Vorlesung Differentialgeometrie 1

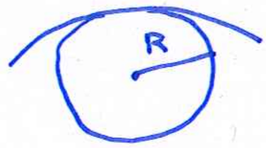
WS 2016/17; Boris Vertman

§0. Kurze Einleitung

Wir werden versuchen folgende Fragen zu beantworten:

a) Was bedeutet Krümmung?

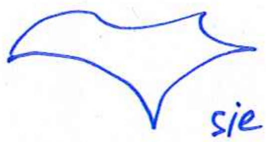
→ Kurven:



schwach gekrümmt
R groß

stark gekrümmt
R klein

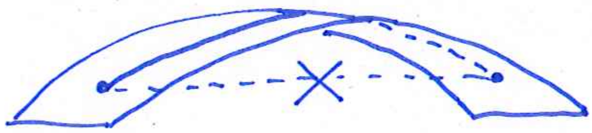
→ Flächen:



etwas komplizierter, weil sie in unterschiedl. Richtungen verschieden gekrümmt sein können.

b) Wie bestimmt man kürzeste Verbindungslinie (= "Geodätische") zwischen 2 Punkten auf einer Fläche?

↑ innerhalb der Fläche



→ Geodäten bilden den Schlüssel zur Frage ob eine Fläche (als metrischer Raum, Metrik = Distanz, Länge der Geodätischen) VOLLSTÄNDIG ist.

c) Was ist ein gekrümmter Raum? (Riemannsche Mannigf.)

→ zentraler Begriff der allgemeinen Relativitätstheorie.

→ Verallg. der anschaulichen Konzepte (Kurven/Flächen) auf höhere Dimensionen.

Weitere Hinweise:

- Meine eigenen Vorlesungsnotizen (kein Skript, keine Mitschrift) werden in regelmäßigen Abständen auf meiner Webseite hochgeladen.

- Voraussetzungen: Analysis 1 - 3, sowie Lineare Algebra.

- Alternative Vorlesungsskripte: Diffgeo 1 von B. Wilking
  Diffgeo 1 von D. Grieser
  Diffgeo 1 von C. Böhm

- Weiterführende Literatur:

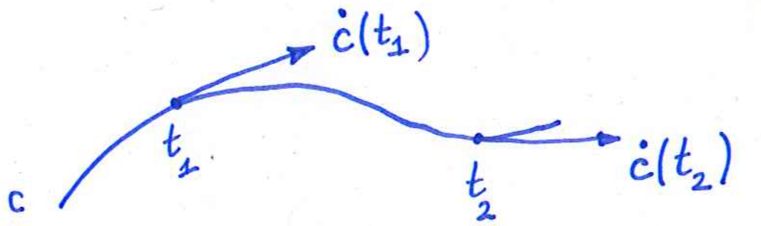
  - Klingenberg, "Eine Vorlesung über Diffgeo"
  - Lang "Differentiable manifolds"
  - Spivak "A comprehensive Introd. to Diffgeo"
  - Walter "Differentialgeometrie"

§ 1. Kurven in $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1 Eine C^k-Kurve (parametrisierte C^k-Kurve) ist eine k-mal stetig diffbare Abbildung $c: I \to \mathbb{R}^n$, wo $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Ferner:

a) c heißt glatt, falls unendlich oft diffbar

b) c heißt regulär, falls $\left\| \underbrace{\frac{dc(t)}{dt}}_{=: \dot{c}(t)} \right\| \neq 0$ für alle $t \in I$



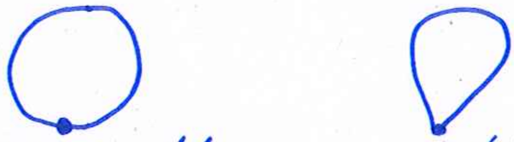
dh: $\dot{c}(t)$ ist der Tangentialvektor an die Kurve c am Punkt $c(t)$.

c) c heißt <u>wegparametrisiert</u>, falls $\|\dot c(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

d) c heißt <u>geschlossen</u>, falls $c(a) = c(b)$ $(I = [a,b])$

c heißt <u>diffbar geschlossen</u>, falls $c(a) = c(b)$

$$\dot c(a) = \dot c(b)$$

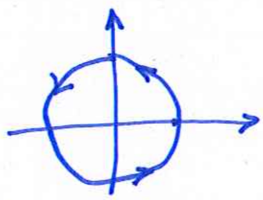


diffbar geschlossen — geschlossen aber nicht diffbar geschl.

