Die Fibonaccizahlen und der goldene Schnitt

- Mathematik in der Natur -

$1 : 1 = 1$

$2 : 1 = 2$

$3 : 2 = 1{,}5$

$5 : 3 = 1{,}66...$

$8 : 5 = 1{,}6$

$13 : 8 = 1{,}625$

$21 : 13 = 1{,}615...$

.

.

.

1,618...

Was sind die Fibonaccizahlen?

Die Fibonaccizahlen sind eine Folge positiver, ganzer Zahlen.
Um die nächste Fibonaccizahl zu erhalten, werden immer die zwei vorhergegangenen Zahlen addiert (Bildungsgesetz: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$).
Begonnen wird mit den Anfangswerten $f_0=0$ und $f_1=1$.

Die ersten Fibonaccizahlen lauten also

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55....

Wenn wir jetzt aber ein höheres Folgenglied, z. B. f_{100} emitteln wollen, ist diese Art der Bildung sehr aufwändig.

Im Jahre 1843 gelang es dem französischen Mathematiker Binet eine Formel zu finden, mit der sich beliebige Folgenglieder der Fibonaccifolge auf Anhieb berechnen lassen.
Die nach ihm benannte Formel lautet:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Eine erstaunliche Formel! Wie kommt man darauf?
Siehe anliegenden Text!

Was ist der goldene Schnitt?

Der goldene Schnitt stellt das Verhältnis einer Unterteilung dar, die besonders ästhetisch wirkt.

Das Besondere des goldenen Schnittes ist, dass das Verhältnis der Gesamtstrecke zur Teilstrecke A gleich dem Verhältnis der Strecke A zur Strecke B ist:

$$\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$$

Mit $\Phi = A/B$ erhält man daraus eine quadratische Gleichung, die die positive Lösung

$$\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$$

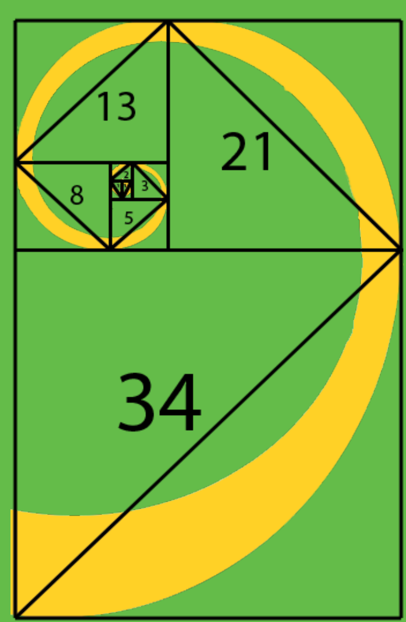
hat.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Fibonaccizahlen und dem goldenen Schnitt?

Je größer die Fibonaccizahlen werden, desto mehr gleicht der Quotient einer Fibonaccizahl und der vorhergehenden dem goldenen Schnitt 1,61803... (siehe linker Bildrand).

Wo finden wir die Fibonaccizahlen und den goldenen Schnitt in der Natur?

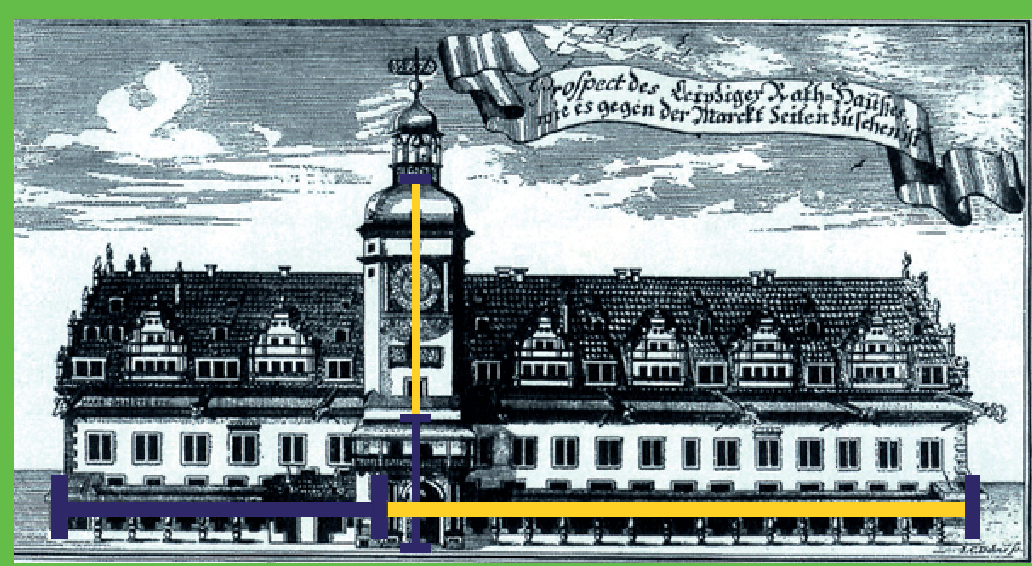
Die Fibonaccizahlen lassen sich in vielfacher Weise in der Natur wiederfinden.
Ein Beispiel hierfür ist die Nautilusschnecke.



Die Diagonalen der Quadrate sind die Fibonaccizahlen.

Da sich das Verhältnis der Diagonale eines Quadrates zur nächst kleineren Diagonale mit wachsenden Zahlen dem Verhältnis des goldenen Schnittes annähert, wird diese Spirale auch goldene Spirale genannt.

Neben der Natur bedient sich auch die Architektur und Kunst des goldenen Schnittes. So findet man den goldenen Schnitt gleich zweimal im alten Leipziger Rathaus:



Bildquellen: Nautilusschnecke von Wikipedianutzer vhris 73,
altes Leipziger Rathaus:
http://www.stadtelternrat-leipzig.de/historie/altesRathaus.jpg