Satz 8.6 Eine kompakte Mfk M^n kann in $\mathbb{R}^{n+k}$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ eingebettet werden, d.h. es ex. eine Immersion $f: M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, injektiv.

Beweis: Sei $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas auf M und $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ die subordinierte Zerlegung der 1, dh $\lambda_\alpha : U_\alpha \to [0,1]$ diffb. mit

- $\forall \alpha \in I: \ \overline{\operatorname{supp} \lambda_\alpha} \subset U_\alpha$
- $\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha(p) = 1$ für alle $p \in M$
  und die Summe ist punktweise endlich.

Setze die λ_α's mit Null trivial zu Funktionen auf M fort, und

$$f: M^n \to \mathbb{R}^{|I| \cdot (n+1)}$$
$$p \mapsto \Big(\underbrace{(\lambda_\alpha \cdot \varphi_\alpha(p))_{\alpha \in I}}_{n \cdot |I| - \text{Tupel}} ; \underbrace{(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}}_{|I| - \text{Tupel}} \Big)$$

- f ist offenbar diffbar
- f ist injektiv: sei $f(p) = f(q)$. Also $\lambda_\alpha(p) = \lambda_\alpha(q)$ für alle $\alpha \in I$. Außerdem ex. ein α_0 mit $\lambda_{\alpha_0}(p) = \lambda_{\alpha_0}(q) \overset{!}{\underset{\neq}{>}} 0$

$$(\lambda_{\alpha_0} \cdot \varphi_{\alpha_0})(p) = (\lambda_{\alpha_0} \cdot \varphi_{\alpha_0})(q)$$

$$\underset{\lambda_{\alpha_0}(p/q) \underset{\neq}{>} 0}{\Longrightarrow} \varphi_{\alpha_0}(p) = \varphi_{\alpha_0}(q) \Rightarrow p = q$$ da die Karten φ_{α_0} bijektiv sind.

- f <u>Immersion</u>: Sei $p \in M$ und $\alpha \in I$ s.d. $\lambda_\alpha(p) \neq 0$.

 $\lambda_\alpha(p) \cdot D\varphi_\alpha|_p$ ist eine Block-Komponente von $Df|_p$

 $D\varphi_\alpha|_p : T_pM^n \to T_{\varphi_\alpha(p)}\mathbb{R}^n$ ist Isomorphismus

 Daher $\lambda_\alpha(p) \cdot D\varphi_\alpha|_p$ Iso $\Rightarrow Df|_p$ injektiv. ☒

<u>Bemerkung</u>: Es gibt weitere wesentlich schwerer zu beweisende Einbettungssätze:

a) Whitney (1936): M^n ist diffeomorph zu einer n-dim. Untermfk von $\mathbb{R}^{2n+1}$.

b) Nash (1956): Jede n-dim. Riem. Mfk (M^n, g) kann isometrisch in $\mathbb{R}^{N(n)}$ eingebettet werden

$$N(n) = (n+1) \cdot \left(\tfrac{3}{2} n(n+1) + 4n\right).$$

<u>Korollar 8.7</u> $\boxed{\text{Jede Mfk } M \text{ besitzt eine Riem. Metrik } g}$

<u>Beweis</u>: Wegen Satz 8.6 ex injektive Immersion $f: M^n \to \mathbb{R}^N$.
Wegen Proposition 8.5 ist $f^* g_{\mathbb{R}^N}$ eine Riem. Metrik auf M.
($g_{\mathbb{R}^N}$ ist die Euklidische Metrik auf $T\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$;

$$g_{\mathbb{R}^N}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N \text{)}.$$

<u>Einige Beispiele Riemannscher Mfk</u>

a) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen; $g_{ij}: M \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq n$, sind diffbare Fkt s.d. für alle $p \in M$ $(g_{ij}(p))_{ij}$ positiv-definite

Matrix ist. Dann ist für $X, Y \in T_p\mathbb{R}^n$

$$g_p(X,Y) := \sum_{i,j=1}^{n} X_i Y_j g_{ij}(p)$$

$$X = (X_1, \ldots, X_n)^t$$
$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$$

eine Riem. Metrik.

b) $(M,g), (N,h)$ – Riem. Mfk.
Dann ist $(M \times N, g \times h)$ wieder eine Riem. Mfk.