Beispiele 1.2

1) $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Radius 1, $t \in \overset{I}{\overset{\shortparallel}{[0,2\pi]}}$

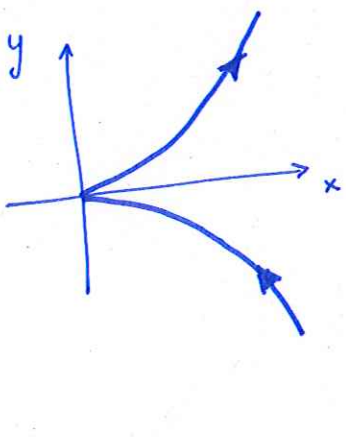
$\dot c(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$; $\|\dot c(t)\| = 1$.



also ist c glatt, regulär, wegparam. und diffbar geschlossen.

2) <u>Neilsche Parabel</u>: $c(t) = (\underbrace{t^2}_{x(t)}, \underbrace{t^3}_{y(t)})$, $t \in \mathbb{R}$

Wir sehen: $x \geq 0$; $y = y(x) = \begin{cases} x^{3/2}, & \text{falls } t \geq 0 \\ -x^{3/2}, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$



$\dot c(t) = (2t, 3t^2)$

$\|\dot c(0)\| = 0$, also ist c zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht regulär.

Viele parametrisierten Kurven können das gleiche Bild besitzen, und werden dann in einer Äquivalenzklasse zusammengefasst.

Definition 1.3

Zwei parametrisierte C^k-Kurven $c: I \to \mathbb{R}^n$, $c': I' \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, $c \sim c'$, falls eine

- Parametertransformation $\varphi: I' \to I$ bij. existiert, so dass φ, φ^{-1} beide C^k sind und $c' = c \circ \varphi$.
- $c' = c \circ \varphi$ heißt dann Umparametrisierung von c
- die Äquivalenzklasse $[c]$ heißt Kurve (C^k).

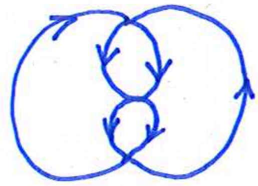
Bemerkung: $c, c' \in [c]$, dh $c \sim c' \Rightarrow \text{Bild}\, c = \text{Bild}\, c'$

Aber im Allgemeinen: $\text{Bild}\, c = \text{Bild}\, c' \not\Rightarrow c \sim c'$!

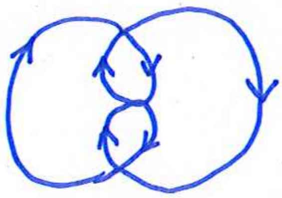
Beispiele 1.4

a)
$$\left.\begin{array}{l} c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix};\ t \in [0, 2\pi] \\ c'(t) = \begin{pmatrix} \cos t/2 \\ \sin t/2 \end{pmatrix};\ t \in [0, 4\pi] \end{array}\right\} c \sim c'$$

b) c:



c':



$\Big\}\ c \nsim c'$!

Frage: Lassen sich kurvenförmige (1-dim) Punktmengen in $\mathbb{R}^n$ immer parametrisieren? $\to$ NEIN

Ist zumindest eine lokale Parametrisierung möglich?

$\to$ je nach dem!

Definition 1.5

Eine implizite Kurve ist gegeben durch
$$C := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \}$$
wo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ differenzierbar ist.

