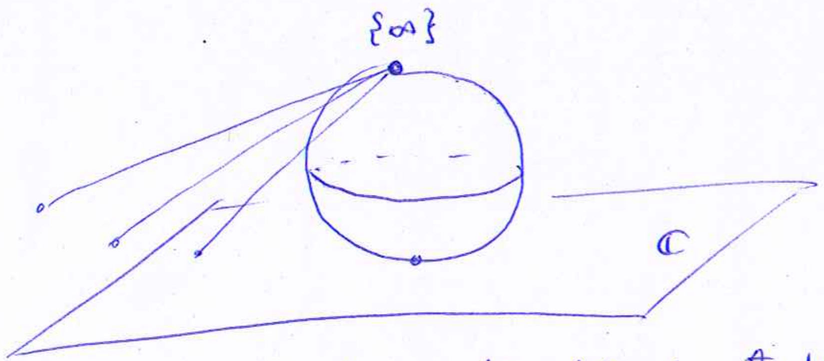
<u>1. Million Frage:</u> Wo befinden sich die Nullstellen der meromorphen Fortsetzung $\zeta(s)$, "Riemannsche Vermutung" (Millenniumsproblem) NST sollen auf
$$\{ s \in \mathbb{C} \mid Re(s) = 1/2 \}$$ sein

§ 13. Die Riemannsche Zahlenkugel

In diesem Kapitel vertiefen wir unser Verständnis der meromorphen Funktionen, Erinnerung:
$$\mathcal{M}(U) := \{ f : U \to \mathbb{C}^* \mid f \text{ meromorph also ohne wesentliche Sing.} \}$$

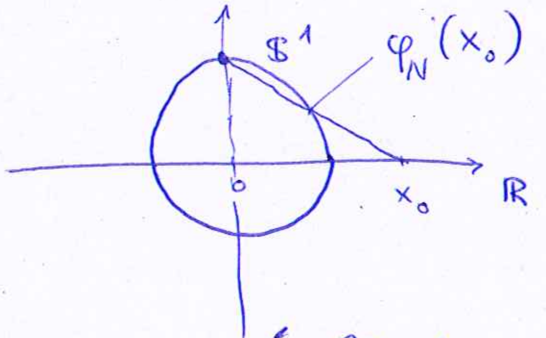
<u>Definition 13.1</u> Die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C}^*$ ist
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$



mit folgender Topologie, d.h. folgender Festlegung offener Mengen:
$U \subset \mathbb{C}^*$ offen falls $U \cap \mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ und $\varphi(U) \cap \mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ offen sind, mit $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \, z \mapsto \frac{1}{z}$.

Stereographische Projektion:

1) Eindimensional: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\overset{\pm\infty}{\infty}\}$ kann mit $\mathbb{S}^1$ identifiziert werden.



$$\varphi_N(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{1+x_0^2} \\ \frac{x_0^2-1}{x_0^2+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$$

nur mündlich

Herleitung: Geradengleichung aufstellen und Schnittpunkt mit $\mathbb{S}^1$ bestimmen.

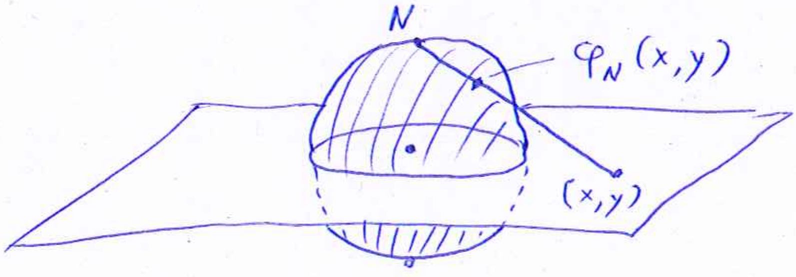
- Gerade durch Nordpol hin zu $(x_0, 0)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0(1-y) \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

- Schnitt mit $\mathbb{S}^1$: $[x_0(1-y)]^2 + y^2 = 1$

nach y auflösen, dh $y = \frac{x_0^2-1}{x_0^2+1}$, $x = x_0(1-y) = \frac{2x_0}{1+x_0^2}$.