- $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$
- $(g \times h)_{(p,q)}((X,Y),(V,W)) := g_p(X,V) + h_q(Y,W)$.

Wir können auf (M,g) Riem. Mfk nun Abstände definieren.
Damit wird M zu einem metrischen Raum.

Definition 8.8

vorher war das Intervall immer offen

- Eine Kurve $c : [a,b] \to M$ heißt diffbar, falls $\exists\, \varepsilon > 0$
$\exists\, \tilde{c} : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to M$ diffbar: $\tilde{c}|_{[a,b]} = c$.
(wir wollen sicherstellen, dass $\dot{c}(a)$, $\dot{c}(b)$ wohl-def. sind)
- Eine Kurve $c : [a,b] \to M$ heißt stückweise diffbar falls es eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ gibt so dass $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für $i = 1, \ldots, N$ diffbar ist.
- wir definieren die Kurvenlänge wie folgt:

$\to$ $c : [a,b] \to M$ diffbar: $L(c) := \int_a^b \underbrace{\|\dot c(t)\|_g}_{=: \sqrt{g_{c(t)}(\dot c(t), \dot c(t))}} dt$

$\to$ $c : [a,b] \to M$ stückweise diffb:

$$L(c) := \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot c(t)\| dt$$

$$= L(c|_{[t_{i-1}, t_i]}). \quad \text{Ü wohl-definiert.}$$

Lemma 8.9 Sei $f : (M^n, g) \to (N^n, h)$ diffbar.

f erhält Kurvenlängen $\Leftrightarrow$ f lokale Isometrie (Def 8.3)

(dh lokal $h(Df[X], Df[Y]) = g(X,Y)$).

Beweis: "$\Leftarrow$" ist klar per Def.

"$\Rightarrow$": Sei $c : [0, \varepsilon] \to M$ eine diffbare Kurve, $t \in [0, \varepsilon]$.

$$\int_0^t \|\dot c(s)\|_g ds = L(c|_{[0,t]}) \underset{\uparrow}{\overset{!}{=}} L(f \circ c|_{[0,t]}) = \int_0^t \|Df_{c(s)}[\dot c(s)]\|_h ds$$

f erhält Kurvenl. nach Voraussetzung

Nach Differentieren nach t $\Rightarrow$ $\|\dot c(0)\|_g = \|Df|_{c(0)}[\dot c(0)]\|_h$

$\Rightarrow$ $\|X\|_g = \|Df|_p[X]\|_h \quad \forall X \in T_pM.$

Dh f erhält die Länge von Tangentialvektoren.
Daher erhält f auch die Skalarprodukte!

(Frage ins Publikum: Warum? Aus der für alle Skalarprodukte gültigen Identität $\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$)

$\boxtimes$

Definition 8.10 Sei (M,g) eine Riem. Mfk.
Dann ist die Riemannsche Abstandsfunktion auf (M,g) wie folgt definiert:

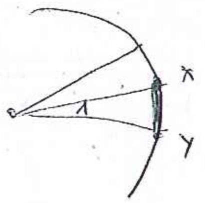
$$d_g : M \times M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
$$(p,q) \longmapsto \inf \{ L(c) \mid c \text{ stückweise diffbare Kurve die } p \text{ und } q \text{ verbindet} \}.$$

Falls die Menge leer ist, $\inf \emptyset = +\infty$.