Erinnerung aus Analysis 2

Satz 1.6 (Satz über implizite Funktionen)

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig diffbar und rang $Df(x_0) = n-k$, dann ex. offene Umgebung $x_0 \in U \times V \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ und $g: V \to U$ stetig diffbar so dass

$$U \times V \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} = \{(t, g(t)) \mid t \in V\}$$

Insbesondere: in Def 1.5, $k = n-1$, und daher lässt sich die implizite Kurve C_f lokal als Parametrisierung $c(t) := (t, g(t))$ mit $t \in V \subset \mathbb{R}^1$ offen, schreiben.

Abschließend: Die Länge des Vektors $\|\dot{c}(t)\|$ ist die Geschwindigkeit der Kurve (physikalisch: $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$)

Ziel: Wollen dass die Kurven mit KONSTANTER GESCHWINDIGKEIT 1 durchlaufen werden.

$\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ bedeutet dass c wegparam. ist

Satz 1.7 Ist $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^k-Kurve (d.h. $\dot{c}(t) \neq 0$) so gibt es eine C^k-Parametertransformation $\varphi: [0,\ell] \to [a,b]$ so dass $\tilde{c} := c \circ \varphi$ wegparametrisiert ist.

Beweis: Definiere $\psi: [a,b] \to [0,\ell]$; $s \mapsto \int_a^s \|\dot{c}(t)\|\, dt$ wo $\ell := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt$ – Länge der Kurve c ist.

ψ ist C^k und $\dot{\psi}(s) = \|\dot{c}(s)\| \neq 0$ für alle s

Daher muss ψ invertierbar sein. Setze $\varphi := \psi^{-1}: [0,\ell] \to [a,b]$

Satz vom lokalen Diffeo Ana 2

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{\dot{\psi}(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \|\dot{\tilde{c}}(t)\| = \left\| \frac{d}{dt} c(\varphi(t)) \right\|$$

$$= \|\dot{c}(\varphi(t))\| \cdot \|\dot{\varphi}(t)\| = 1$$

Also ist $\tilde{c}$ wegparametrisiert. $\boxtimes$

<u>Bemerkung</u>: man sagt auch: $\tilde{c}(s)$ ist nach Bogenlänge s parametrisiert, wo $s(t) = \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\|\, d\tau$ die Weglänge / Bogenlänge nach Zeit t ist.

§ 2. Krümmung von regulären Kurven in $\mathbb{R}^n$

<u>Definition 2.1</u> Sei c eine reguläre <u>wegparam.</u> C^2-Kurve.

a) $T(t) := \dot{c}(t)$ ist das "<u>Einheitstangentialfeld</u>" von c.

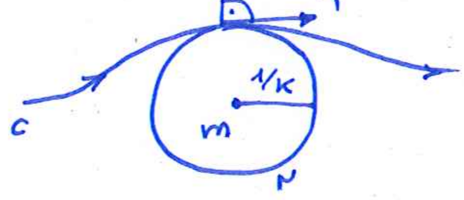
b) Falls $\dot{T}(t) \neq 0$, ist $N(t) := \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}$ das "<u>Einheitsnormalenfeld</u>" von c.

c) $\kappa(t) := \langle \dot{T}(t), N(t) \rangle = \|\dot{T}(t)\| = \|\ddot{c}(t)\|$
ist die "<u>Krümmung</u>" von c am Punkt $c(t)$.
(physikalische Bedeutung von $\ddot{c}$: Beschleunigung $\ddot{x}$)

d) $m(t) := c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$ ist der "<u>Krümmungsmittelpunkt</u>" am t
$t \mapsto m(t)$ heißt "<u>Evolute</u>" von c.

e) $r := B_{\frac{1}{\kappa(t)}}(m(t))$ heißt "<u>Krümmungskugel</u>" von c an t.

