Aktien, Derivate, Arbitrage:

Eine Einführung in die moderne Finanzmathematik

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Kursverläufe des DAX:

Tagesgang 5.1.2011

Kursverläufe des DAX:

Tagesgang 5.1.2011

Wochengang

Kursverläufe des DAX:

Tagesgang 5.1.2011 Wochengang Jahresgang

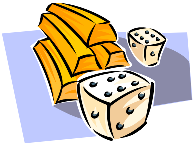
(Selbstähnlichkeit auf allen Zeitskalen!)

Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:

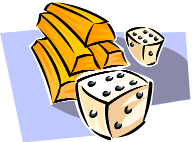
CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:

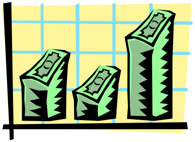
- spekulativ (in der Hoffnung auf schnelle Gewinne)



Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:



- spekulativ (in der Hoffnung auf schnelle Gewinne)

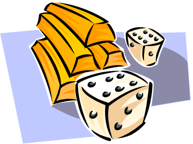


- konservativ (Portfolio-Hedging)

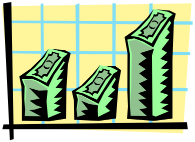
CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Möglichkeiten, auf schwankende Kurse zu reagieren:

- spekulativ (in der Hoffnung auf schnelle Gewinne)



- konservativ (Portfolio-Hedging)



- verfügbare Finanzinstrumente:

Derivative (Optionen, Futures, ...)

Option:

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

  oder

- *zu einem bestimmten Zeitpunkt* (europäische Option)

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

  oder

- *zu einem bestimmten Zeitpunkt* (europäische Option)

  - zu kaufen (Call-Option)

Option:

Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis

- *innerhalb einer bestimmten Frist* (amerikanische Option)

  oder

- *zu einem bestimmten Zeitpunkt* (europäische Option)

  - zu kaufen (Call-Option)

    oder

  - zu verkaufen (Put-Option).

Bezeichnungen:

Bezeichnungen:

T:	Laufzeit; Verfalltag
X:	Ausübungspreis, Basispreis
S_t :	Kurswert zur Zeit t, mit $0 \le t \le T$
i:	risikoloser Zins
$r = 1 + i$:	Zinsfaktor
$v = 1/r$:	Diskontfaktor

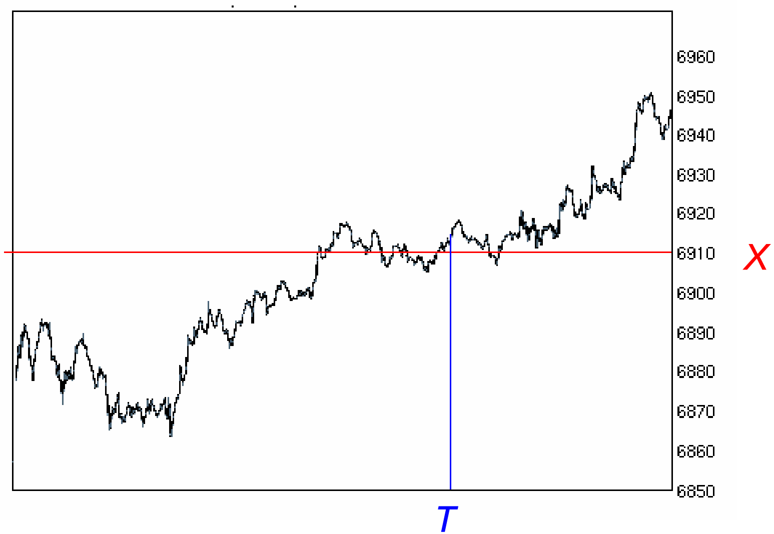
carl von ossietzky universität OLDENBURG

Bezeichnungen:

T:	Laufzeit; Verfalltag
X:	Ausübungspreis, Basispreis
S_t :	Kurswert zur Zeit t, mit $0 \leq t \leq T$
i:	risikoloser Zins
$r = 1 + i$:	Zinsfaktor
$v = 1/r$:	Diskontfaktor