<u>Beispiele:</u>

a) $\mathbb{R}^n$: $d_{g_{\mathbb{R}^n}}(x,y) = \| x-y \|_{g_{\mathbb{R}^n}}$

b) S^n mit der runden Std.-Metrik $g_{S^n} = g_{\mathbb{R}^{n+1}} \big|_{S^n}$



$$d_{g_{S^n}}(x,y) = \arccos\left(g_{\mathbb{R}^{n+1}}(x,y)\right)$$

a priori nicht wegzshg sonst Aussage trivial

<u>Lemma 8.11</u> Sei (M,g) zusammenhängende Riemannsche Mfk. Dann gilt für alle $(p,q) \in M \times M$:
$$d_g(p,q) < \infty$$

<u>Beweis:</u> Sei $p \in M$. Wir zeigen dass
$$\mathcal{U}(p) := \{ q \in M \mid \exists\, c \text{ stückw. diff. Kurve von } p \text{ nach } q \}$$
nichtleer und offen ist.

Sei (U, φ) Karte um p mit $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Klar: $U \subset \mathcal{U}(p)$. Für $m \in U$ setze $c(t) = \varphi^{-1}((1-t)\cdot\varphi(p) + t\cdot\varphi(m))$. Es liefert eine diffbare Kurve von p nach m
$$\Rightarrow \mathcal{U}(p) \neq \emptyset.$$

Sei nun $q \in \mathcal{U}(p)$, d.h. es ex c von p nach q.

Wähle eine Kartenumg. um q, $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\varphi})$; $q \in \tilde{\mathcal{U}}$.
Wie zuvor zeigt man $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}(p)$, also ist $\mathcal{U}(p)$ offen.
Genauso zeigt man, dass $M \setminus \mathcal{U}(p)$ offen ist
Da M zshg $M = \underbrace{\mathcal{U}(p)}_{\text{offen}} \,\dot\cup\, \underbrace{(M \setminus \mathcal{U}(p))}_{\text{offen}}$, und
$\mathcal{U}(p) \neq \emptyset \Rightarrow M \equiv \mathcal{U}(p)$. $\boxtimes$

<u>Satz 8.12</u> Sei (M,g) eine zshg. Riem. Mfk.
Dann definiert d_g eine Metrik auf M.
(M, d_g) wird zum metrischen Raum

Wir schließen das Kapitel mit einem Ausblick auf
Geodätische = Kürzeste Verbindungslinien ab:

<u>Definition 8.13</u> Sei (M,g) Riem. Mfk. ~~Seie~~
stückweise diffbare Kurve $c: [a,b] \to M$ mit
$c(a) = p$, $c(b) = q$ nennt man "<u>kürzeste Kurve</u>"
zwischen p und q, falls

$$d_g(p,q) = L(c).$$

§ 9. Die Levi-Civita Ableitung des Tangentialbündels

Definition 9.1 Sei M eine diffbare Mfk. Eine $\mathbb{R}$-bilineare Abb $\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ nennt man "kovariante Ableitung auf TM" falls

a) ∇ ist tensoriell in der ersten Komponente, dh

$$\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y \quad \text{für } X, Y \in \Gamma(TM),\ f \in C^\infty(M).$$

b) ∇ ist derivativ in der 2-ten Komponente, dh

$$\nabla_X fY = X(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y.$$

Definition und Satz 9.2

a) ∇ heißt torsionsfrei falls die Torsion verschwindet

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \overset{!}{=} 0$$

Ü Zeige T ist tensoriell in beiden Komponenten,

dh $T(fX, Y) = f \cdot T(X,Y)$

$T(X, fY) = f \cdot T(X,Y)$

b) Sei (M,g) Riem. Mfk. Dann: ∇ heißt metrisch, falls $X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

c) Satz: Es existiert genau eine torsionsfreie metrische kovariante Ableitung auf (M,g). Wir nennen sie die Levi-Civita-Ableitung.

