Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2016/2017
WWU Münster

Übungen zur Differentialgeometrie I
Serie 9

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** Sei $M^n \subset (\mathbb{R}^{n+k}, g_0)$ eine isometrisch eingebettete Untermannigfaltigkeit des Euklidischen Raums mit Standardmetrik g_0 und zugehöriger Levi-Civita-Ableitung ∇^0. Wir bezeichnen mit NM das Normalenbündel von M und mit

$$\pi_p^T, \pi_p^\perp : T_p\mathbb{R}^{n+k} \to T_p\mathbb{R}^{n+k} \cong T_pM \oplus N_pM,$$

die orthogonalen Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Faktor. Für jedes $X_p \in T_pM$ bezeichnen wir mit $\hat{X}$ eine lokale Fortsetzung von X zu einem Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{n+k}$. Wir definieren dann

a) die *Weingartenabbildung* in Richtung $\xi \in \Gamma(NM)$

$$W_{\xi_p} : T_pM \to T_pM,\ X_p \mapsto -\pi_p^T(\nabla_X^0 \xi),$$

b) und die *zweite Fundamentalform*

$$II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ (X_p, Y_p) \mapsto \pi_p^\perp(\nabla_X^0 \hat{Y}).$$

Zeigen Sie, dass im Falle von $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einer orientierten Hyperfläche die Definitionen mit den Definitionen 12.3 und 12.4 a) übereinstimmen.

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Parallelverschiebung $P^c : T_c(0)M \to T_c(1)M$ und Holonomiegruppen $\mathrm{Hol}_p(M)$, $p \in M$. Zeigen Sie, dass dann für alle $p, q \in M$, welche sich durch eine stückweise differenzierbare Kurve $c : [0,1] \to M$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$ verbinden lassen, gilt:

$$\mathrm{Hol}_p(M) = P^c \circ \mathrm{Hol}_q(M) \circ (P^c)^{-1}$$

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** Sei M der Graph einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ eine Einbettung. Es bezeichne $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ und $g = \varphi^*\langle\ ,\ \rangle$ die induzierte Metrik auf M. Dann bilden die Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}{}_{i=1,2}$ punktweise eine Basis von T_pM. Berechnen Sie in dieser Basis g_{ij}, g^{ij}, h_{ij}, K und H, wobei $h_{ij} = \langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}, N\rangle$ den (i,j)-ten Eintrag der Matrixdarstellung der Weingartenabbildung bezeichne und $N = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1)^t$.

Aufgabe 36 (4 Punkte)**.** Ein (k,l)-*Tensor* (auch: *Tensor vom Typ* (k,l) oder k-*fach kontravarianter und* l-*fach kovarianter Tensor*) ist eine Zuordnung

$$A_p : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{l \text{ Faktoren}} \to \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k \text{ Faktoren}},$$

die glatt von $p \in M$ abhängt und multilinear ist. Zeigen Sie, dass eine multilineare Abbildung

$$A : \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{l \text{ Faktoren}} \to \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{k \text{ Faktoren}}$$

genau dann ein (k,l)-Tensor ist, wenn sie in allen Komponenten tensoriell ist, wobei Sie sich auf den Fall $k = 0$ und $\Gamma(TM)^0 = C^\infty(M)$ beschränken dürfen.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Donnerstag, der 22. Dezember 2016, um 10.00 Uhr (oder nach Vereinbarung mit Übungsgruppenleiter), in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.