Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I

Serie 10

Aufgabe 37 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung $X : N \to TM$ heißt *Vektorfeld längs* f, oder $X \in \mathcal{V}f$, falls $X(p) \in T_{f(p)}M$ für alle $p \in N$. Zeigen Sie, dass dann genau ein Zusammenhang $\nabla^f : \mathcal{V}N = \Gamma(TN) \times \mathcal{V}f \to \mathcal{V}f$ existiert mit: Ist $\hat{Y} \in \mathcal{M}$ mit $Y = \hat{Y} \circ f$, so gilt

$$(\nabla^f_X Y)_p = \nabla_{df_p X} \hat{Y}.$$

Bemerkung. Ist $c : I \to M$ eine Kurve, so ist $c'(t) = dc(t)_t(\frac{\partial}{\partial t})$ ein Vektorfeld längs c und auf diese Art erhalten wir Existenz und Wohldefiniertheit der kovarianten Ableitung längs einer Kurve.

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** a) Sei $f : (M, g) \to (N, \hat{g})$ eine lokale Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten und X, Y, Z Vektorfelder auf M, welche f-verwandt zu Vektorfeldern $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ auf N sind. Zeigen Sie, dass dann auch $\nabla_X Y$ f-verwandt zu $\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y}$ ist und $R(X, Y)Z$ f-verwandt ist zu $\hat{R}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z}$.

b) Sei $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ eine Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, $c : [a, b] \to M_1$ eine differenzierbare Kurve, $X(t)$ ein paralleles Vektorfeld längs c. Zeigen Sie, dass dann $Y(t) := df_{c(t)}X(t)$ ein paralleles Vektorfeld längs $f \circ c : [a, b] \to M_2$ ist.

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ auf M existiert, so dass für alle differenzierbaren Vektorfelder X gilt

$$df_p(X) = g_p(\operatorname{grad} f, X)$$

der *Gradient von* f und geben Sie eine Formel für $\operatorname{grad} f$ in lokalen Koordinaten an. Zeigen Sie ferner, dass der Gradient senkrecht auf regulären Urbildern von f steht.

b) Zeigen Sie, dass die *Hesseform von* f,

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y) = g(\nabla_X(\operatorname{grad} f), Y),$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 40 (4 Punkte)**.** Sei Y ein Vektorfeld längs $\gamma : [0, L] \to M$. Angenommen für jedes Vektorfeld X entlang γ mit $X(0) = X(L) = 0$ gilt:

$$\int_0^L g(X(t), Y(t)) = 0$$

Zeigen Sie, dass dann $Y(t) = 0$ für alle $t \in [0, L]$ gilt.

***Aufgabe 41** (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche n-Mannigfaltigkeit. Ist $c : [0, 1] \to M$ eine Kurve, so gibt es eine orthonormale Basis $X_1, \ldots, X_n$ von parallelen Vektorfeldern längs c. Zeigen Sie dafür, dass auch mit der "neuen" Definition der kovarianten Ableitung längs Kurven aus Aufgabe 37 gilt, dass $g(X(t), Y(t))$ konstant ist, wenn $X(t), Y(t)$ parallele Vektorfelder längs c sind.

***Aufgabe 42** (4 Punkte)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *Funktionskeim* in $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse $[f]$ von differenzierbaren Funktionen $f : U_f \to \mathbb{R}$, U_f offene Umgebung von f, wobei

$$[f] = [g] \iff f|_U \equiv g|_U\,,$$

für eine offene Umgebung U von p mit $U \subset U_f \cap U_g$. Es bezeichne $C^\infty(M)_p$ den Ring der Funktionskeime in p und $\mathrm{Der}(C^\infty(M)_p)$ den Raum der linearen Abbildungen $D_p : C^\infty(M)_p \to \mathbb{R}$, welche der Leibnizregel

$$D_p([f][g]) = D_p([f])[g] + [f]D_p([g])$$

genügen. Wir nennen $\mathrm{Der}(C^\infty)_p)$ auch den Raum der *punktweisen Derivationen.* Zeigen Sie, dass T_pM und $\mathrm{Der}(C^\infty)_p)$ via

$$A^p_M : T_pM \to \mathrm{Der}(C^\infty)_p),\ [c] \mapsto D^{[c]}_p,$$

$$D^{[c]}_p([h]) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (h \circ c)(t)$$

isomorph sind.

Ist $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, so definieren wir

$$\tilde{d}f_p : \mathrm{Der}(C^\infty(M)_p) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M)_p),\ D_p \mapsto \tilde{d}f_p \cdot D_p$$

durch $(\tilde{d}f_p \cdot D_p)([\hat{h}]) := D_p([\hat{h} \circ f])$. Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[d, "A^p_M"'] & T_f(p)N \arrow[d, "A^{f(p)}_N"] \\
\mathrm{Der}(C^\infty(M)_p) \arrow[r, "\tilde{d}f_p"] & \mathrm{Der}(C^\infty(N)_{f(p)})
\end{tikzcd}$$

***Aufgabe 43** (4 Punkte)**.** Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit der durch die Einbettung induzierten Metrik. Sei $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve on M und V ein Vektorfeld von M längs c, d.h. $V : I \to \mathbb{R}^3$ mit $V(t) \in T_{c(t)}M$.

a) Zeigen Sie, dass V parallel ist genau dann, wenn $\frac{dV}{dt}$ senkrecht auf $T_{c(t)}M$ steht.

b) Sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Geodätischen durch nach Bogenlänge parametrisierte Segemente von Großkreisen gegeben sind.

c) Sei $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder mit Radius 1 um die z-Achse. Wie sehen die Geodätischen aus?

***Aufgabe 44** (4 Punkte)**.** Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$. Dann definiert

$$g_{(x,y)}(v, w) := \frac{1}{y^2}\langle v, w\rangle_0$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{H}$. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, der 13. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.

Wir wünschen Ihnen besinnliche Feiertage und einen guten Rutsch in das neue Jahr!