<u>Beweis:</u> ∇ metrisch + torsionsfrei

$\Rightarrow$ ∇ erfüllt die <u>Koszul-Formel</u> ($\langle\cdot,\cdot\rangle \equiv g(\cdot,\cdot)$)

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle + Y\langle Z,X\rangle$$
$$+ \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle$$

Ü

- aus der Formel folgt Eindeutigkeit
- für Existenz wähle die Formel als Definition von ∇ und überprüfe, dass ∇ metrisch und torsionsfrei ist. $\boxtimes$

<u>Definition 9.3</u> Die Christoffel-symbole Γ_{ij}^k $1 \le i,j,k \le n$ sind definiert durch
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Ü

$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k}$

Hinweis: nutze torsionsfrei

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(X = \sum_j s_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_j \left\{ \frac{\partial s_j}{\partial x_i} + \sum_k \Gamma_{ij}^k s_j \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$$

~~wollen~~

- Kennt man die Christoffel-Symbole, kennt man ∇ (lokal)
- Wir wollen Γ_{ij}^k's für die Levi-Civita-Ableitung explizit in Termen der Riem. Metrik darstellen.

<u>Schreibweisen:</u> $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$; $(g^{kl}) := (g_{ij})^{-1}$

Da $\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right] = 0$, die Koordinatenvektorfelder kommutiere, folgt aus der Koszul-Formel:

$$2\langle \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}; \frac{\partial}{\partial x_k}}_{= g_{kl}\Gamma_{ij}^l} \rangle = \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)}$$

mit der Einsteinschen Summenkonvention.

Die Levi-Civita-Ableitung für Untermfk

(M^n, g) sei isometrisch eingebettet in $(\mathbb{R}^{n+k}, g_0)$; $\iota : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$

Matrix-Vektor-Mult-n

∇^0 — Levi-Civita-Ableitung auf $(\mathbb{R}^{n+k}, g_0)$

Jakobi-Matrix $(n+k)\times(n+k)$

<u>Lemma 9.4</u> $(\nabla^0_X Y)(p) = DY\big|_p \cdot X(p)$ ← Vektor in $\mathbb{R}^{n+k}$

wobei hier $Y : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ $\left(\Leftrightarrow Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+k})\right)$

<u>Beweis:</u> • ∇^0 ist kovariante Ableitung, da per Konstruktion tensoriell in X und derivativ in Y

Ü $\begin{cases} \bullet\ \nabla^0 \text{ metrisch: leicht mit üblicher Produktregel} \\ \bullet\ \nabla^0 \text{ torsionsfrei: } T(X,Y)=0 \text{ in lokalen Koord. nachrechn.} \end{cases}$

$\Rightarrow \nabla^0$ Levi-Civita, Wegen Eigndeutigkeit. ☐

Ü Es gilt auch die Alternativdefinition:
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+k}$ Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = X(p)$.
Dann ist $Y(\gamma(t))$ auch eine Kurve $Y\circ\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+k}$

$$(\nabla^0_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (Y\circ\gamma).$$

<u>WICHTIG:</u> hängt nur von Y entlang von γ ab

Wir wollen aus ∇^0 eine kovariante Ableitung auf M basteln:
$Y, X \in \Gamma(TM)$ kann auch als Vektorfeld in $\mathbb{R}^{n+k}$ längs M aufgefasst werden. $(\nabla^0_X Y)(p)$ macht dann für $p \in M$ immernoch Sinn. <u>Problem:</u> $(\nabla^0_X Y)(p) \underset{\text{i.A}}{\notin} T_pM$.

~ 57 ~

Definition und Satz 9.5

Sei $\pi_p : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow T_pM$ eine orthogonale Projektion auf einen Unterraum.

$$(\nabla_X Y)(p) := \pi_p\left((\overset{\circ}{\nabla}_X Y)(p) \right)$$

definiert eine Levi-Civita-Ableitung auf (M,g)

Beweis: ∇ ist $\mathbb{R}$-bilinear ✓

∇ ist tensoriell in der 1. und derivativ in der 2-ten Komponente:

$$\nabla_X (fY)(p) = \pi_p \left[\frac{d}{dt}\Big|_0 f \cdot Y(\gamma(t)) \right]$$

