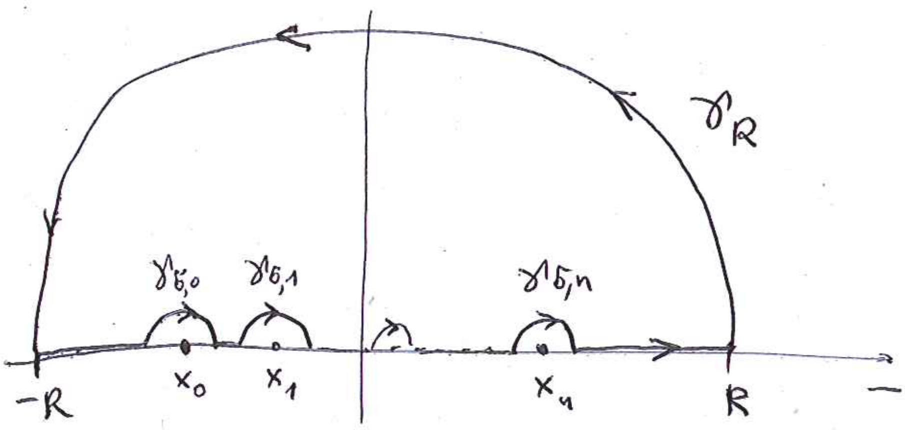
iii) Setze die Ergebnisse zusammen:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz = \lim_{\delta \to 0} \int_{\gamma_\delta} \left[\frac{\operatorname{Res}_{x_0}(f)}{z-x_0}\right] + g(z)\, dz$$

$$= \operatorname{Res}_{x_0}(f) \cdot \underbrace{\int_{\gamma_\delta} \frac{1}{z-x_0}\,dz}_{=\pi i \text{ wegen (ii)}} + \underbrace{\lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_\delta} g(z)\,dz}_{=0 \text{ wegen (i)}}$$

$$= \pi i \operatorname{Res}_{x_0}(f).$$

Nun seien $x_0, \dots, x_n$ – Polstellen von f auf $\mathbb{R}$ ($\operatorname{ord}_{x_i}(f) = -1$)
Wir betrachten für großes $R > 0$ folgende Kurve:



Einerseits gilt nach Residuensatz

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_z(f).$$

andererseits gilt wegen der speziellen Wahl von γ:

$$\int_{\gamma} f = \int_{[-R,R]\setminus\bigcup_{i=0}^{n}(x_i-\delta,x_i+\delta)} f(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n}\int_{\gamma_{\delta,i}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

$$\Big\downarrow R\to\infty \qquad \text{(iii)}\Big\downarrow R\to\infty \qquad (*)\Big\downarrow R\to\infty$$

$$HW-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad -\sum_{i=0}^{n}\pi i\,\mathrm{Res}_{x_i}(f) \qquad 0$$

$$\Rightarrow\ HW-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{z\in\mathbb{H}}\mathrm{Res}_z(f) + \pi i\sum_{x\in\mathbb{R}}\mathrm{Res}_x(f).$$

(Beachte $\gamma_{\delta,i}$ sind entgegengesetzt zu (iii) orientiert, daher das Minuszeichen im 2-ten Grenzwert). $\boxtimes$

<u>Beispiele</u>: 1) $HW-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}}\left(\int_{-R}^{-\delta}\frac{1}{x} + \int_{\delta}^{R}\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}}\left(-\cancel{\int_{\delta}^{R}\frac{1}{x}} + \cancel{\int_{\delta}^{R}\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

einfach wegen der Punktsymmetrie von $1/x$ um den Ursprung.

andererseits $\operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, dh hier

$$HW - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \neq \pi i \operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{x}\right).$$

Warum ist der Satz nicht anwendbar?

((*) ist nicht erfüllt. $\int_{\gamma_R} \frac{1}{z} \underset{R\to\infty}{\not\to} 0$)

2) $\boxed{HW - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi}$ (Beispiel 15.7)

Beweis: Betrachte $f(z) = \frac{1}{z} e^{iz}$; $\operatorname{Im} f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- f besitzt einen EINFACHEN Pol in $x=0$ und ist ansonsten holomorph.
- auf $\mathbb{H}$ gilt: $|f(z)| = \frac{1}{|z|} e^{-\operatorname{Im}(z)}$ und damit erfüllt f (*)-Bedingung (* folgt aus B auf S. 86)

$\Rightarrow$ also können wir Satz 15.6 anwenden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \pi i \underbrace{\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)}_{=1} = \pi i$$

Nun zerlege f in Real- und Imaginärteil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,dx = 0 \quad (= \operatorname{Re}(\pi i))$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi \quad (= \operatorname{Im}(\pi i)).$$