<u>Illustration</u>:



(ii) Lemma 2.2 Sei c regulär C^2, nicht notwendigerweise wegparametrisiert. Dann gilt:

a) $T(t) = \frac{\dot c(t)}{\|\dot c(t)\|}$; $N(t) = \frac{\dot T(t)}{\|\dot T(t)\|}$; $\varkappa(t) = \frac{\|\dot T(t)\|}{\|\dot c(t)\|}$

b) $T \perp N$ Einheitstangential- und Einheitsnormalenfelder stehen senkrecht zueinander, ie $\langle T(t), N(t)\rangle = 0$.

Proposition 2.3 (Krümmung einer reg. Kurve ist unabh. von Parametr.)

Sei $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^2-Kurve, $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ ein C^2-Diffeomorphismus und $\tilde c := c \circ \varphi$. Dann gilt:

$$\varkappa_c(\varphi(t)) = \varkappa_{\tilde c}(t)$$

Beweis: OBdA $\dot\varphi > 0$. Dann gilt:

$$\dot{\tilde c}(t) = \dot c(\varphi(t)) \cdot \dot\varphi(t) \overset{\dot\varphi>0}{=} \dot c(\varphi(t)) \cdot |\dot\varphi(t)|$$

$$\Rightarrow \tilde T(t) = \frac{\dot{\tilde c}(t)}{\|\dot{\tilde c}(t)\|} = \frac{\dot c(\varphi(t))}{\|\dot c(\varphi(t))\|} \cdot \frac{\cancel{|\dot\varphi(t)|}}{\cancel{|\dot\varphi(t)|}} = T(\varphi(t)).$$

$$\Rightarrow \varkappa_{\tilde c}(t) = \frac{\|\dot{\tilde T}(t)\|}{\|\dot{\tilde c}(t)\|} = \frac{\|\dot T(\varphi(t)) \cdot \cancel{\dot\varphi(t)}\|}{\|\dot c(\varphi(t)) \cdot \cancel{\dot\varphi(t)}\|} = \varkappa_c(\varphi(t))$$

Lemma 2.2 a)

$\blacksquare$

Proposition 2.4 (Krümmungskugel berührt c zur 2. Ordnung)

Sei c eine reguläre C^2-Kurve mit $\ddot c(t_0) \neq 0$. Dann ist $m(t_0) \in \mathbb{R}^n$ der eindeutig bestimmte Punkt mit der Eigenschaft

$$\|m(t_0) - c(t)\| = \frac{1}{\varkappa(t_0)} + o(|t-t_0|^2)$$

wo $o(|t-t_0|^2)$ eine Funktion ist, so dass

$$\lim_{t \to t_0} \frac{o(|t-t_0|^2)}{|t-t_0|^2} = 0.$$

Beweis: Ü

§ 3. Kurventheorie in der Ebene $\mathbb{R}^2$

Wesentlicher Unterschied zu $\mathbb{R}^n$, $n>2$, ist die Einführung von orientierter Wahl von $N(t)$, $\kappa(t)$:

Definition 3.1 Sei $c: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ reguläre C^2-Kurve

a) $T(t) := \dfrac{\dot c(t)}{\|\dot c(t)\|}$ ist das "Einheitstangentialfeld" von c

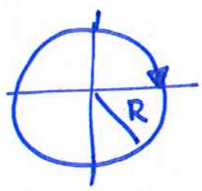
b) $N_0(t) := J\,T(t)$, wobei $J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Vektoren um $90°$ nach links dreht, ist das "orientierte Einheitsnormalenfeld" $(N_0(t) = \pm N(t))$

c) $\kappa_0(t) := \dfrac{\langle \dot T(t), N_0(t) \rangle}{\|\dot c(t)\|}$ ist "orientierte Krümmung" von c.
(wir zeigen später: $|\kappa_0(t)| = \kappa(t)$)

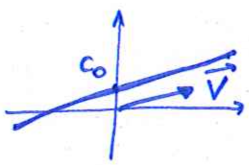
Beispiele 3.2

a) 
$c(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$; $\kappa_0(t) = \dfrac{1}{R} > 0$

allgemein: $\kappa_0(t) > 0 \Rightarrow$ Kurve (an dem Punkt) dreht sich gegen Uhrzeigersinn.