$\gamma(0) = p$
$\dot\gamma(0) = X(p)$

$$= \pi_p \left[\frac{d}{dt}\Big|_0 f(\gamma(t)) \cdot Y(p) \right]$$

$$+ \pi_p \left[f(p) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_0 Y(\gamma(t)) \right]$$

$$= Xf \cdot Y(p) + f \cdot \nabla_X Y(p).$$

∇ metrisch: $Xg(Y,Z)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \langle Y(\gamma(t)), Z(\gamma(t)) \rangle_0$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_0 Y(\gamma(t)) ; Z(p) \right\rangle_0 + \left\langle Y(p) ; \frac{d}{dt}\Big|_0 Z(\gamma(t)) \right\rangle_0$$

$$= g\left((\nabla_X Y)(p) ; Z(p) \right) + g\left(Y(p) ; (\nabla_X Z)(p) \right).$$

∇ torsionsfrei: Schränke die Identität

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y - \overset{\circ}{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0$$

auf M ein. Es liefert $\nabla_X Y - \nabla_Y X - \pi[X,Y] = 0$.

Man sieht leicht $\pi[X,Y] = [X,Y]$

hier werden X, Y mit VF auf $\mathbb{R}^{n+k}$ identifiziert

hier $X,Y \in \Gamma(TM)$

Bemerkung 9.10 Sei $\varphi: \mathcal{U} \subset M \subset \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$

eine Karte von M. Dann gilt explizit in lokalen Koord $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}\right)$

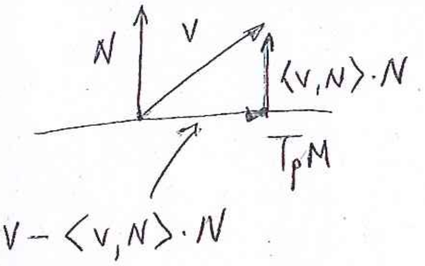
$$\nabla^0_{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}} \left[\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Sei der Einfachheit halber $\kappa = 1$ und $N \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1})$ ein Vektorfeld s.d $\forall p \in M: N(p) \perp T_pM$. (Normales VF, lokal)

Dann gilt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \pi\left(\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \left\langle \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} ; N \right\rangle \cdot N$$



$$= \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle \cdot N$$

Der abgezogene Anteil $h_{ij} := \left\langle \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} ; N \right\rangle$ heißt auch 2-te Fundamentalform von M. Beachte

- 1-te Fundamentalform (g_{ij}) und 2-te Fund form (h_{ij}) sind extrinsische Größen, hängen also von der Einbettung $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ab.
- ∇ - LC-Ableitung ist intrinsische Größe, nur von der inneren Geometrie (g_{ij}) abhängig.

mehr dazu später

~~§ 10. Riemannscher Krümmungstensor~~

~~Definition und Satz 10.1. Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf M~~

$$\cancel{R: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)}$$

§ 10. Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung

(M,g) Riem. Mfk; ∇ – Levi-Civita Ableitung.

Definition 10.1 Sei $c : [0,1] \to M$ (stückweise) diffbare Kurve.

a) für $X \in \Gamma(TM|_c)$ setze $\frac{D}{dt}\Big|_{t_0} : T_{c(t_0)}M \circlearrowleft$ mit

$$\frac{D}{dt}\Big|_{t_0} X := (\nabla_{\dot{c}(t_0)} X)(c(t_0)).$$

b) $X \in \Gamma(TM|_c)$ heißt parallel entlang c falls $\frac{D}{dt} X \equiv 0$.

Definition und Satz 10.2 Zu jedem $X_0 \in T_{c(0)}M$ ex. genau ein paralleles VF $X \in \Gamma(TM|_c)$ s.d. $X(c(0)) = X_0$. Damit ist der "Paralleltransport"

$$\begin{aligned} P_c : T_{c(0)}M &\longrightarrow T_{c(1)}M \\ X_0 &\longmapsto X(c(1)) \end{aligned}$$

eindeutig festgelegt.

Beweis: $\frac{D}{dt} X \equiv 0$ mit $X(c(0)) = X_0$ ← (Beweis hinten)
ist eine lineare DGL mit Anfangsbed. Es ex. eine eindeutige Lösung mit Picard-Lindelöf. ~~(siehe Vorl. zu DGL's)~~ → wir müssen genauen Beweis vorrechnen. Siehe das Blatt hinten!