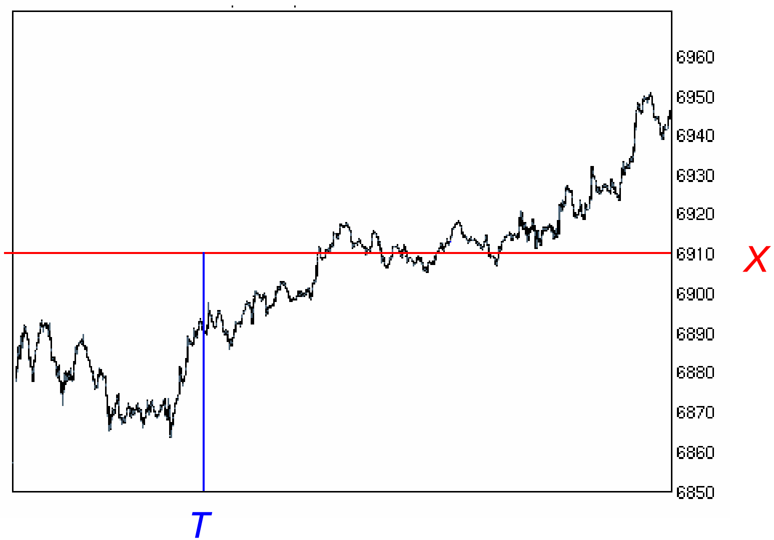
Call-Option:	$S_T > X$:	Option *ausüben*
	$S_T \leq X$:	Option *nicht ausüben*
Put-Option:	$S_T < X$:	Option *ausüben*
	$S_T \geq X$:	Option *nicht ausüben*

Veranschaulichung:



Call-Option *ausüben*, Put-Option *nicht ausüben*

Veranschaulichung:



Put-Option *ausüben*, Call-Option *nicht ausüben*

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Ziel: Bestimmung des „richtigen“ Optionswertes

Ziel: Bestimmung des „richtigen“ Optionswertes

z.B. C_t : Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0,T]$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Ziel: Bestimmung des „richtigen" Optionswertes

z.B. C_t : Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0,T]$

Es gilt am Verfalltag $t = T$:

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

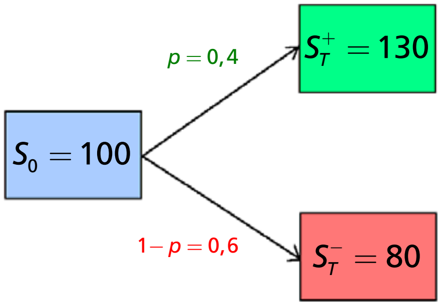
Ziel: Bestimmung des „richtigen“ Optionswertes

z.B. C_t : Wert der Call-Option zur Zeit $t \in [0,T]$

Es gilt am Verfalltag $t = T$:

$$\boxed{C_T = \max(S_T - X;0) = (S_T - X)^+}$$

Beispiel:



Beispiel: $i = 5\% \quad X = 110$

$p = 0,4$

$S_T^+ = 130$ $\quad C_T^+ = 20$

$S_0 = 100$

$1 - p = 0,6$

$S_T^- = 80$ $\quad C_T^- = 0$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Beispiel: $i = 5\% \quad X = 110$

$S_0 = 100$

$p = 0{,}4$: $S_T^+ = 130$ $\quad C_T^+ = 20$

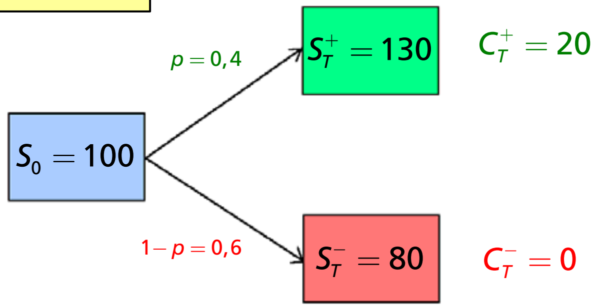
$1 - p = 0{,}6$: $S_T^- = 80$ $\quad C_T^- = 0$

Callpreis nach Erwartungswert-Prinzip (→ faires Spiel):

$$C_0 = E\left[v \cdot C_T\right]$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