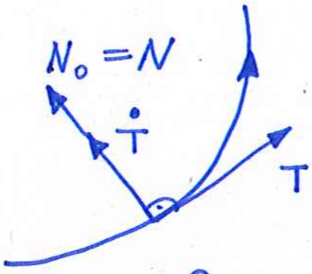
b) 
$c(t) = \begin{pmatrix} R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$; $\kappa_0(t) = -\dfrac{1}{R} < 0$

allgemein: $\kappa_0(t) < 0 \Rightarrow$ Kurve (an dem Punkt) dreht sich im Uhrzeigersinn

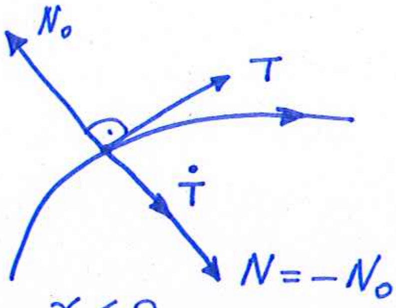
c) 
$c(t) = c_0 + t\cdot\vec v$ Gerade

$T(t) = \dfrac{\vec v}{\|\vec v\|}$; $\dot T(t) = 0 \Rightarrow \kappa_0(t) = \kappa(t) = 0$

allgemein: $\kappa_0(t) = 0 \Rightarrow$ Kurve dreht sich an dem Pkt nicht d)



$\kappa_0 > 0$



$\kappa_0 < 0$

konvex = gegen Uhrzeigersinn
= nach links gekrümmt.

konkav = im Uhrzeigersinn
= nach rechts gekrümmt.

Lemma 3.3 a) $\kappa(t) = |\kappa_0(t)|$

b) $\kappa_0(t)$ ändert bei Umorientierung von c
(dh c wird ersetzt durch ~~[illegible]~~ Umparametrisierung $\tilde{c}(t) = c(-t)$) das Vorzeichen.

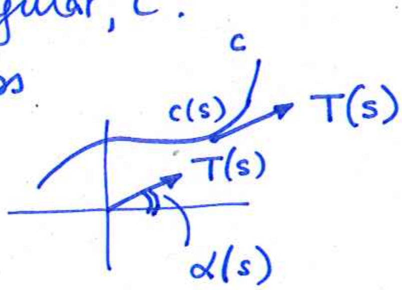
⌈ Ändert man den Durchlaufsinn von c, kehrt man das Vorzeichen von κ_0 um. ⌋

Beweis: Ü

Interpretation der Krümmung mittels Winkel

Sei $c: [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ wegparametrisiert, regulär, C^2.
Dann existiert $\alpha: [0,\ell] \to \mathbb{R}$ C^2 so dass

$$T(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$$



$\alpha(s) = \measuredangle\big(T(s); \{y=0\}\big)$
Winkel zwischen Tangentialfeld und Horizontalen.

- $\dot{T}(s) = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}(s)\sin\alpha(s) \\ \dot{\alpha}(s)\cos\alpha(s) \end{pmatrix}$
- $N_0(s) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix}$
- $\kappa_0(s) = \dot{\alpha}(s)$, Krümmung ist die Winkeländerung!

"Hauptsatz der Kurventheorie in $\mathbb{R}^2$"

Satz 3.4 Sei $\varkappa_0 : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, und $c_0 \in \mathbb{R}^2$; $v \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Dann gibt es genau eine wegparametrisierte Kurve $c : [0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ so dass $c(0) = c_0$; $\dot{c}(0) = v$; $\varkappa_0$ — orientierte Krümmung von c.

Beweis: $\varkappa_0$ legt die Winkelfunktion $\alpha(s)$ fest:

$$\varkappa_0(s) = \dot{\alpha}(s) \Rightarrow \alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^s \varkappa_0(t)\,dt,$$

wobei $\alpha(0)$ sich eindeutig als Winkel von v zur Horizontalen ergibt.