Lemma 10.3 $P_c : T_{c(0)}M \to T_{c(1)}M$ ist eine lineare Isometrie, dh

$$g_{c(0)}(X,Y) = g_{c(1)}(P_c X, P_c Y)$$

für alle $X, Y \in T_{c(0)}M$.

Beweis von Satz 10.2

OBdA sei $\gamma: I \to M$ eine Kurve innerhalb einer lokalen Koordinatenumgebung $(\mathcal{U}, \varphi)$, sonst lässt sich $\gamma(I)$ mit solchen Koord-Umgebungen überdecken und die Lösung $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ lässt sich schrittweise fortsetzen.

- gegeben $\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^n a^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}$
- gegeben $X_0 = \sum_{j=1}^n x^j(0) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\gamma(0)=p}$
- gesucht $X(t) = \sum_{j=1}^n x^j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\gamma(t)}$ so dass

$$0 = \frac{D}{dt} X(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)} X(t) = \sum_{j=1}^n \nabla_{\dot\gamma(t)} x^j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\gamma(t)}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial x^j(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + x^j(t)\, \nabla_{\dot\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}$$

$\dot\gamma(t)[x^j] = \frac{\partial x^j}{\partial t}$

$$= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial x^j(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} + x^j(t) \cdot \sum_{i=1}^n a^i(t)\, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}$$

(weiter in der Einstein Notation)

$$= \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} + x^j \cdot a^i \cdot \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$= \left\{ \frac{\partial x^k}{\partial t} + x^j a^i \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \stackrel{!}{=} 0$$

Wegen der linearen Unabh. der $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}$, sind die einzelnen Summanden ebenfalls Null: $\frac{\partial x^k}{\partial t} + x^j a^i \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x^1(t) \\ \vdots \\ \dot x^n(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} \text{ mit } A(t)_{kj} = a^i \Gamma_{ij}^k$$

 Da $A(t)$ glatt, folgt Existenz und Eind. aus Picard-Lindelöff. ☒

Beweis von Lemma 10.3: Seien zu $X, Y \in T_{c(0)}M$, $X(t), Y(t)$ die parallelen Vektorfelder entlang c, nach Satz 10.2.

$$\frac{\partial}{\partial t} g(X(t), Y(t)) = g\Big(\underbrace{\tfrac{D}{dt}X(t)}_{=0}, Y(t)\Big) + g\Big(X(t), \underbrace{\tfrac{DY(t)}{dt}}_{=0}\Big) = 0$$

$$X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Also ist $g(X(t), Y(t))$ konstant für $t \in [0,1]$. $\boxtimes$

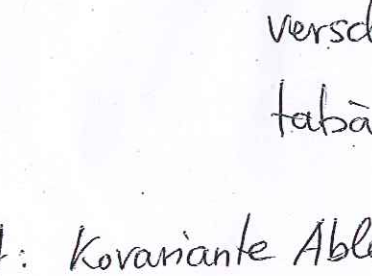
Wir haben aus ∇ die Parallelverschiebung entlang Kurven konstruiert. Wir können ∇ aus P_c zurück erhalten:

(Ü) Setze für $X, Y \in \Gamma(TM)$, $p \in M$ und $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X(p)$:

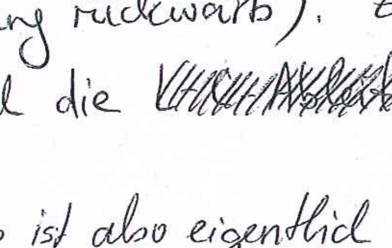
$$(\nabla_X Y)(p) := \lim_{t \to 0} \frac{P_\gamma(Y(\gamma(t))) - Y(\gamma(0))}{t}$$

(hier $P_\gamma : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(0)=p}M$ ist die Parallelverschiebung rückwärts). Zeige ∇ erfüllt tatsächlich die obige Formel.