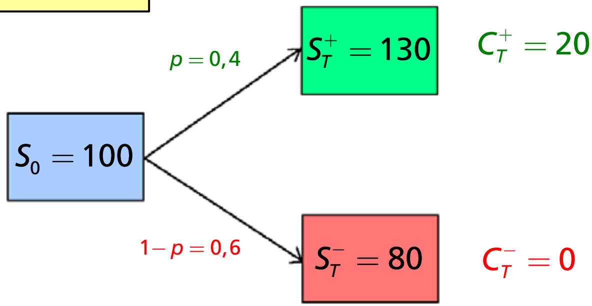
Beispiel: $i = 5\% \quad X = 110$



Callpreis nach Erwartungswert-Prinzip (→ faires Spiel):

$$C_0 = E\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p \cdot C_T^+ = v \cdot p \cdot \left(S_T^+ - X\right)$$

Beispiel: $i = 5\% \quad X = 110$

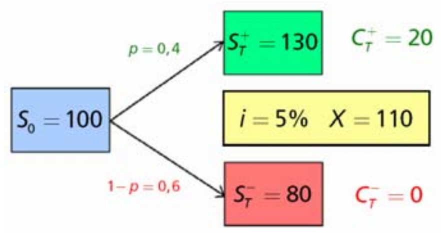


Callpreis nach Erwartungswert-Prinzip (→ faires Spiel):

$$C_0 = E\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p \cdot C_T^+ = v \cdot p \cdot \left(S_T^+ - X\right) = \frac{0,4 \cdot 20}{1,05} = \underline{\underline{7,62}}$$

Analyse:

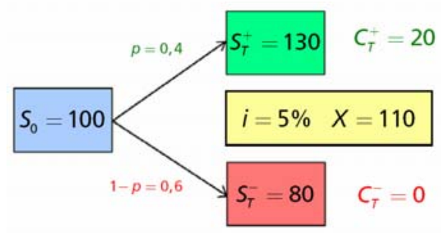
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$

Analyse:

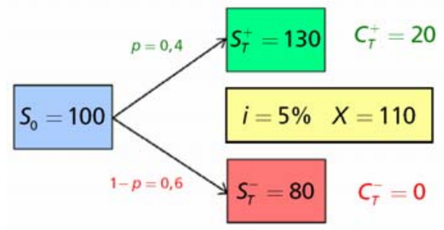
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00

Analyse:

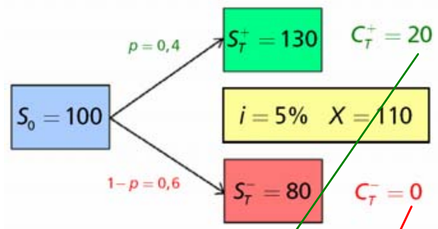
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00
Kauf 5 Call-Optionen	–38,10	+100,00	0,00

Analyse:

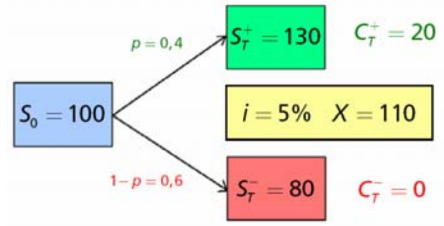
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00
Kauf 5 Call-Optionen	–38,10	+100,00	0,00

Analyse:

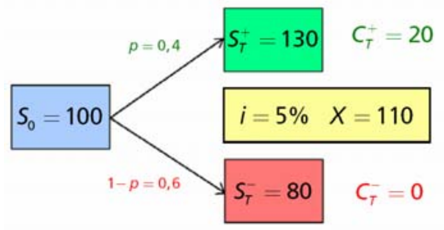
$C_0 = 7{,}62$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Leerverkauf 2 Aktien	+200,00	–260,00	–160,00
Kauf 5 Call-Optionen	–38,10	+100,00	0,00
Kredit vergeben	–161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Analyse:

$C_0 = 7{,}62$

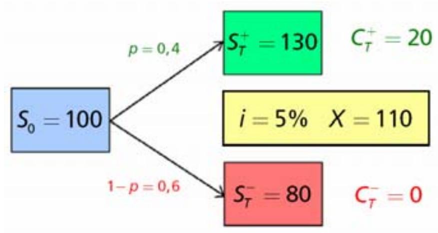


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kredit vergeben	–161,90	+170,00	+170,00
Saldo	0,00	+10,00	+10,00

Arbitrage-Möglichkeit!

