§ 17. Die Indexform, die 2-te Variationsformel

$$\text{Längenfunktional } L(\gamma) = \int_a^b g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))^{1/2}\, dt$$

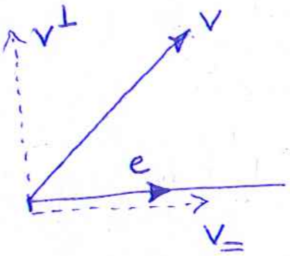
- $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) = 0$ für γ_0 - Geodätische.

  d.h. Geodätische sind kritische Punkte des Längenfunktionals.

- $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) \gtrless 0$? für γ_0 - Geodätische.

  d.h. ist eine Geod. Min / Max / Sattelpunkt des Längenfunktionals?

Definition 17.1



$\|e\| = 1$, dann gilt:

$v_= := \langle v, e\rangle e$

$v^\perp := v - \langle v, e\rangle e$

Für eine nach Bogenlänge param. Kurve $\gamma(t)$ $(\|\dot\gamma\| \equiv 1)$ und ein Vektorfeld $V(t)$ entlang von $\gamma(t)$, setze

$$V^\perp(t) := V(t) - \langle V(t), \dot\gamma(t)\rangle \cdot \dot\gamma(t)$$

Es gilt dann:

$$\| V^\perp(t)\|^2 = \|V(t)\|^2 - \langle V(t), \dot\gamma(t)\rangle^2 \quad (*)$$

Satz 17.2 (2-te Variationsformel)

Sei γ ~~Kurve~~ : $[a,b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und $\alpha: \underset{s}{(-\varepsilon, \varepsilon)} \times \underset{t}{[a,b]} \to M$ eine diffbare Kurvenschar mit $\alpha_{s=0}(t) = \gamma(t)$. Dann ist $L(\alpha_s)$ in s 2-mal diffbar und es gilt:

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s) = \left\langle \left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)(0,t); \dot\gamma(t) \right\rangle \Big|_{t=a}^{t=b}$$

$$+ \int_a^b \left\| \left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)(0,t)^{\perp} \right\|^2 - \left\langle R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t); \dot\gamma(t)\right)\dot\gamma(t); \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t) \right\rangle dt$$

wo $R(\cdot,\cdot)\cdot$ der Riemannsche Krümmungstensor ist.

<u>Beweis:</u> Wir schreiben $X_\alpha(t) := \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$.

Aus dem Beweis der 1. Variationsformel ergibt sich:

$$\frac{d}{ds} L(\alpha_s) = \int_a^b \frac{1}{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(s,t)\right\|} \left\langle \left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)(s,t); \frac{\partial\alpha}{\partial t}(s,t) \right\rangle dt$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \left\{ \frac{1}{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|} \cdot \left\langle \left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right); \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\rangle \right\} dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \left\{ \frac{1}{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|} \right\}} \cdot \left\langle \left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)(s=0,t); \frac{\partial\alpha}{\partial t}(s=0,t) \right\rangle dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t); \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t) \right\rangle \cdot 2}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t)\right\|^3}}_{\text{äußere Abl}}$$

$$+ \int_a^b \frac{1}{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t)\right\|} \cdot \underbrace{\frac{d}{ds}\Big|_0 \left\langle \left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right); \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\rangle}$$

$$= \left(\text{nutze aus } \frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t} \overset{\text{ii}}{=} \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)$$

$$\left\langle \frac{D}{\partial s}\Big|_0 \left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right); \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t) \right\rangle$$

$$+ \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t); \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t) \right\rangle$$

Beachte: $\alpha(s=0,t) = \gamma(t)$;
γ – nach Bogenlänge parametrisiert, dh $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t)\right\| = \|\dot\gamma(t)\| \equiv 1$.

$$= \underbrace{\qquad\qquad}_{}$$

$$= \| \tfrac{D}{\partial t} X_\alpha(t)^\perp \|^2 \text{ wegen } (*)$$

$$\Rightarrow = \int_a^b - \langle \tfrac{D}{\partial t} X_\alpha(t); \dot\gamma(t) \rangle^2 + \| \tfrac{D}{\partial t} X_\alpha(t) \|^2 + \langle \tfrac{D}{\partial s}\Big|_0 \left(\tfrac{D}{\partial t} \tfrac{\partial\alpha}{\partial s} \right), \dot\gamma(t) \rangle \, dt.$$

Nebenrechnung: Für jedes VF $X(s,t) = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(s,t)}$ entlang von α (in einer Kartenumgebung $(\mathcal{U}, x)$ mit $\mathrm{Bild}(\alpha) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$):

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \underset{\uparrow}{=} \frac{D}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \partial_{x_i} + \xi_i \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} \partial_{x_i} \right\}$$

$$\frac{D}{\partial t} (\xi_i \partial_{x_i}) = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \partial_{x_i} + \xi_i (\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} \partial_{x_i}) \quad \text{ü}$$

und analog für $\frac{D}{\partial s}$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial s \partial t} \partial_{x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}} \partial_{x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} \partial_{x_i}}_{\text{symmetrisch in } t \text{ und } s.} + \xi_i \underbrace{\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} \partial_{x_i}}$$

$$R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right) \partial_{x_i} = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} \partial_{x_i} - \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}} \partial_{x_i} - \nabla_{\underbrace{\left[\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right]}_{=0}} \partial_{x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \xi_i R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right) \partial_{x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X + R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right) X$$

$$\Rightarrow \langle \frac{D}{\partial s}\Big|_0 \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial\alpha}{\partial s} \right)(s,t); \dot\gamma(t) \rangle = \langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t); \dot\gamma(t) \rangle$$

$$+ \langle R(\underset{\substack{\| \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)}}{X_\alpha(t)}; \underset{\substack{\| \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,t)}}{\dot\gamma(t)}) X_\alpha(t); \dot\gamma(t) \rangle$$

Wir nutzen aus:

a) $\langle R(\cdot,\cdot) W, Z \rangle \overset{\text{ü}}{=} - \langle W, R(\cdot,\cdot) Z \rangle$

b) $$\frac{d}{dt} \langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t); \dot\gamma(t) \rangle = \langle \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t) \right); \dot\gamma(t) \rangle$$
$$+ \langle \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t); \underbrace{\frac{D}{\partial t} \dot\gamma(t)}_{=0, \text{ da Geodät.}} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s) = \int_a^b + \left\| \frac{D}{\partial t} X_\alpha(t)^\perp \right\|^2 + \left\langle \frac{D}{\partial s}\Big|_0 \left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right), \dot\gamma(t) \right\rangle$$

$$= \int_a^b + \left\| \frac{D}{\partial t} X_\alpha(t)^\perp \right\|^2 + \frac{d}{dt}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t); \dot\gamma(t) \right\rangle - \langle R(X_\alpha, \dot\gamma)\dot\gamma, X_\alpha \rangle$$

$$= \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t); \dot\gamma(t) \right\rangle \Big|_a^b$$

$$+ \int_a^b \left\| \frac{D}{\partial t} X_\alpha(t)^\perp \right\|^2 - \langle R(X_\alpha(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t); X_\alpha(t) \rangle \, dt.$$

$\boxtimes$

Motiviert durch die 2-te Variationsformel, definieren wir:

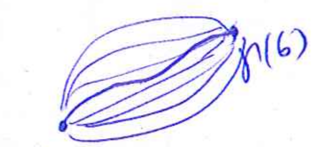
<u>Definition 17.3</u> Sei $\gamma: [a,b] \to M$ eine diffbare Kurve. Die symmetrische Bilinearform

$$I_\gamma : \Gamma_\gamma(M) \times \Gamma_\gamma(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X(t), Y(t)) \longmapsto \int_a^b \left\langle \frac{DX}{\partial t}(t); \frac{DY}{\partial t}(t) \right\rangle - \langle R(X(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t), Y(t) \rangle \, dt.$$

heißt "<u>die Indexform von γ</u>".

<u>Satz 17.4</u> Betrachte das Setup von Satz 17.2 mit $\alpha_s(a) \equiv \gamma(a)$; $\alpha_s(b) \equiv \gamma(b)$ (d.h. Endpunkte sind fix; α_s ist "<u>eigentliche</u>" Variation von der Geod $\gamma = \alpha_0$)



Dann gilt:

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s) = I_\gamma(X_\alpha^\perp(t); X_\alpha^\perp(t)).$$

<u>Beweis:</u> $\left.\begin{array}{l}\alpha_s(a) \equiv \gamma(a) \\ \alpha_s(b) = \gamma(b)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s;a) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s;b) = 0.$

damit verschwinden die Randterme in der 2. Variationsformel.

Für jedes $X \in \Gamma_\gamma(M)$ gilt:

$$\frac{D}{\partial t} X(t)^\perp = \frac{D}{\partial t}\left(X(t) - \langle X(t); \dot\gamma(t) \rangle \dot\gamma(t) \right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{D}{\partial t} X(t) - \left\langle \frac{D}{\partial t} X(t); \dot\gamma(t) \right\rangle \dot\gamma(t)$$

$\frac{D}{\partial t} \dot\gamma(t) \equiv 0$

$$= \left(\frac{D}{\partial t} X(t) \right)^\perp.$$

Es gilt auch $\langle R(X_\alpha(t); \dot\gamma(t))\dot\gamma(t); X_\alpha(t) \rangle$

$$\underset{\text{Ü}}{=} \langle R(X_\alpha(t)^\perp; \dot\gamma(t))\dot\gamma(t); X_\alpha^\perp(t) \rangle.$$

nachrechnen. Damit folgt die Formel direkt. ☑

<u>Korollar 17.5</u> Sei (M,g) eine Riem. Mfk mit nicht-positiver Schnittkrümmung. Sei α_s eine eigentliche Variation einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $\gamma \equiv \alpha_0$, so dass $X_\alpha^\perp = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t)\right)^\perp \not\equiv 0$. Dann gilt:

$$\boxed{\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} L(\alpha_s) > 0}$$

dh Geodätische ist lok. Minimum des Längenfunktionals.

<u>Beweis:</u> Erinnerung:

Schnittkrümmung der von X, Y aufgespannten Ebene

$$K(X,Y) := \frac{\langle R(X,Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle}$$

$$\leadsto K(X_\alpha^\perp, \dot\gamma) = \frac{\langle R(X_\alpha^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma; X_\alpha^\perp \rangle}{\|X_\alpha^\perp\|^2 \cdot \|\dot\gamma\|^2 - \langle X_\alpha^\perp, \dot\gamma \rangle}$$

Per Konstruktion: $\langle X_\alpha^\perp, \dot\gamma \rangle \equiv 0$

$$\Rightarrow K(X_\alpha^\perp, \dot\gamma) \leq 0 \text{ impliziert } \langle R(X_\alpha^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma, X_\alpha^\perp \rangle \leq 0$$

dann: $$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s) = \int_a^b \underbrace{\left\| \frac{D}{dt} X_\alpha(t)^\perp \right\|^2}_{\not\equiv 0} - \underbrace{\langle R(X_\alpha^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma, X_\alpha^\perp \rangle}_{\leq 0} \, dt$$

$$\underset{\neq}{>} 0 . \qquad \boxed{\checkmark}$$

Bezug zu Jakobi-Feldern und Sattelpunkte des Funktionals

Wir erinnern uns: Sei γ Geod; $X(t) \in \Gamma_\gamma(M)$.

- X heißt Jakobi-Feld falls $\frac{D^2}{dt^2} X(t) + R(X(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t) \equiv 0$
- äquivalent: X Jakobi-Feld, falls eine (nicht-unbedingt eigentliche) Variation α_s von γ ex. s.d $X(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t)$ und alle Kurven α_s Geodätische sind ("geod. Variation")

Sei $Y \in \Gamma_\gamma(M)$ mit $Y(a) = Y(b) = 0$.

Dann gilt: $$\left\| \frac{D}{\partial t} Y \right\|^2 = \frac{d}{dt} \langle Y, \frac{D}{\partial t} Y \rangle - \langle Y, \frac{D^2}{\partial t^2} Y \rangle$$

$$\Rightarrow I_\gamma(Y,Y) = -\int_a^b \langle \frac{D^2}{dt^2} Y(t) + R(Y(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t) ; Y(t) \rangle \, dt$$

Wir folgern:

Beobachtung 17.6

Falls X Jakobi-Feld mit $X(a) = X(b) = 0$ d.h. es kommt von einer eigentlichen geodätischen Variation α_s, dann

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s) \equiv 0$$ [trivial: Geod. nicht isoliert, dann haben wir Sattelpkt des Längenfunktionals.]

§18. Anwendungen der 2. Variationsformel

Lemma 18.1 Sei (M,g) eine kompakte Mfk, $\gamma: [0,1] \to M$ eine geschlossene Kurve die sich nicht stetig auf einen Pkt zusammenziehen lässt (nicht "nullhomotop" ist). Dann wird

$$\inf \{ L(c) \mid c: [0,1] \text{ geschlossen, zu } \gamma \text{ homotop} \}$$

durch eine geschlossene geodätische Kurve angenommen.

Beweis: Jeder Kurve $c: [0,1] \to M$ wird Energie zugeordnet:

$$E(c) := \frac{1}{2} \int_0^1 \| \dot{c}(t) \|^2 dt \overset{\text{CSU}}{\geq} \frac{1}{2} L(c)^2$$

Beachte: $E(c) = \frac{1}{2} L(c)^2$ gilt nur dann wenn $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1$.

M kpt $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall p \in M : \exp_p : B_\varepsilon(0) \to B_\varepsilon(p)$ Diffeo.

Sei $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ eine feste Unterteilg von $[0,1]$ mit $|t_i - t_{i-1}| < \delta$

$$\delta := \frac{\varepsilon^2}{8 C_1} \text{ für eine Konstante } C_1 . ?$$

$$E^{C_1} := \{ c: [0,1] \to M \mid c \text{ geschlossen, zu } \gamma \text{ homotop}; \; E(c) \leq C_1 \}$$

Dann gilt: $L(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t)\| dt$

$$\overset{\text{CSU}}{\leq} \sqrt{\int \|\dot{c}(t)\|^2} \cdot \sqrt{\int 1^2}$$

$$\leq \sqrt{2E(c)} \cdot \sqrt{t_{i+1} - t_i}$$

$$\leq \sqrt{2E(c) \cdot \delta} \leq \sqrt{2 \cancel{C_1} \cdot \frac{\varepsilon^2}{8 \cancel{C_1}}} = \frac{\varepsilon}{2} .$$

$\Rightarrow$ Für jedes $c \in E^{c}$ verläuft $c|_{[t_i, t_{i+1}]} \subset B_{\varepsilon}(c(t_i)) \underset{\exp_{c(t_i)}}{\overset{\uparrow}{\cong}} B_{\varepsilon}(0)$

Wir ordnen jedem $\sigma \in E^{c}$ nun eine gebrochene Geodätische $br(\sigma)$ zu mit: $br(\sigma)|_{t_i} = \sigma(t_i) \ \forall i = 0, \dots, K.$

$br(\sigma)|_{[t_i, t_{i+1}]}$ minimale Geod.

$$\text{Pkt}: br(E^{c}) \longrightarrow M^{K}$$
$$br(\sigma) \longmapsto (\sigma(t_0); \dots; \sigma(t_{K-1}))$$

ist injektiv, da die Punkte $(\sigma(t_i))$ die minimalen Geodätischen eindeutig festlegen.

$$\Rightarrow br(E^{c}) \underset{1:1 \text{ bij}}{\cong} \text{Pkt}(br(E^{c})).$$

- $\text{Pkt}(br(E^{c}))$ bildet eine kompakte Menge in M^{K}.
- $E: \text{Pkt}(br(E^{c})) \cong br(E^{c}) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ Energie

$$E(\sigma(t_0), \dots, \sigma(t_{K-1})) = \sum_i E(\sigma|_{[t_i, t_{i+1}]})$$
$$= \sum_i \frac{1}{2} \frac{d(p_i, p_{i+1})^2}{(t_{i+1} - t_i)}$$

Betrachte das Minimum von E auf $\text{Pkt}(br(E^{c}))$ wo $c > 0$ KEIN kritischer Wert von E auf M^{K} ist.

Dieses Minimum wird von einer Kurve σ angenommen, nach Bogenlänge param. s.d $E(\sigma) = \frac{1}{2} L(\sigma)$.

$\Rightarrow$ σ muss auch die Kürzeste sein, da sonst $E(\sigma)$ nicht min.

$\Rightarrow$ σ ist Geodätische $\in E^{c}$, homotop zu γ. $\boxtimes$

Theorem 18.2 (Synge 1936)

Sei (M^{2n}, g) kpte orientierbare Riem. Mfk mit positiver Schnittkrümmung. Dann ist M einfach zshg, dh es ex. keine nicht-nullhomotope geschlossene Kurve.

Beweis: Angenommen, es ex. doch eine nicht-nullhomotope geschlossene Kurve. Sei γ eine dazu homotope Geodätische (ex. nach Lemma 18.1). Betrachte Parallelversch: längenminimierende

$$P_\gamma : T_{\gamma(0)}M \longrightarrow T_{\underset{\underset{\gamma(0)}{\shortparallel}}{\gamma(1)}}M \qquad \text{dh. } \det P_\gamma > 0$$

- Isometrie
- orientierungserhaltend, da M orientierbar ist.
- $\frac{D}{\partial t}\dot{\gamma} = 0 \Rightarrow P_\gamma(\dot{\gamma}(a)) = \dot{\gamma}(b) = \dot{\gamma}(a)$

$\Rightarrow P_\gamma$ muss das $\langle \dot{\gamma}(a) \rangle^\perp \subset T_{\gamma(0)}M$ invariant lassen $\overset{!!}{=} W$.

und ist darauf wieder orientierungserh

(dh $\det P_\gamma \restriction W > 0$, da $P_\gamma \restriction W^\perp \equiv id$ und $\det P_\gamma > 0$)

$P_\gamma : W \to W$ ist also orthogonal ($P_\gamma^t P_\gamma = id$, dh P_γ ist Isometrie) und speziell orth (dh $\det P_\gamma > 0$ $(=+1)$ orient.erh)

$P_\gamma \restriction W \in SO(W \cong \mathbb{R}^{2n-1})$

$\Rightarrow$ da $\dim W$ ungerade, muss ein EV $v \in W$ ex mit $P_\gamma(v) = v$. (EW = 1)

Betrachte paralleles VF X_v (X_v = Parallelversch. von v entlang γ)

$\alpha(s,t) := \exp_{\gamma(t)}(s X_v(t))$; $\alpha(0,t) = \exp_{\gamma(t)}(0) \equiv \gamma(t)$

Dh. α_s ist Variation von γ.

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s) = \langle \left(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)(0,t), \dot\gamma \rangle \Big|_{t=a}^{t=b}$$

Kurve geschlossen

$= 0$, denn ~~[illegible]~~ also ~~[illegible]~~ fallen Randterme weg

$$+ \int_a^b \underbrace{\left\| \left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \alpha^\perp}{\partial s}\right)(0,t) \right\|^2}_{} - \underbrace{\langle R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t), \dot\gamma\right)\dot\gamma \, ; \, \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t) \rangle}_{} \, dt$$

$= 0$, denn $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t) = X_v$
$X_v^\perp \equiv X_v$ per Konstr-n
und $\frac{D}{\partial t} X_v \equiv 0$ da X_v
Parallelversch von v ist.

> 0 wegen
positiver Schnittkrümmung

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s) < 0 .$$

Aber wir haben vorausgesetzt, dass γ Längenminimierend ist
dh $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s) \geq 0$ ↯ $\square$

Bemerkung: Falls M^{2n} nicht als orientierbar vorausgesetzt wird, braucht M nicht mehr einfach zusammenhängend zu sein (dh $\pi_1(M^{2n}) \neq \{e\}$ iA), aber man kann daraus leicht folgern dass bei positiver Schnittkrümmung

$$|\pi_1(M^{2n})| = 2.$$

Theorem 18.4 (Bonnet-Meyers)
Sei (M^n, g), $n \geq 2$, eine geodätisch vollständige Riem. Mfk.
Falls $Ric(g) \geq \kappa \cdot (n-1) \cdot g$ $\{$dh $Ric_g(X,X) \geq k(n-1) g(X,X)$ für alle $X \in TM\}$ für $\kappa > 0$, so folgt:

$$\operatorname{diam}(M^n, g) := \sup\{ d_g(p,q) \,/\, p, q \in M^n \} \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

Insbesondere ist M^n kompakt.