2) Zweidimensional: $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ identifiziert mit $\mathbb{S}^2$



Ü

$$\varphi_N(z=(x,y)) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2} ; \frac{2y}{1+x^2+y^2} ; \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right)$$

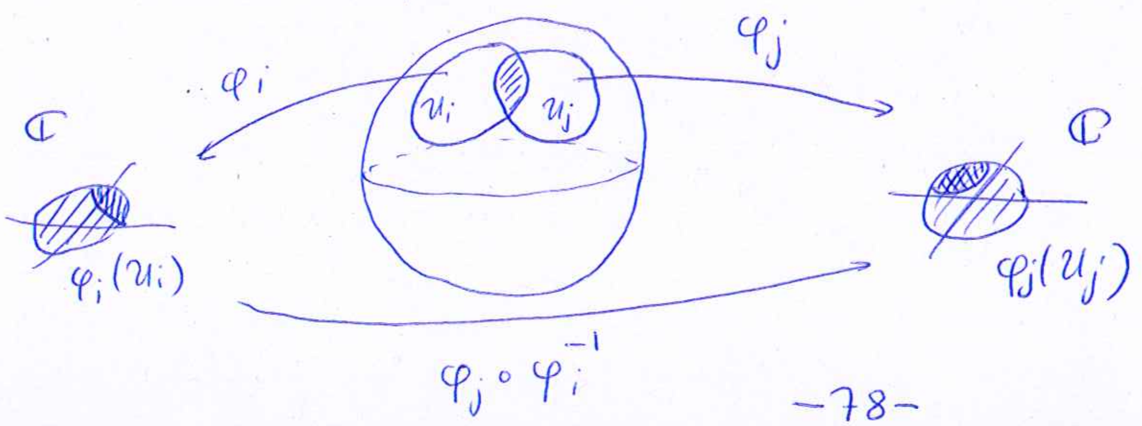
$$= \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{1+|z|^2} , \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{1+|z|^2} , \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2} \right)$$

Beachte:
- es existiert stereographische Proj φ_S von unten
- $\varphi_N^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ wobei $\{N\}$ dem $\{\infty\}$ in $\mathbb{C}^*$ entspricht. Der Nordpol liegt aber sehr wohl im Definitionsbereich von $\varphi_S^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}$

Ü Bestimmen Sie $\varphi_N^{-1} \circ \varphi_S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Ist diese Abbildung holomorph?

<u>Definition 13.2</u>: Holomorpher Atlas auf $\mathbb{C}^*$ besteht per Definition aus "Karten" $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)_{j\in I}$

- $\mathcal{U}_j \subset \mathbb{C}^*$ sind offen; $\bigcup_{j\in I} \mathcal{U}_j = \mathbb{C}^*$
- $\varphi_j : \mathcal{U}_j \to \varphi_j(\mathcal{U}_j) \subset \mathbb{C}$ stetig, bijektiv, φ^{-1} stetig
  d.h. φ_j ist ein "Homeomorphismus"
- $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i) \cap \varphi_j(\mathcal{U}_j) \subset \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ "Kartenwechsel" ist biholomorph



Beispiele holomorpher Atlasse auf $\mathbb{C}^*$: (Proposition 13.3)

1) Stereographische Projektion $\varphi_N : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\} =: \mathcal{U}_N$
$\varphi_S : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{S\} =: \mathcal{U}_S$

Ü $\{(\mathcal{U}_N, \varphi_N^{-1}), (\mathcal{U}_S, \varphi_S^{-1})\}$ ist ein holom. Atlas.

2) Inversion: $\mathcal{U}_1 := \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^*$ offen
$\mathcal{U}_2 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| > 0\}$ offen in $\mathbb{C}^*$

$\{(\mathcal{U}_1, id: \mathcal{U}_1 \to \mathbb{C}), (\mathcal{U}_2, 1/z : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{C})\}$
ist ebenfalls ein holomorpher Atlas.

Beweis: Schreibe $\varphi_1 = id : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{C}$
$\varphi_2 = 1/z : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{C}$

$$\varphi_1(\mathcal{U}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{U}_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

