Beispiele von Komplexen Potenzreihen

- Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(R=\infty)$

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

- Sinusfunktion: $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(R=\infty)$

  Cosinusfunktion: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $(R=\infty)$

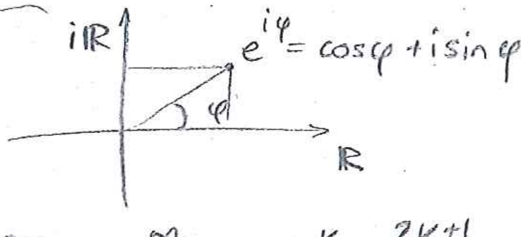
$$\frac{\partial \sin(z)}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n+1) \cdot z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos(z)$$

; $\boxed{\text{auf } \mathbb{C} \text{ sind sin/cos NICHT beschränkt!}}$

- Beziehung zwischen e^{iz} und sin/cos:

  Erinnerung: Polardarstellung:



$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{\substack{n=2k \\ k=0}}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{\substack{n=2k+1 \\ k=0}}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos z + i \sin z.$$

- Logarithmus: $\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$, $(R=1)$

$$\frac{\partial \log z}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cancel{n} (z-1)^{n-1}}{\cancel{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z-1)^n$$

$$= (\text{geom. Reihe}) \ \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z}.$$

§ Analytische Funktionen

Wir haben bisher gesehen:

- Potenzreihen sind holomorph auf ihrem Konvergenzkreis
- Holomorphe Funktionen lassen sich in komplexe Potenzreihen entwickeln (exp, sin, cos, log)

Das ist kein Zufall!

<u>Definition 4.7</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ heißt KOMPLEX ANALYTISCH, falls für alle $z_0 \in U$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf einer Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0) \subset U$ existiert. Dh: kplx. analytische Fkt lassen sich <u>LOKAL</u> in kplxe Potenzreihen entw.

<u>Theorem 4.8</u> Für eine Fkt $f: U \to \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) f ist holomorph auf U

(b) f ist komplex-analytisch auf U.

<u>Beweis:</u> (b) $\Rightarrow$ (a) denn wir haben bewiesen, dass komplexe Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis holomorph sind.

(a) $\Rightarrow$ (b) wird sich erst aus dem nächsten Abschnitt ergeben

◪

§ 4. Der Cauchy'sche Integralsatz

Definition 4.1 Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen

(i) Integrationsweg γ in $\mathcal{U}$ ist eine stetige, stückweise stetig diffbare Abb $\gamma: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, dh es existiert eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

so dass $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig diffbar ist, $i = 0, \dots, n-1$.

(ii) Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ stetig. Das Kurvenintegral (Wegintegral) von f entlang γ ist definiert als:

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Beispiele 4.2

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$; $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{0\})$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \underbrace{(e^{it})'}_{= ie^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{e^{it}}{e^{it}}}_{=1} dt = 2\pi i$$

(b) $f(z) = f(x+iy)$; $\gamma(t) = t \in [a,b]$ $(\mathcal{U} = \mathbb{C})$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(t) \underbrace{(t)'}_{=1} dt = \int_a^b f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

(Wegintegral reduziert sich auf $\mathbb{R}$-Integral)

Satz 5.3 (Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Kurvenparametrisierung)

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma: [a,b] \to U$ stetig; stückweise stetig diffbar.

(i) Sei $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ stetig, monoton wachsend, stückweise stetig diffbar. Dann ist $\gamma \circ \varphi: [c,d] \to U$ eine neue Parametrisierung desselben Weges und

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz$$

(ii) Sei $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ wie oben, aber monoton fallend, d.h. der Weg γ wird entgegengesetzt durchlaufen, und

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz.$$

Beweis: Wir lassen "stückweise" weg. Allgemeiner Fall (ii).

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\,[\gamma(\varphi(t))]'\,dt$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\cdot\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitutionsregel}}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \cdot \underbrace{(\operatorname{sign}\varphi')}_{\substack{= \begin{cases} 1, & \text{falls mon. wachs.} \\ -1, & \text{falls mon. fallend}\end{cases}}}$$

$$= (\operatorname{sign} \varphi') \cdot \int_{\gamma} f(z)\, dz. \qquad \boxtimes$$

Satz 9.4 (Fundamentalungleichung für Kurvenintegrale)

$$\left| \int_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leq \text{Länge}(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

wobei die Kurvenlänge $\text{Länge}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ ist.

Beweis: $$\left| \int_{\gamma} f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\leq \left(\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \right) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

$$= \text{Länge}(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)| \qquad \boxtimes$$

Satz 9.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Kurvenintegrale)

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma: [a,b] \to \mathcal{U}$ ein Integrationsweg. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Insbesondere gilt auf geschlossenen Int-Wegen $(a=b)$

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, dz = 0.$$

Beweis: Beachte folgende Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, dz = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t))\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

$\boxed{\text{q}}$

Frage: Wir haben gezeigt, dass für geschlossene γ

$\int_\gamma F(z)\, dz = 0$, falls $F(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$, dh

falls $F(z)$ eine holomorphe Stammfkt besitzt.