Beweis: Seien $p, q \in M$, $p \neq q$. Nach Hopf-Rinow ex. Kürzeste $c : [0,L] \to M$ zwischen p, q mit $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1$, $L = d_g(p,q)$.

- ergänze $\dot{c}(0) = e_n \in T_pM$ zu einer ONB $\{e_1, \dots, e_n\}$
- seien $E_j(t)$ die Parallelverschiebungen von e_j entlang c.
- $X_j(t) := \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cdot E_j(t)$ Skalierungen von E_j

  so dass $X_j(0) = X_j(L) = 0$.
- Dann ist $\overset{j}{\alpha}_s(t) := \exp_{c(t)}(s \cdot X_j(t))$

  eine eigentliche Variation von $c(t) = \alpha_0(t)$.
- $\frac{\partial \alpha^j}{\partial s}(0,t) = X_j(t) \perp \dot{c}(t)$ für alle $t \in [0,L]$

  denn $E_j(0) = e_j \perp \dot{c}(0)$; $j = 1, \dots, n-1$.

Nach 2. Variationsformel (für eigentliche (!) Variationen) $\forall j = 1, \dots, n$:

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s^j) = \int_0^L \left\| \frac{D}{dt} X_j(t) \right\|^2 - \underbrace{\langle R(X_j(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), X_j(t)\rangle}\, dt$$

$$= \int_0^L \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) - \overbrace{\sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cdot K(E_j(t), \dot{c}(t))}\, dt$$

(denn $\|E_j(t)\| = \|e_j\| = 1$, $\frac{D}{dt} E_j \equiv 0$; K-Schnittkr.)

Summiere und nutze aus $\mathrm{Ric}(v,v) = \sum_j \langle R(e_j, v)v, e_j\rangle$
$= \sum_j K(e_j, v)$

für alle ONB's.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\alpha_s^j) = (n-1) \cdot \int_0^L \left(\frac{\pi}{L} \cos^2\left(\frac{\pi t}{L}\right)\right)^2 dt$$

$$- \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} K(E_j(t), \dot{c}(t))\, dt$$

da $K(E_n(t), \dot{c}(t)) = \langle R(E_n, \dot{c})\dot{c}, \dot{c}\rangle$

$$= \langle R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c}, \dot{c}\rangle = 0$$

$$\{ \langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle Z, R(X,Y)W\rangle \}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s^j) = (n-1)\cdot\int_0^L \left(\frac{\pi}{L}\cos^2\left(\frac{\pi t}{L}\right)\right)^2 dt - \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) \underbrace{Ric(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}_{\geq (n-1)k\cdot\|\dot{c}(t)\|^2} dt$$

$$\leq (n-1)\cdot\left\{ \int_0^L \frac{\pi^2}{L^2}\cos^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) - k\cdot\sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) dt \right\}$$

$$= (\text{nachrechnen}) \quad -(n-1)\left(k - \frac{\pi^2}{L^2}\right)\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi t}{L}\right) dt$$

Zzg: $\operatorname{diam}(M,g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Angenommen nein, so dass wir $L > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ annehmen können. Dann $\left(k - \frac{\pi^2}{L^2}\right) > 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s^j) < 0$$

$$\Rightarrow \exists j_0 \in \{1, \dots, n-1\} : \frac{d^2}{ds^2}\Big|_0 L(\alpha_s^{j_0}) < 0$$

$\Rightarrow \alpha_0^{j_0}(t) \equiv c(t)$ ist keine Kürzeste $\lightning$

$$\Rightarrow L \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} \Rightarrow \operatorname{diam}(M,g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}. \quad \boxtimes$$

Wir notieren den Starrheitssatz ohne Beweis:

Theorem 18.5 (Cheng)

Sei (M,g) mit $Ric \geq (n-1)kg$, $k>0$.

$$\operatorname{diam} M = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \Rightarrow (M,g) \text{ ist isometrisch zu } \left(S^n, \frac{1}{k} g_{std}\right)$$