Analyse:

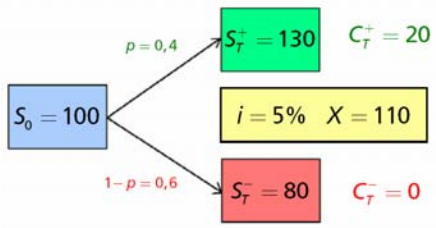
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$

Analyse:

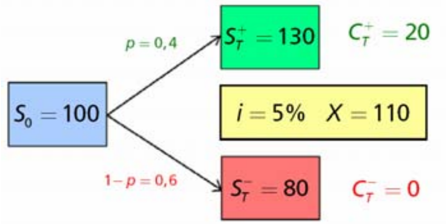
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00

Analyse:

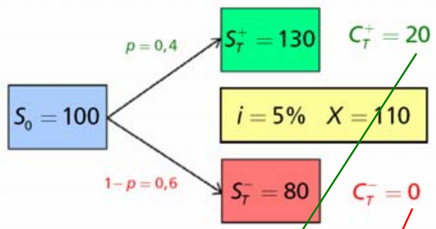
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	–100,00	0,00

Analyse:

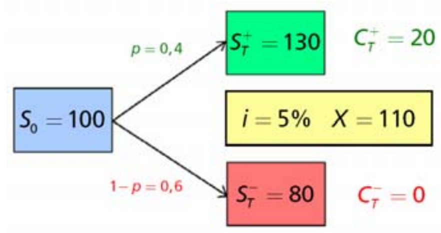
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	–100,00	0,00

Analyse:

höherer Preis $C_0 = 12$

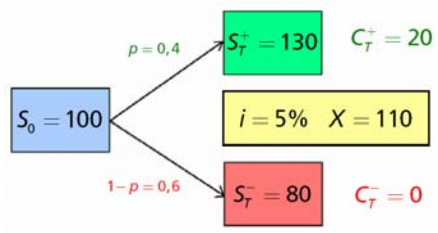


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+60,00	–100,00	0,00
Kredit aufnehmen	+140,00	–147,00	–147,00
Saldo	0,00	+13,00	+13,00

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

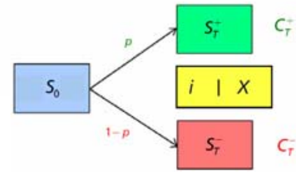
höherer Preis $C_0 = 12$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kredit aufnehmen	+140,00	–147,00	–147,00
Saldo	0,00	+13,00	+13,00

Arbitrage-Möglichkeit!

Analyse: richtiger Preis $C_0 = ?$

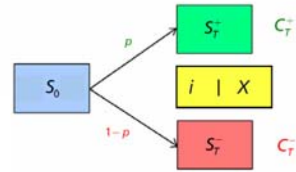


$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

richtiger Preis $C_0 = ?$

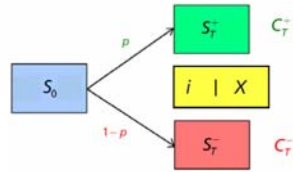


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse:

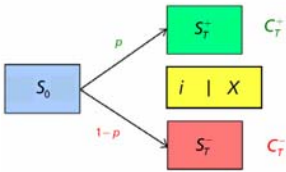
richtiger Preis $C_0 = ?$



$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Analyse:

richtiger Preis $C_0 = ?$

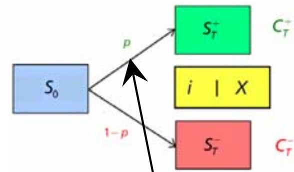


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Verkauf m Call-Optionen	$+m \cdot C_0$	$-m \cdot (S_T^+ - X)$	0,00
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^- = n \cdot S_T^+ - m \cdot (S_T^+ - X)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Call} = \frac{n}{m} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-)}$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG



Analyse:

richtiger Preis $C_0 = ?$

$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$n \cdot S$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

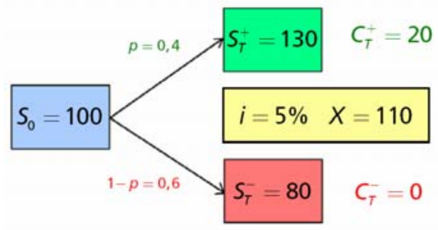
Lösung ist unabhängig von *p*!

