Wie findet man eine Formel für die Fibonacci-Zahlen?

Die **Fibonacci-Zahlen** sind die Zahlen

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots.$$

Wir schreiben $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2$ etc. Sie sind festgelegt durch das **Bildungsgesetz**: "Jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden", d.h.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ \text{ für } \ n = 2,\ 3,\ 4,\ ...$$

mit den **Anfangswerten** $f_0 = 0,\ f_1 = 1$. Wie findet man eine Formel, mit der man für beliebiges n direkt f_n berechnen kann?
Mit anderen Worten: Kann man f_{1000} berechnen, ohne vorher $f_1, f_2, \ldots, f_{999}$ berechnet zu haben?

1. Schritt:

Prinzip: *Kannst Du ein Problem nicht lösen, versuche zunächst, ein einfacheres verwandtes Problem zu lösen!*

Als Vereinfachung vergessen wir zunächst die Anfangswerte und versuchen, eine Formel (einen Ausdruck in n) zu finden, die das Bildungsgesetz erfüllt.
Wir probieren ein paar einfache Ausdrücke für n aus; nennen wir sie g_n statt f_n, da sie ja noch nicht die richtigen Anfangswerte haben müssen.

Sie sollten hier nicht gleich weiterlesen, sondern zunächst selber ein wenig probieren. Es gibt keinen wirklich systematischen Weg. Wir geben nur ein paar mögliche Versuche an:

1. Versuch: $g_n = n$.
Nachprüfen: Gilt $g_n \stackrel{?}{=} g_{n-1} + g_{n-2}$ für jedes n? Also

$$n \stackrel{?}{=} (n-1) + (n-2)$$

Subtrahiere n, dann folgt $0 = n - 3$, also $n = 3$. Das Bildungsgesetz gilt also nicht für jedes n, sondern nur für $n = 3$. $\rightsquigarrow$ Versuch fehlgeschlagen!

Das war wohl zu einfach, machen wir's etwas allgemeiner, z. B.

2. Versuch: $g_n = a \cdot n$ (hierbei ist a eine Zahl, die noch zu bestimmen ist).
Aus $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ folgt $an = a(n-1) + a(n-2)$.

Man kann durch a teilen und erhält wie vorher $n = 3$, also wieder nichts! Aber Vorsicht: Man kann nicht durch a teilen, falls $a = 0$ ist. $a = 0$ ergibt $g_n = 0$ für alle n, also die Folge 0, 0, 0, 0, ... die tatsächlich eine Lösung ist (wenn auch wenig interessant).

3. Versuch: $g_n = n^2$.
Aus $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ folgt $n^2 = (n-1)^2 + (n-2)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 - 4n + 4$ und damit $0 = n^2 - 6n + 5$. Dies ist einen quadratische Gleichung für n und kann daher nur für höchstens zwei Werte von n stimmen (hier: $n = 1$ oder $n = 5$), also nicht für alle n! $\rightsquigarrow$ Versuch fehlgeschlagen!

Aus ähnlichen Gründen geht auch $g_n = n^3$ oder eine beliebige andere Potenz von n nicht, und auch Polynome (Kombinationen von Potenzen von n) gehen nicht.

4. Versuch: Versuchen wir n im Exponenten!
Statt nacheinander $g_n = 2^n$ oder $g_n = 3^n$ etc. zu versuchen, lassen wir uns zunächst die Freiheit, die Basis nicht zu kennen, also

$$g_n = a^n$$

und versuchen, a so zu bestimmen, dass das Bildungsgesetz stimmt.

$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ bedeutet nun $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$. Teilt man durch a^{n-2} (wir nehmen $a \neq 0$ an, da $a = 0$ offenbar $g_n = 0$ für alle n ergibt), folgt $a^2 = a+1$ oder $a^2 - a - 1 = 0$, und dies hat nach der bekannten Formel die Lösungen

$$a \;=\; \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \;=\; \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \;=\; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\ .$$

Damit haben wir eine Lösung (sogar zwei)! Prüfen wir es noch mal nach: Ist a eine dieser beiden Zahlen, so gilt $a^2 - a - 1 = 0$, also $a^2 = a + 1$, und multiplizieren mit a^{n-2} liefert $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$. Da dies für <u>jedes</u> n stimmt, ist das Bildungsgesetz erfüllt!

Zusammenfassung des 1. Schritts:
Wir schreiben

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dann erfüllen

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ \ldots$$
$$b^0,\ b^1,\ b^2,\ \ldots$$

das Bildungsgesetz der Fibonaccizahlen.

2. Schritt:

Nachdem wir das vereinfachte Problem gelöst haben, müssen wir nun das ursprüngliche lösen! Was fehlt noch? Die richtigen Anfangswerte. Machen wir eine Tabelle:

	$n =$	0	1	2	...
wir haben	$a^n =$	1	a	a^2	...
	$b^n =$	1	b	b^2	...
wir suchen	$f_n =$	0	1	1	...

Wie können wir f_n aus a^n und b^n zusammenbasteln, also die dritte Zeile aus den ersten beiden? Sehen wir uns nur die ersten zwei Spalten an.

Erste Spalte ($n = 0$): 0 lässt sich leicht aus 1 und 1 kombinieren; $0 = 1 - 1$. Also versuchen wir $g_n = a^n - b^n$, dann ist sicher $g_0 = 0$, also wie gewünscht.

Zweite Spalte ($n = 1$): Für $g_n = a^n - b^n$ ist

$$g_1 = a^1 - b^1 = a - b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

wir wollen aber $f_1 = 1$!
Teilen wir also durch $\sqrt{5}$, das ändert die 0 der ersten Spalte nicht und macht $\sqrt{5}$ zu 1. Wir erhalten

$$f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}.$$

Das ist die gesuchte Formel! Um ganz sicher zu gehen, prüfen wir es noch mal nach:

Das Bildungsgesetz: $f_n \stackrel{?}{=} f_{n-1} + f_{n-2}$

Nun wissen wir, dass

$$\begin{aligned} a^n &= a^{n-1} + a^{n-2} \\ b^n &= b^{n-1} + b^{n-2} \end{aligned}$$

für alle n gilt. Subtrahieren der beiden Gleichungen liefert

$$a^n - b^n = a^{n-1} - b^{n-1} + a^{n-2} - b^{n-2},$$

und teilen durch $\sqrt{5}$ ergibt

$$\frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{\sqrt{5}},$$

also $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle n.

Die Anfangswerte:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{a^0 - b^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 \\ f_1 &= \frac{a^1 - b^1}{\sqrt{5}} = \frac{a-b}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \end{aligned}$$

Also erfüllt die Formel Anfangswerte und Bildungsgesetz. Da die Fibonacci-Zahlen durch beides eindeutig festgelegt sind, muss die Formel stimmen, also:

$$\boxed{\text{Die } n\text{-te Fibonacci-Zahl ist } f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

Weitere Bemerkungen:

- Die Formel ist aus verschiedenen Gründen bemerkenswert. Zum Beispiel taucht in ihr die Zahl $\sqrt{5}$ auf, die irrational (nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar) ist; und doch liefert die Formel für jedes n eine ganze Zahl!

- Es ist $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618\ldots$. Dies ist vom Betrag kleiner als 1. Je größer n, desto näher wird daher b^n bei Null liegen, z. B. $b^{10} = 0,008\ldots$. Da immer $|b^n| < 1$, also $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\, b^n\right| < \frac{1}{2}$ ist (da $\sqrt{5} > 2$), folgt, dass man f_n **auch dadurch erhält, dass man** $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ **zur nächsten ganzen Zahl rundet**. Hierbei muss man für gerade n abrunden, für ungerade n aufrunden (wegen $b < 0$). Dies ergibt eine besonders einfache Methode, f_n mit dem Taschenrechner zu bestimmen!

- Wiederum aus $|b| < 1$ folgt auch, dass beim Quotienten $f_n : f_{n-1}$ der Term b^n für große n immer weniger ins Gewicht fällt. Aus der Rechnung $\frac{a^{n+1}}{\sqrt{5}} : \frac{a^n}{\sqrt{5}} = a$ folgt, dass sich $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ der Zahl $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$ annähert, je größer n ist.

  (Mathematisch gesprochen ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = a$, und genau genommen folgt dies schon daraus, dass $|b| < |a|$.)

Autor: Prof. Dr. D. Grieser
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
daniel.grieser@uni-oldenburg.de
Mai 2014
Text erhältlich unter
`http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwvortraege/vortraege.html`