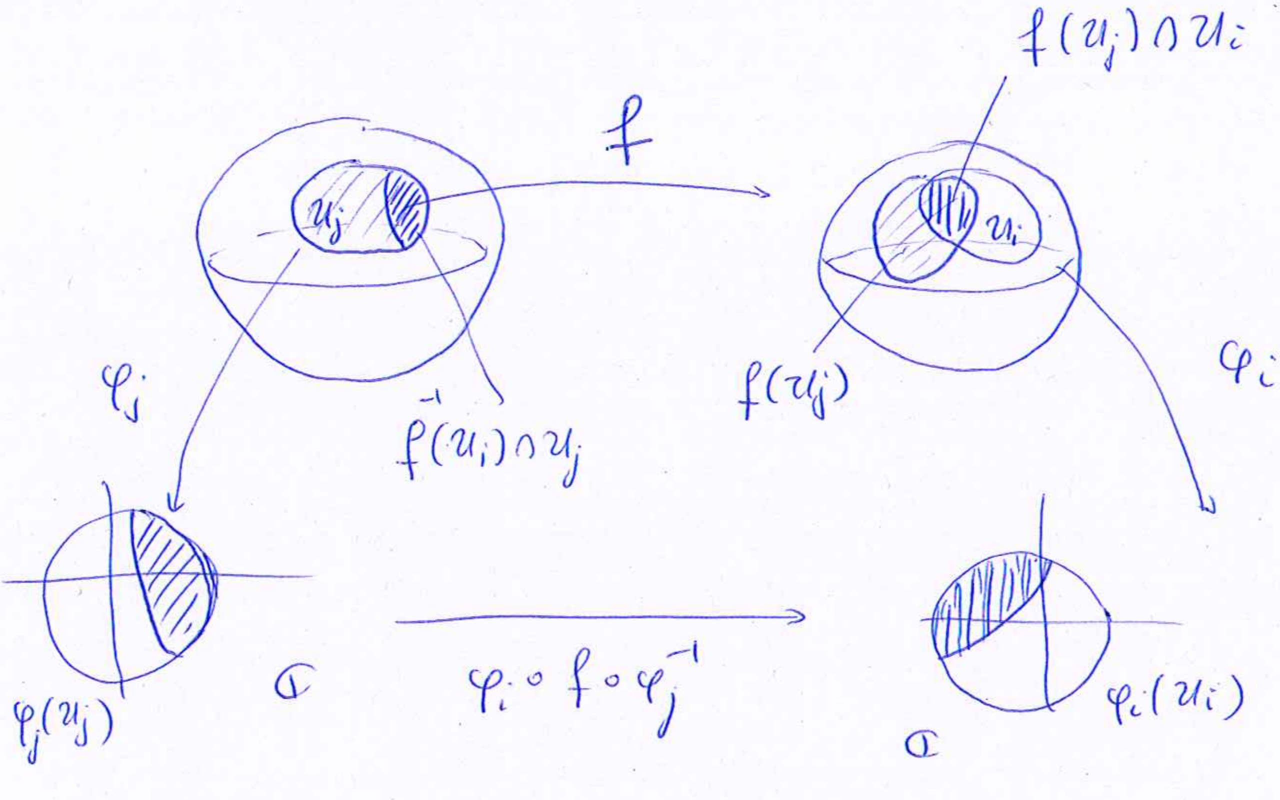
$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_1(\mathcal{U}_1) \cap \varphi_2(\mathcal{U}_2) \circlearrowleft$$

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\boxtimes$

Definition 13.4 Eine Abbildung $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ heißt holomorph, falls für jeden holomorphen Atlas $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)$ gilt:

$$\varphi_i \circ f \circ \varphi_j^{-1} : \underset{\cap\ \mathbb{C}}{\varphi_j(f^{-1}(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{U}_j)} \to \underset{\cap\ \mathbb{C}}{\varphi_i(f(\mathcal{U}_j) \cap \mathcal{U}_i)}$$

ist HOLOMORPH.



⌈ Wir können Holomorphie nicht direkt auf $\mathbb{C}^* \cong S^2$ erklären. Wir verwenden Karten, die Teilbereiche von $\mathbb{C}^*$ mit offenen Gebieten in $\mathbb{C}$ identifizieren. Unter solchen Karten soll $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dann holomorph sein ⌋

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}^*) := \{ f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \mid \text{holomorph} \} \ni f$$

- <u>Fall 1:</u> $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) \in \mathbb{C}$, dann ist f an z_0 holomorph im üblichen Sinn.
- <u>Fall 2:</u> $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = \infty$. Wende Atlas $(\overset{\varphi_1}{\underset{\shortparallel}{id}}; \overset{\varphi_2}{\underset{\shortparallel}{1/z}})$ an

  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ist dann holom. an $z_0 \in \mathbb{C}$ und hat an z_0 eine ~~Polstelle~~ Nullstelle.
  Also ist z_0 eine Polstelle von f.

$$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*) \text{ ist meromorph auf } \mathbb{C}.}$$

- <u>Fall 3</u>: $z_0 = \infty$, $f(z_0) \in \mathbb{C}$. Wieder in $\{(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)\}$

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2(z) = f(1/z) \text{ holomorph an } z = 0$$

- <u>Fall 4</u>: $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(z) = \frac{1}{f(1/z)} \text{ holomorph an } z = 0.$$

Gleiches gilt auch für alle offenen $\mathcal{U} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^*$

$\mathcal{M}(\mathcal{U}) = \{ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}^* \mid f \text{ holomorph} \}$

Für $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ gilt:

- $f(z_0) \in \mathbb{C}$, dann ist f holom. in z_0
- $f(z_0) = \infty$, dann hat f eine Polstelle an z_0

$$\boxed{\text{Das heißt: meromorphe Funktionen auf } \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \text{ sind als Abbildungen nach } \mathbb{C}^* \text{ holomorph.}}$$

<u>Theorem 13.5</u> Jedes $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$ ist ein Quotient aus 2 komplexen Polynomen p, q

$$f = \frac{p}{q}$$

<u>Beweis:</u> Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$. ~~Betrachte Pole $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und Hauptteile~~ Insbesondere ist f meromorph auf $\mathbb{C}$.

Betrachte Polstellen von $f|_{\mathbb{C}}$: $\{z_1, .., z_n\} \subset \mathbb{C}$

mit Hauptteilen $f_j(z) = \sum_{k=-m_j}^{-1} a_{kj} (z - z_j)^k$, $j = 1, .., n$.

$$\Rightarrow \left(f - \sum_{j=1}^{n} f_j\right) =: g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$$

hat auf $\mathbb{C}$ keine Polstellen mehr!

Nun kann g aber ~~...~~ höchstens eine Polstelle an $\infty \in \mathbb{C}^*$ haben. Im Atlas $\{(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)\}$ ist

$$\varphi_2 \circ g \circ \varphi_2(z) = \frac{1}{g(1/z)} \text{ holom. an } z = 0$$

$\Leftrightarrow$ $g(1/z)$ hat am $z=0$ höchstens PST.

$\Leftrightarrow$ $|g(1/z)| \leq C |(1/z)|^m$ (m Ordnung der PST)

für $|z| \leq R$ ~~...~~ und eine Konstante $C > 0$

$\Leftrightarrow$ $|g(z)| \leq C |z|^m$ für $|z| \geq \frac{1}{R}$

Nach Satz von Liouville ist g ein Polynom.

Wir erhalten: $f = g + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=-m_j}^{-1} a_{kj} (z - z_j)^k$

~~Kleine Bemerkung der~~ "Partialbruchzerlegung" in Polynom + rationale Fkt.

Also ist f eine rationale Fkt (Quotient von Polynomen; einfach Brüche auf gleichen Nenner bringen). $\boxtimes$

§ 14. Der Residuensatz (Verallg. von Cauchy Integralsatz)

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ meromorph.

Definition 14.1 Das Residuum $\operatorname{Res}(f, z_0)$ von f an der Stelle $z_0 \in \mathcal{U}$ ist definiert durch ($\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset \mathcal{U}$)

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} f(z)\, dz$$

Falls $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurent-Entwicklung von f um z_0 ist, ergibt sich $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}$.

Lemma 14.2 (Ü)

1) Falls z_0 hebbar oder f an z_0 holomorph, dann gilt $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

2) Falls z_0 PST erster Ordnung, dann

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} [z - z_0] \cdot f(z) = [z - z_0] f(z) \Big|_{z = z_0}$$

3) Falls z_0 PST m-ter Ordnung, dann

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{(m-1)} (z - z_0)^m f(z) \Big|_{z = z_0}$$

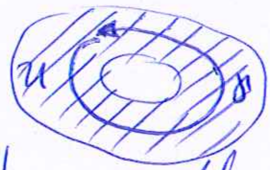
(Beachte: $(z - z_0)^m f(z)$ hat an z_0 eine hebbare Sing, also eine holomorphe Fortsetzung die beliebig oft abgeleitet werden kann).

in $\mathcal{U} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

Theorem 14.3 "Residuensatz"

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ mit Polstellen an $\{z_1, \dots, z_n\}$.
Sei γ ein geschlossener Weg, der sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt (innerhalb von $\mathcal{U}$!)
Seien $\eta(\gamma, z_j)$ die Umlaufzahlen von γ um die jeweiligen Polstelle.

d.h.



ist ausgeschlossen.

Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \eta(\gamma, z_j) \operatorname{Res}_{z_j}$$

Beweis:

Übersicht über den bisherigen Stoff / Wiederholung

I. Komplexe Diffbarkeit und holomorphe Funktionen

$f: \mathcal{U} \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, ist reell-diffbar an z_0

Dann ist f komplex-diffbar an z_0 falls:

$\to$ $Df(z_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{C}$ - linear

$\to$ $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert

$\to$ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(z_0) = 0$

f ist holomorph auf $\mathcal{U}$ falls es in jedem $z_0 \in \mathcal{U}$ komplex-diffbar ist.

