Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 6

Aufgabe 22 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie: Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

i) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B_1(0)$

ii) $|f'(0)| \leq 1$

Mithin folgt aus Gleichheit in einer der beiden Ungleichungen, dass f eine Rotation ist.

Aufgabe 23 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie:

a) Ist f eine ganze Funktion und gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, dass $|f(z)| \geq \frac{1}{1+|z|^n}$, so ist f konstant.

b) Ist $R(z)$ eine rationale Funktion (d.h. Quotient zweier komplexer Polynome) auf $\mathbb{C}$, so gibt es eine eindeutige Darstellung von R als

$$R(z) = P(z) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}(z - z_i)^{-j},$$

wobei P ein komplexes Polynom ist, R die Polstellen z_i der Vielfachheit r_i besitze und die a_{ij} komplexe Koeffizienten sind.

Aufgabe 24 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und geben Sie im Falle einer Polstelle die Ordnung an:

a) $\frac{e^z-1}{z}$

b) $\frac{e^z-1}{z^2}$

c) $\frac{1}{\cos(z)}$

d) $\frac{\sin(z)(z^2-iz+z^3)}{(1+i)z^3+z^4+z}$

e) $\frac{z}{e^z-1}$

Aufgabe 25 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie für $a \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-a}$. Geben Sie die Laurentreihe von f an auf

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |b - z| < |a - b|\}$ für $b \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |b - z| > |a - b|\}$ für $b \in \mathbb{C}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 4. Dezember 2015, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.