Gilt vielleicht $\int_\gamma F(z)\, dz = 0$ immer?

dh: Besitzt F vllt immer eine Stammfunktion?

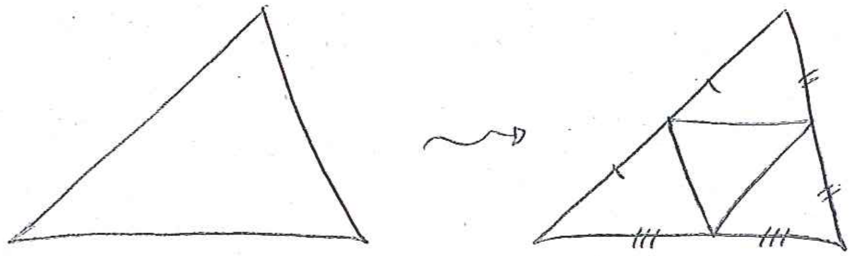
Theorem 5.6 (Cauchy-Integralsatz für Dreiecke)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$

$$\int_{\partial\Delta} f(z) = 0$$

[In der Tat gilt die Aussage auch für den Fall, dass Holomorphie auf endlich vielen Ausnahmepunkten in U durch Stetigkeit abgeschwächt wird]

Beweis: Jedes Dreieck $\Delta \subset U$ lässt sich wie folgt zerlegen:



Wir beschreiben die Folge von immer kleiner werdenden Dreiecken mit $(\Delta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$; $\Delta = \Delta_0$ wobei es gilt

(i) $\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right|$

(ii) $\text{Länge}(\partial\Delta_n) \leq 2^{-n}\,\text{Länge}(\partial\Delta)$

(iii) $\text{diam}(\Delta_n) \leq \text{Länge}(\partial\Delta_n) \leq 2^{-n}\,\text{Länge}(\partial\Delta) \to 0$

(iv) wegen Kompaktheit, gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{z^*\}$

---

f in z^* komplex diffbar, also

$$f(z) = f(z^*) + \frac{\partial f}{\partial z}(z^*)(z-z^*) + R(z,z^*)$$

mit $\lim_{z\to z^*} \frac{|R(z,z^*)|}{|z-z^*|} = 0$.

Der polynomielle Anteil $f(z^*) + \frac{\partial f}{\partial z}(z^*)(z-z^*)$ besitzt offensichtlich Stammfkt $f(z^*)(z-z^*) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}(z^*)(z-z^*)^2$

Wir wenden Satz 4.5 auf den polynomiellen Anteil an:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int_{\partial\Delta_n} \left[f(z^*) + \frac{\partial f}{\partial z}(z^*)(z-z^*) \right] dz = 0$$

Nun können wir abschätzen: $\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right|$

$$\leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} (z-z^*) \cdot \frac{R(z,z^*)}{(z-z^*)}\, dz \right|$$

$$\leq 4^n \cdot \text{Länge}(\partial\Delta_n) \cdot \text{diam}(\Delta_n) \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n} \left| \frac{R(z,z^*)}{(z-z^*)} \right|$$

$$\overset{(ii),(iii)}{\leq} \text{Länge}(\partial\Delta_n)^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n} \left| \frac{R(z,z^*)}{(z-z^*)} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

denn $z \in \partial\Delta_n$ für $n \to \infty$ goes to $z \to z^*$.

Theorem 5.7 (Cauchy-Integralsatz für $*$-Gebiete)

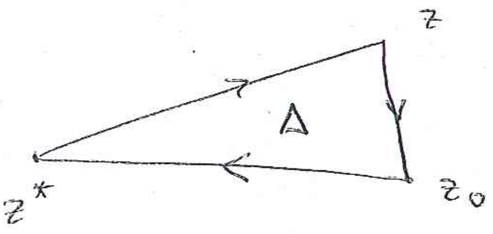
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Sternförmiges Gebiet, dh. es existiert $z^* \in U$, so dass für alle $z \in U$ die geradlinige Verbindung $[z^*, z]$ vollständig in U liegt.

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion und für alle geschlossenen Wege γ in U.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

[Aussage gilt auch für f nicht kplx diffbar, sondern nur stetig an endlich vielen Ausnahmepunkten]

Beweis: Setze $F(z) := \int_{[z^*, z]} f(\xi)\, d\xi$



$$F(z) - F(z_0) = \underbrace{\cancel{\int_{\partial\Delta} f(\xi)\, d\xi}}_{\substack{= 0 \text{ nach} \\ \text{Thm } 5.6.}} + \int_{[z_0, z]} f(\xi)\, d\xi$$

Daraus folgt:

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} \big(f(\xi) - f(z_0)\big)\, d\xi \right|$$

$$\leq \sup_{\xi \in [z_0, z]} |f(\xi) - f(z_0)| \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

Wir haben bewiesen, dass F holomorph ist, $\frac{\partial F}{\partial z} = f$.
Das heißt f besitzt eine Stammfkt., und nach Satz 5.5:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

$\boxtimes$

Bsp von S. 35 vorschieben

§ Konsequenzen aus dem Cauchy Integralsatz

- Homotopie von Integrationswegen
- Cauchy'sche Integralformel für Sterngebiete
- Potenzreihenentwicklung holomorpher Fkt.