$\alpha(s)$ und c_0 legen die wegparametrisierte Kurve c eindeutig fest:

$$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) \overset{!}{=} (\cos\alpha(s); \sin\alpha(s))$$

$$\Rightarrow x(s) = x_0 + \int_0^s \cos\alpha(t)\,dt$$

$$y(s) = y_0 + \int_0^s \sin\alpha(t)\,dt, \text{ wobei } c_0 = (x_0, y_0).$$

$\square$

Folgerung 3.5 Kreise und Geraden (oder Teilabschnitte davon) sind die <u>einzigen</u> Kurven konstanter Krümmung.

Beweis: Bsp 3.2 a) b) c) geben Bsp für konst $\varkappa_0 > 0$, < 0, $= 0$. Wegen Satz 3.4 sind es die einzigen Beispiele. $\square$

Vertiefende Themen:
- Totalkrümmung
- Jordanischer Kurvensatz.
- Knoten.

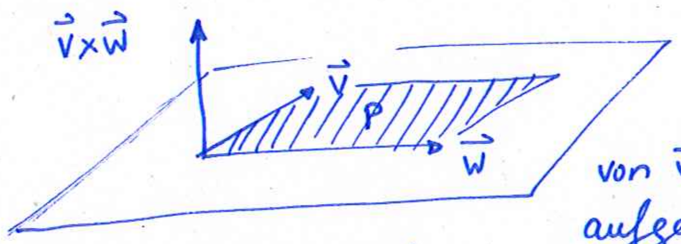
§ 4. Kurventheorie im Raum $\mathbb{R}^3$

<u>Definition 4.1</u> Gegeben sei eine reguläre C^2-Kurve c mit
$T(s)$ – Einheitstangentialfeld von c
$N(s)$ – Einheitsnormalenfeld von c
$\kappa(s)$ – Krümmung von c.

Dann wird $(T, N, B = T \times N)$ als "<u>begleitendes Dreibein</u>" von c bezeichnet. Es ist nur an Pkten mit $\kappa(s) \neq 0$ definiert.

<u>Erinnerung zum Kreuzprodukt:</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{= \vec{v}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{= \vec{w}} := \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix}$$

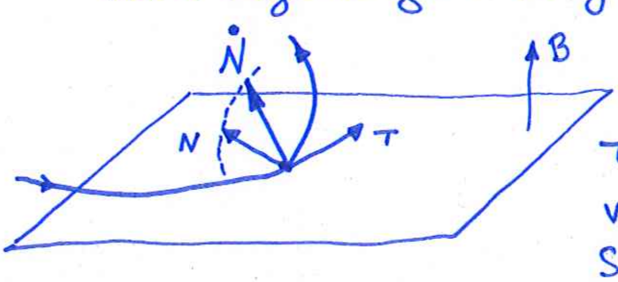


von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannte Ebene

$(\vec{v} \times \vec{w})$ steht senkrecht auf $\vec{v}, \vec{w}$. Die Länge des Vektors ist $|P|$.

Da $T \perp N$, sind (T, N, B) paarweise orthogonal und bilden damit eine <u>positiv orientierte</u> Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

<u>Definition 4.2</u> Die "<u>Torsion</u>" oder "<u>Windung</u>" von c in s ist $\tau(s) := \langle \dot{N}(s) ; B(s) \rangle$, wobei c nach Bogenlänge s (weg-)parametrisiert ist.



τ = Größe des Anteils von $\dot{N}$ der aus der Schmiegebene (T, N) rausragt.

- $\varkappa$: Änderungsgeschw. des Tangentialfeldes T.
- τ: Änderungsgeschw. der Schmiegebene (T,N).

insbesondere: $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow c$ verläuft stets in der (T,N) Ebene, ist also eigentlich eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

<u>Satz 4.3</u> (Frenet-Gleichungen) Solange $\varkappa \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \dot T \\ \dot N \\ \dot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

wobei T, N, B als Zeilen geschr. werden, dh $(T,N,B)^T$ ist 3×3 Matrix

<u>Beweis:</u>

$\dot T = \kappa N$

- $\langle \dot T, T \rangle = 0$; $\langle \dot T, N \rangle = \kappa$; $\langle \dot T, B \rangle = 0$
  folgen auf einen Schlag aus der Definition der Krümmung $\dot T = \kappa N$ und der Tatsache $\dot T \perp T$, $\dot T \perp B$.

