Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 1

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ vermöge der eingeführten Addition und komplexer Multiplikation einen Körper bilden.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $z \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{i}(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}$

b) Betrachten Sie $z = 2 + i$. Überprüfen Sie die Formeln für Real- und Imaginärteil geometrisch, in dem Sie z in ein Koordinatensystem eintragen und die Vektoren $\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$ zeichnerisch konstruieren.

c) Schreiben Sie folgende komplexen Zahlen in der Form $a + ib$:
i) $\frac{4}{2+3i}$ ii) $\frac{1}{\sin(t)-i\cos(t)}$ iii) $e^{i2\pi}$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen:

a) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}$

b) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$

c) $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z))\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z))\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z)$. Wie sieht die analoge Gleichung für $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}}$ aus?

Berechnen Sie anschließend $\frac{\partial |z|^2}{\partial \bar{z}}$ mittels a), b) und c).

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie das totale Differential von f auf $\mathbb{C}$-Linearität in Abhängigkeit von $z_0 \in \mathbb{C}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 30. Oktober 2015, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude. Die Briefkastennummern und Räume für die Übungsgruppen werden noch auf der Webseite bekanntgegeben.