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{z}$ definiert auf $\mathbb{C}\setminus\{0\} = U$.

- $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph
- aber $\int_{\partial B_1(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \neq 0$ nach Bsp 5.2

→ Warum Thm 5.7 nicht anwendbar?

→ Antwort: Weil $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ kein Sterngebiet ist.

§ Homotopie von Integrationswegen

Lemma ~~Thm~~ 5.8 Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$ zwei Integrationswege, mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
$\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$

Falls $f: U \to \mathbb{C}$ auf einer sternförmigen Umgebung von V holomorph ist, gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Beweis: Sei $\gamma = \gamma_0 - \gamma_1$ ein geschlossener Integrationsweg.

$$\int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma} f = 0$$

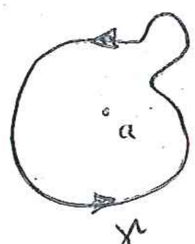
↳ nach Cauchy-Intsatz für Sterngebiete. ☐

⌈ Allgemeine Aussage (ü) ⌋

§ Cauchy Integralformel für Sterngebiete

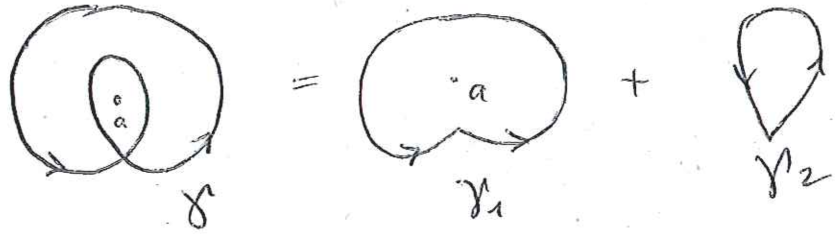
<u>Definition 5.9</u> Umlaufzahl einer Kurve γ um $a \in \mathbb{C}$

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

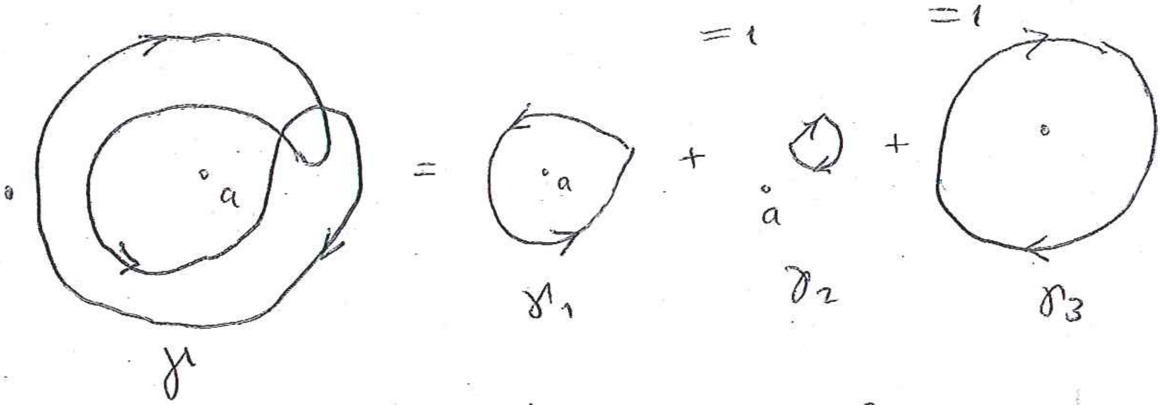


$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{\partial B_\varepsilon(a)} \frac{dz}{z-a} = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{dz}{z} \overset{\text{Bsp 5.2}}{=} 2\pi i$$

$$\Rightarrow n(\gamma, a) = 1$$



$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2}}_{=1} = 2$$



$$n(\gamma, a) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3}}_{=-1} = 0$$

da gegen Uhrz.   da a draußen   da im Uhrz.-Sinn

$\Rightarrow$ $n(\gamma, a)$ zählt in der Tat wie oft sich γ um $a \in \mathbb{C}$ herumwindet.

<u>Satz 5.10</u> Sei $\gamma: [a,b] \to \mathcal{U}$ ein geschl. Intweg innerhalb eines Sterngebiets $\mathcal{U}$. Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holom.
Dann gilt für $z_0 \in \mathcal{U}$

$$\boxed{n(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz}$$

<u>Beweis:</u> Setze $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ \partial f/\partial z (z_0), & z = z_0 \end{cases}$

g ist auf $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ holom. und in z_0 stetig.
Cauchy-Integralsatz lässt sich auf Fkt anwenden, die
→ bis auf endlich viele Ausnahmepkte holomorph
→ ansonsten aber stetig sind.

$$\Rightarrow 0 = \int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \cdot \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}$$

$$= \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \cdot n(\gamma, z_0) \cdot 2\pi i$$

$\square$