Fazit: Kovariante Ableitung ist also eigentlich eine Wahl einer Parallelverschiebung



∇_1



∇_2

Definition 10.4 Für $p \in M$ heißt

$$\mathrm{Hol}_p(M) := \{ P_c : T_pM \circlearrowleft \mid c : [0,1] \to M$$
$$\text{stückweise diffbar mit } c(0) = c(1) = p \}$$

"Holonomie-Gruppe" von M am Punkt p"

(Beachte: wegen Lemma 10.3 $\mathrm{Hol}_p(M) \subset O(T_pM)$.

$\longleftrightarrow$ $\boxed{\text{BITTE BEISPIEL aus S. 62a) HINTEN HIER EINFÜGEN}}$

Definition 10.5 Eine Kurve $c : [0,1] \to (M,g)$ heißt Geodätische, falls $\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \equiv 0$, dh $\dot{c}(t)$ ist parallel entlang c.

$$\equiv \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t)$$

Wir werden im späteren Kapitel auf die Beziehung zwischen Geodätischen und kürzesten Kurven eingehen.

§11. Der Riemannsche Krümmungstensor

Definition 11.1 Sei M eine Mfk und ∇ eine kovariante Ableitung auf M. Die Abb.

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$
$$(X, Y, Z) \longmapsto R(X,Y)Z$$

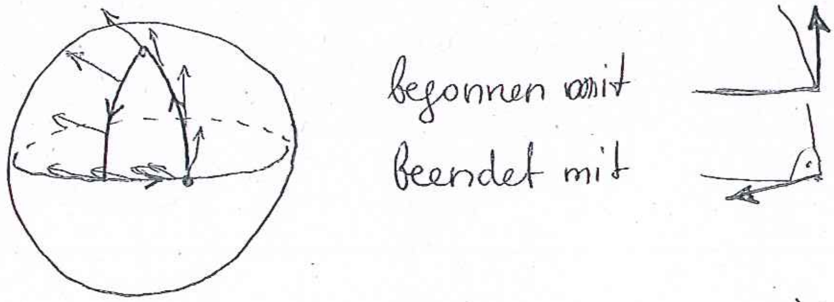
$$\text{mit } R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

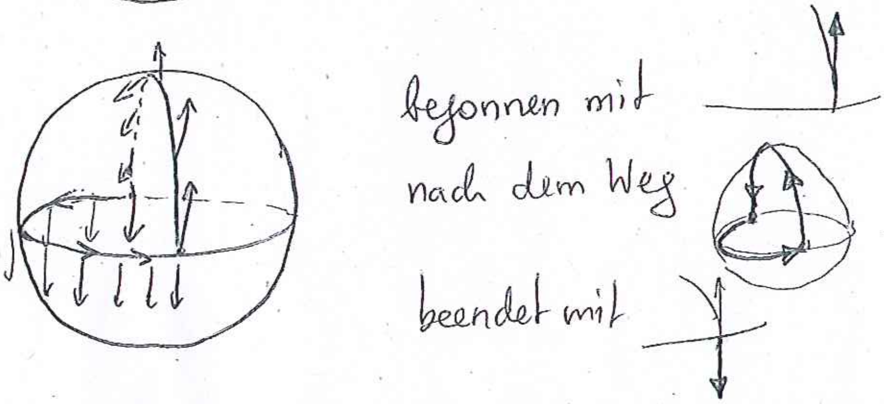
heißt "der Krümmungstensor von ∇". Falls (M,g) Riem. Mfk und ∇ die Levi-Civita-Ableitung ist, heißt R der "Riemannsche Krümmungstensor von (M,g)"

Beispiel (Einzufügen direkt hinter Def. 10.4) 10.4a)

Vermutung: Parallelverschiebung entlang geschlossener Kurven müsste doch den ursprünglichen Vektor liefern, dh $Hol_p(M)$ müsste $= \{ id : T_pM \to \}$ sein.

Diese Vermutung ist jedoch ein Fehlschluss:





Wir sehen $P_c : T_pM \to$ Parallelverschiebung hängt stark von dem Weg ab.