$\dot N = -\kappa T + \tau N$

- $\langle \dot N, T \rangle = -\varkappa$: $0 = \frac{d}{ds} \underbrace{\langle N, T \rangle}_{=0,\text{ da } N \perp T} = \langle \dot N, T \rangle + \underbrace{\langle N, \dot T \rangle}_{=\kappa}$
- $\langle \dot N, N \rangle = 0$: $0 = \frac{d}{ds} \underbrace{\langle N, N \rangle}_{=1} = \langle \dot N, N \rangle + \langle N, \dot N \rangle$ also ist $\langle \dot N, N \rangle = 0$.
- $\langle \dot N, B \rangle = \tau$ ist die Definition der Torsion

$\dot B = -\tau N$

- $\langle \dot B, T \rangle = 0$: $0 = \frac{d}{ds} \underbrace{\langle B, T \rangle}_{=0,\text{ da } B \perp T} = \langle \dot B, T \rangle + \langle B, \dot T \rangle$

  $\Rightarrow \langle \dot B, T \rangle = -\langle B, \dot T \rangle = -\kappa \underbrace{\langle B, N \rangle}_{B \perp N} = 0$
- $\langle \dot B, N \rangle = -\tau$: $0 = \frac{d}{ds} \langle B, N \rangle = \langle \dot B, N \rangle + \langle B, \dot N \rangle$

  $\Rightarrow \langle \dot B, N \rangle = -\langle B, \dot N \rangle = -\tau$ per Def.
- $\langle \dot B, B \rangle = 0$ Beweis genauso wie $\langle \dot N, N \rangle = 0$. $\boxtimes$

<u>Beachte</u>: $\mathcal{U}(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$ ist für alle s orthogonal $(\mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^T = I)$

$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa(s) & 0 \\ -\varkappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$ ist $\forall s$ schiefsymm $(A^T = -A)$

Dies ist kein Zufall!

Ü Sei $\mathcal{U}(s), A(s) \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$ diffbare

<u>Lemma 4.4</u> Matrixwertiges Funktionen und $\mathcal{U}(s)$ für alle s orth.

Dann gilt: $\mathring{\mathcal{U}} = A\cdot\mathcal{U} \Rightarrow A$ ist schiefsymmetrisch.

<u>Satz 4.5</u> Seien $\varkappa : [0,\ell] \to \mathbb{R}$, $\tau : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ beliebig, und $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in [0,\ell]$; $c_0, T_0, N_0 \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\|T_0\| = \|N_0\| = 1$, $T_0 \perp N_0$.

Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge (weg-) parametrisierte Kurve $c : [0,\ell] \to \mathbb{R}^3$ mit Krümmung $\varkappa$, Torsion τ, $c(0) = c_0$, $\dot{c}(0) = T_0$, $\frac{\ddot{c}(0)}{\varkappa(0)} = N_0 = N(0)$.

<u>Beweisidee</u>: Schreibe die Frenet-Gl. als $\mathring{\mathcal{U}} = A\cdot\mathcal{U}$

$\mathcal{U}(0) = (T_0, N_0, T_0 * N_0)$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für DGL's existiert genau eine Lösung $\mathcal{U}(s)$.

Nun gilt: $\dot{c}(s) = T(s)$; $c(0) = c_0$.
Wieder besitzt diese DGL eine eindeutige Lösung. $\boxtimes$

<u>Nächstes Ziel</u>: Flächen $\rightsquigarrow$ (Unter-) Mannigfaltigkeiten.
(schon in Ana 2,3 gehabt?)