Frage: Welche weitere äquivalente Charakterisierung fehlt in der obigen Liste? (Cauchy-Riemann DGL

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$)

II. Komplexe Potenzreihen und Konvergenzradius

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

konvergiert absolut (dh. Summe der Beträge $\sum |a_n (z - z_0)^n|$ ist endlich) auf dem offenen Konvergenzkreis $B_R(z_0)$

$$R \text{ Konv-Radius} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Frage: Muss $\sqrt[n]{|a_n|}$ einen eindeutigen Grenzwert haben? (Nein. Eigentlich ist $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$)

- Komplexe Potenzreihen sind auf ihrem offenen Konvergenzkreis holomorph und haben Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}$ mit dem gleichen Konv-Radius.

- Jede holomorphe Funktion $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ kann lokal in eine kplxe Potenzreihe entwickelt werden! Dh für jeden $z_0 \in \mathcal{U}$ ex. $R > 0$ so dass $B_R(z_0) \subset \mathcal{U}$ (R kann maximal gewählt werden) und $f|_{B_R(z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

<u>Frage:</u> Mit Hilfe von welchem Satz beweist man den obigen Potenzreihenentwicklungssatz? (Cauchy-Integralformel)

III. Cauchy-Integralsatz

G – offen, Sterngebiet, γ – geschlossener stetiger Weg in G.
Δ – geschlossenes Dreieck in G.

~~[illegible]~~

$$\left(f: G \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\right) \underset{\text{Morera.}}{\overset{\text{Cauchy}}{\rightleftarrows}} \left(\int_{\partial\Delta} f = 0 \text{ für alle } \Delta \subset G\right)$$

- <u>Cauchy:</u> Es kann noch $\int_\gamma f = 0$ gefolgert werden, dh die Wege müssen nicht unbedingt Dreiecke sein.
- <u>Morera:</u> G muss keine Sterngebiet sein. Offen reicht.

<u>Frage:</u> Besitzt jede holomorphe Fkt eine Stammfkt?
(Auf Sterngebieten ja; auf zB $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nein:
zB besitzt ~~[illegible]~~ $1/z$ auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfkt,
die Stammfkt $\log_\alpha(z)$ ex. immer nur auf geschlitzten
Ebenen $\mathbb{C}_\alpha$)

IV. Cauchy-Integralformel und Potenzreihenentwicklung

- Sei γ geschlossener Weg in einem Sterngebiet G.
  $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $z \in G$

$$n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

($n(\gamma, z)$ – Windungszahl von γ um z)

- $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset G$.
  Dann $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \frac{R}{2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$
  mit Konv-Radius $\tilde{R} \geq R$.

V. Weitere Anwendungen des Cauchy-Integralsatzes

<u>Identitätssatz:</u> U offen, zusammenhängend, $f, g: U \to \mathbb{C}$ holom.

- $f(z_n) = g(z_n)$ für $z_n \to z \in U$
- $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial z^{(n)}}(z_0) = \frac{\partial^{(n)} g}{\partial z^{(n)}}(z_0)$ für ein $z_0 \in U$, alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Leftrightarrow f \equiv g.$$

<u>Frage:</u> Gilt der Satz auch wenn U <u>NICHT</u>
zusammenhängend ist? (nein)

Satz von Liouville: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom, $|f(z)| \leq C \cdot |z|^N$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grad N.

Frage: Was gilt im Spezialfall, dass f beschränkt ist (dann ist f konstant)

VI. Isolierte Singularitäten

Sei $\mathcal{U}$ offen und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ isolierte Singularität / Isolierter Punkt (dh $B_\varepsilon(z_0) \subset \mathcal{U} \cup \{z_0\}$). Falls $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{"Laurentreihe"}$$

- $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ – "Hauptteil"
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ – "Nebenteil"
- Reihe konv. auf $\{r \leq |z - z_0| < R\}$ gleichmäßig.

Klassifikation der isolierten Singularitäten: (äquiv. Charakterisierungen)

- hebbar: Hauptteil $\equiv 0$ / f holomorph nach z_0 fortsetzbar / f beschränkt
- Polstelle: Hauptteil endlich viele Summanden / $(z - z_0)^n f(z)$ hat hebbare Sing / $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
- wesentlich: Hauptteil unendlich viele Summanden / $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ existiert nicht / $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.

<u>Meromorphe Funktionen</u>: wesentliche Sing. ausgeschlossen.

<u>Frage</u>: Warum schließen wir wesentliche Sng aus?
(damit $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ zu einem Körper wird).