§19. Der Satz von Cartan-Hadamard

Definition 19.1 Sei M wegzshgd Mfk. $\tilde{M}$ heißt Überlagerung von M, falls eine surjektive diffbare Abb $\pi: \tilde{M} \to M$ ex. s.d

$$\forall_{p \in M} \; \exists \underset{p \in \mathcal{U}}{\mathcal{U} \subset M} \text{ offen} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{j \in I} \tilde{\mathcal{U}}_j \, ;$$

- $\tilde{\mathcal{U}}_j$ offen, $\tilde{\mathcal{U}}_i \cap \tilde{\mathcal{U}}_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- $\pi|_{\tilde{\mathcal{U}}_j} : \tilde{\mathcal{U}}_j \to \mathcal{U}$ Diffeo für alle $j \in I$.

Beispiele 19.2 a) M überlagert M, $\pi = \mathrm{id}$

b) $\mathbb{R}$ überlagert $\mathbb{S}^1$, $\pi(x) = e^{ix}$, $I = \mathbb{Z}$.

Satz 19.3 (Cartan-Hadamard)

Sei (M^n, g) vollst. Riem. Mfk mit Schnittkrümmung $K \leq 0$. Dann ist die universelle Üb. ($\tilde{M}$ ist univ. Überl. falls $\tilde{M}$ wegzshg, einfach zshg) $\tilde{M}$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Sei $p \in M$, $\gamma: \mathbb{R} \to M$ Geod. mit $\gamma(0) = p$

$X^0_\omega(t)$ Jakobi-Feld längs γ mit $X^0_\omega(0) = 0$;

und $\frac{D}{dt}\Big|_{t=0} X^0_\omega = \omega \in T_pM$.

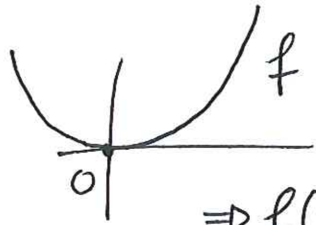
Setze $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{2}\langle X^0_\omega(t); X^0_\omega(t) \rangle$

Es gilt: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$. Und

$$f''(t) = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{dt} X^0_\omega(t), X^0_\omega(t) \right\rangle$$

$$= -\underbrace{\left\langle R(X^0_\omega(t); \dot{\gamma}(t))\, \dot{\gamma}(t); X^0_\omega(t) \right\rangle}_{\leq 0 \text{ da } K \leq 0} + \left\| \frac{D}{dt} X^0_\omega(t) \right\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow f$ konvex mit $f(0) = f'(0) = 0$



$\Rightarrow f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Falls $f(t_0) = 0$ für ein $t_0 > 0$ dann muss gelten $f|_{[0,t_0]} \equiv 0$ und insbesondere $X_\omega^0 \equiv 0$.

$\Rightarrow$ Nicht-triviale spez. Jakobi-VF X_ω^0 besitzen genau eine(!) NST in $t=0$ falls $K \leq 0$

$\Rightarrow$ Es ex. keine konjugierten Punkte längs γ ($\gamma(a) \sim_{conj} \gamma(b)$ falls Jakobi VF X ex so dass $X(a) = X(b) = 0$.)

$\Rightarrow$ $D\exp_p|_v : T_v(T_pM) \to T_{\exp_p(v)}M$ ist für alle $v \in T_pM$ ein linearer Isom-m., dh $\exp_p$ ist eine Immersion (Dexp besitzt genau dann keinen vollen Rang, wenn ein spez. Jakobi-VF X existiert s.d. $X(1) = 0$)

$\exp_p$ Immersion $\Rightarrow \hat{g} := \exp_p^* g$ ist Riem. Metrik auf T_pM. Die radialen Strahlen durch $0 \in T_pM$ sind Geod. in $(T_pM, \hat{g})$ die auf ganz $\mathbb{R}$ def. Hopf-Rinow $\Rightarrow (T_pM, \hat{g})$ vollständig.

- $(T_pM, \hat{g})$ vollständig
- $\exp_p : (T_pM, \hat{g}) \to (M, g)$ lokale Isometrie
- Die Behauptung folgt aus dem nachfolgenden Satz $\boxtimes$