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^- = n \cdot S_T^+ - m \cdot (S_T^+ - X)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Call} = \frac{n}{m} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-)}$

Probe:

$C_0 = 9{,}52$

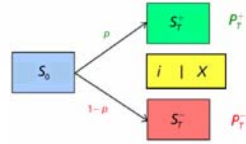


$t = 0$		$t = T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf 2 Aktien	–200,00	+260,00	+160,00
Verkauf 5 Call-Optionen	+47,60	–100,00	0,00
Kredit aufnehmen	+152,40	–160,00	–160,00
Saldo	0,00	0,00	0,00

$$h_{Call} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} = \frac{20}{50}$$

$$C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = \frac{2}{5} \cdot \frac{105 - 80}{1{,}05} = 9{,}52$$

Analyse für Put-Preis: richtiger Preis $P_0 = ?$



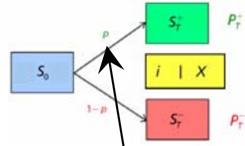
$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kauf n Aktien	$-n \cdot S_0$	$+n \cdot S_T^+$	$+n \cdot S_T^-$
Kauf m Put-Optionen	$-m \cdot P_0$	0,00	$+m \cdot (X - S_T^-)$
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^+ = n \cdot S_T^- + m \cdot (X - S_T^-)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Put} = \frac{n}{m} = \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{P_0 = h_{Put} \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0)}$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Analyse für Put-Preis: richtiger Preis $P_0 = ?$



$t=0$		$t=T$	
Aktion	Kontobewegung	$S_T^+ > X$	$S_T^- < X$
Kredit aufnehmen	$+(n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$	$-r \cdot (n \cdot S_0 + m \cdot P_0)$
Saldo	0,00	0,00	0,00

Lösung ist unabhängig von p!

Notwendige Bedingung: $n \cdot S_T^+ = n \cdot S_T^- + m \cdot (X - S_T^-)$

$\Rightarrow$ Hedge Ratio $\boxed{h_{Put} = \frac{n}{m} = \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}}$ und $\boxed{P_0 = h_{Put} \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0)}$

Beobachtung:

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$\boxed{h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1}$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$\boxed{h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1}$$

- *Optionspreise sind genau dann positiv, wenn* $\boxed{S_T^- < rS_0 < S_T^+}$ *gilt, d.h. wenn positive Kursbewegungen potenziell mehr Gewinn erzielen als die risikolose Geldanlage*

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1$$

- *Optionspreise sind genau dann positiv, wenn* $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt, d.h. wenn positive Kursbewegungen potenziell mehr Gewinn erzielen als die risikolose Geldanlage*

- *Bei Arbitrage-freien (fairen) Optionspreisen ist durch keine mengenmäßige Kombination von Derivaten eine Arbitragemöglichkeit gegeben*

Beobachtung:

- *Für die Hedge Ratios gilt:* $$h_{Call} + h_{Put} = \frac{S_T^+ - X}{S_T^+ - S_T^-} + \frac{X - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1$$

- *Optionspreise sind genau dann positiv, wenn* $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt, d.h. wenn positive Kursbewegungen potenziell mehr Gewinn erzielen als die risikolose Geldanlage*

- *Bei Arbitrage-freien (fairen) Optionspreisen ist durch keine mengenmäßige Kombination von Derivaten eine Arbitragemöglichkeit gegeben*

- *Die Arbitrage-freien (fairen) Optionspreise hängen nicht von p ab!*

carl von ossietzky universität OLDENBURG

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: *Im Fall von* $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-} = 1 - q^* < 1}$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: Im Fall von $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^{\ -}}{S_T^{\ +} - S_T^{\ -}} = 1 - q^* < 1}$$

mit

$$C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = E^*\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p^* \cdot C_T^+$$

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: Im Fall von $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^{\;-}}{S_T^{\;+} - S_T^{\;-}} = 1 - q^* < 1}$$

mit

$$C_0 = h_{Call} \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = E^*\left[v \cdot C_T\right] = v \cdot p^* \cdot C_T^+$$

$$P_0 = h_{Put} \cdot (v \cdot S_T^+ - S_0) = E^*\left[v \cdot P_T\right] = v \cdot q^* \cdot P_T^-$$

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Aber:

„Äquivalentes" Erwartungswertprinzip: Im Fall von $S_T^- < rS_0 < S_T^+$ *gilt*

$$\boxed{0 < p^* = \frac{r\,S_0 - S_T^{\,-}}{S_T^{\,+} - S_T^{\,-}} = 1 - q^* < 1}$$

mit dem Arbitrage-freien Preis

$$D_0 = E^*\left[v \cdot D_T\right] = v \cdot \left(p^* \cdot D_T^+ + q^* \cdot D_T^-\right)$$

für jedes beliebige Derivat D!

CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

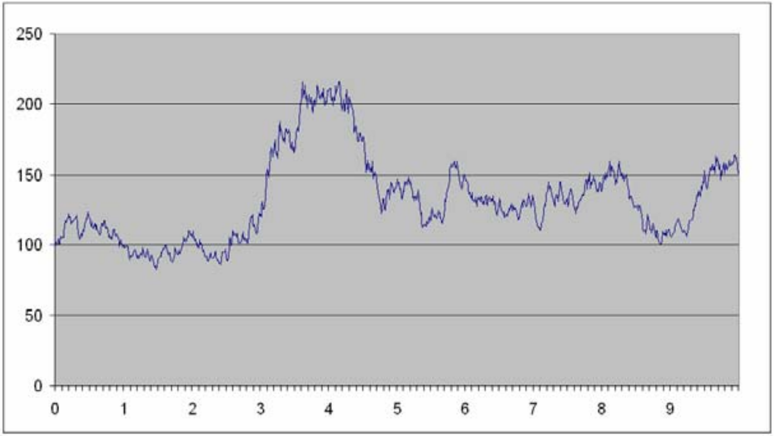
Modellerweiterung:

- Mehrere aufeinander folgende Perioden (Binomialbaum-Modell von Cox-Ross-Rubinstein)

- Grenzübergang mit unendlich vielen „infinitesimal klei-nen“ Perioden (Black-Scholes-Modell; geometrische Brown’sche Bewegung)

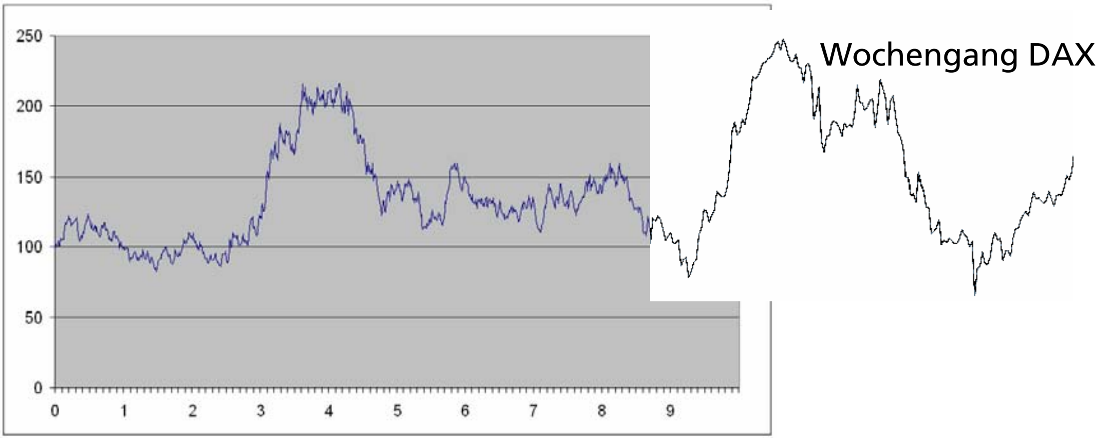
Simulation des Grenzprozesses

(geometrische Brownsche Bewegung)



Simulation des Grenzprozesses

(geometrische Brownsche Bewegung)



Solche Funktionen sind überall stetig, aber nirgends differenzierbar!

Ausblick:

- **Preisfindung für**
  - nicht Arbitrage-freie (unvollständige) Märkte
  - allgemeinere Finanzprodukte (z.B. CDO's, Swaps)
  - Alternativer Risikotransfer (Katastrophen-Optionen)
  - Derivate an Energiebörsen
  - Realoptionen
- **Modellierung von Zinsstrukturkurven**
- **Asset-Liability-Management**

Aktien, Derivate, Arbitrage:

Eine Einführung in die moderne Finanzmathematik

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer
Institut für Mathematik
Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik