C_0: Fkt mit kpt Träger

§0 Motivierendes Beispiel

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \quad \text{auf } C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$D := \mathbb{1} + \Delta$$

Wir möchten für geg. $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $Df = g$ lösen

Lösung mittels Fouriertransf.:

$\cancel{f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{n}{2}}}}$

Erinnerung: Fouriertransformation

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\, d^n x$$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) =$$

Inverse Fourier-Transf.:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(\xi)\, d^n\xi$$

Eigenschaften von $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$:

$$S(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : |x^\alpha D_x^\beta f| < \infty \}$$

für $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

$D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \cdots D_{x_n}^{\beta_n}, \quad D_{x_i} = (\frac{1}{i} \partial_{x_i})$

(Schwartz-Fkt)

$$\mathcal{F}^{-1}, \mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi =: \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)\, đ\xi!$$

also $đ\xi := \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{n}{2}}} d\xi$

$$Df(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$\overset{\text{ÜA}}{=} f(x) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\,\xi_i)^2 e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right) \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$\Rightarrow \widehat{Df}(\xi) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) \hat{f}(\xi)$$

Unter der Fourier-Transformation ist der Diff-Op. D zu einer einfachen Multiplikation geworden.

$$Df = g \Leftrightarrow \widehat{Df} = \hat{g} \Leftrightarrow \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) \hat{f} = \hat{g}$$

$$\Leftrightarrow \hat{f} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}\, \hat{g}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + \|\xi\|^2}\, \hat{g} \right)(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{1}{1 + \|\xi\|^2}\, \hat{g}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{1}{1 + \|\xi\|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} g(y)\, dy\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\xi} \frac{1}{1 + \|\xi\|^2}\, g(y)\, dy\, d\xi$$

Interpretation:

1) $\sigma_D(\xi) := 1 + \|\xi\|^2$ ist das Symbol des Differentialop. D

$$\widehat{Df} = \sigma_D \hat{f}$$

2) D^{-1} kann nun über das Symbol definiert werden.

Falls $\sigma_D(\xi) \neq 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$ setze

$\sigma_{D^{-1}}(\xi) := \sigma_D(\xi)^{-1}$. Dann heißt D „elliptisch"

T_pM – Tangentialraum $= \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$

T_p^*M – Kotangentialraum, dual zu T_pM

$= \operatorname{span}\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$

$\Lambda^k T_p^* M$ – äußeres k-Produkt $= \operatorname{span}\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\}$

$\Omega^k(M) := \{ f: M \to \coprod_{p \in M} \Lambda^k T_p^* M \mid f(p) \in \Lambda^k T_p^* M \text{ glatt in } p\}$

Diff-Formen

$T_p^*M = \Lambda^1 T_p^* M$

<u>de Rham-Komplex</u>

$d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ äußere Ableitung

Auf Funktionen $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \in \Omega^1(M)$

$d: C^\infty(M) = \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$

(Ω^*, d) de Rham-Komplex

Hodge-de Rham-Theorem:

$\Omega^*(M) = \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im} \underset{?}{\underset{\sim}{d^t}} \oplus \mathcal{H}^*$

Kohomologie

<u>Weitere Anwendung: Spektraltheorie</u>

Vibrierende Membran  $= M$

(M, g) Riemann-Mfkt Δ – Laplace-Beltrami

Δ besitzt eine diskrete Menge $(\lambda_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$

von Eigenwerten und Eigenfunktionen $\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i$

Diese entsprechen den Eigenfrequenzen der Membran

$$Df = \mathcal{F}^{-1}(\sigma_D(\cdot)\hat{f})$$

$$D^{-1}g := \mathcal{F}^{-1}(\sigma_{D^{-1}}(\cdot)\hat{g})$$

$$Df = g \Rightarrow f = D^{-1}g$$

D^{-1} ist kein Diff.operator sondern ein sog. Pseudo-Diff.op.

<u>Vorlesungsinhalte</u> (analytisch)

- elliptische Operatoren
- Pseudo-Differentialoperatoren („ΨDO")
- Kalkül elliptischer ΨDO
- Regularität von Lsg.

<u>Zentrale Anwendung</u>

(M, g) Riemannsche Mfkt., d.h. g Riemannsche Metrik, d.h.
$\forall p \in M: g_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}^+$ ist ein Skalarprodukt,
g glatt in $p \in M$

genauer: Seien $(x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten in einer Umgebung von $p \in M$. Dann $\underbrace{T_pM = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}}_{\cong \mathbb{R}^n}$

und bzgl. dieser Basis hat g_p die Matrix-Darstellung

$$g_p = (g_{ij}(p))_{i,j=1\dots n}$$

$(g_{ij}(p))_{ij}$ ist positiv definit,
Einträge sind glatte Fkt. von p

KAPITEL A: Differentialformen

§1 Algebraischer Exkurs: Tensoralgebra und äußere Algebra.

Sei K Körper mit $\mathrm{char}(K)=0$. Alle VR seien endlich-dim.

<u>Def:</u> Das Tensorprodukt zweier VR V, W ist ein VR $V \otimes W$ mit einer bilinearen Abb.

$$\beta : V \times W \to V \otimes W$$
$$(v, w) \mapsto v \otimes w$$

mit folgender Universaleigenschaft:

Für jede bilineare Abb. $h : V \times W \to U$, U VR ex. genau eine lineare Abb. $\bar{h} : V \otimes W \to U$ so dass

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\beta"'] & U \\ & V \otimes W \arrow[u, "\bar{h}"'] \end{tikzcd}$$

Bem: Dies legt $V \otimes W$ bis auf kanon. Isomorphismus fest.

Explizite Konstruktion des Tensorproduktes:

$\{v_i\}_i$ Basis von V, $\{w_j\}_j$ Basis von W,

$\{v_i^*\}_i$ duale Basis von V^*, $\{w_j^*\}_j$ duale Basis von W^*.

Dann setze $V \otimes W$ als den VR der bilinearen Abb. $V^* \times W^* \to K$ und $\{v_i \otimes w_j\}_{i,j}$ mit

$(v_i \otimes w_j)(v_k^*, w_\ell^*) := \delta_{ik}\delta_{\ell j}$ ist Basis von $V \otimes W$

Satz

Die obige explizite Konstruktion erfüllt obige universelle Eigenschaft.

Bew: In unserem Fall $\beta: V \times W \to V \otimes W$, $v_i, w_j \mapsto v_i \otimes w_j$

Sei $h: V \times W \to U$ bilineare Abb., U VR.

Setze $\bar{h}: V \otimes W \to U$, $\bar{h}(v_i \otimes w_j) = h(v_i, w_j)$

Dies ist die einzige lineare Abb. für die

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. $\square$

Analog lässt sich $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ als VR aller multilinearen Abb. $V_1^* \times \dots \times V_n^* \to K$ definieren.

Def „Tensor-Algebra"

$$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V), \quad T^n(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n\text{-mal}}$$

heißt „Tensor-Algebra von V"

$T(V)$ wird tatsächlich zu einer Algebra mit $\mathbb{Z}_+$-Graduierung mittels $T^r(V) \otimes T^s(V) \subseteq T^{r+s}(V)$

Def „äußere Algebra"

Sei $J(V)$ das von $\{v \otimes v \mid v \in V\}$ erzeugte zweiseitige Ideal in der Algebra $T(V)$, d.h.

$$J(V) = \Big\{ \sum_{\text{endl.}} \dots \otimes v \otimes v \otimes \dots \mid v \in V \Big\} \subseteq T(V)$$

$$J^n(V) := J(V) \cap T^n(V)$$

Dann heißt $\Lambda(V) := T(V)/J(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)/J^n(V) =: \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(V)$

die äußere Algebra von V.

Nach Konstruktion sind Tensoren $^+$ mit zwei gleichen Elementen in der Nullklasse von $\Lambda(V)$. Die äußere Algebra wird zu einer Algebra wie folgt:

$$[x] \in \Lambda^n(V), \quad [y] \in \Lambda^m(V)$$

$$[x] \wedge [y] := \frac{(n+m)!}{n!\, m!} [x \otimes y]$$

ÜA: Zeige Wohldefiniertheit

Für ein explizites Verständnis von $\Lambda(V)$ brauchen wir die Antisymmetrisierungsabbildung:

Def

$$A_n : T^n(V) \to T^n(V)$$

$$\xi \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(\xi)$$

wobei $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \Rightarrow \sigma(\xi) = \xi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma(n)}$

$\ulcorner$ +

$$0 = [(v+w) \otimes (v+w)] = [v \otimes v + v \otimes w + w \otimes v + w \otimes w]$$

$$= [v \otimes w + w \otimes v] = [v \otimes w] + [w \otimes v]$$

$$\Rightarrow [v \otimes w] = -[w \otimes v]$$

$\lrcorner$

Prop.

Sei $\xi \in T^n(V)$. Dann $[\xi] = [A_n(\xi)] \in \Lambda^n(V)$

Bew: $A_n(\xi) - \xi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}(\sigma)\, \sigma(\xi) - \xi)$, also g.z.z. $\mathrm{sgn}(\sigma)\, \sigma(\xi) - \xi \in J^n(V)$. Dies folgt aus $^+$. $\square$

Aus der Prop. folgt die Identifikation

$$\phi : \bigoplus_{n \geq 0} A_n(T^n(V)) \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(V)$$

$$A_n(\xi) \longmapsto [A_n(\xi)]$$

Definiere auf der linken Seite ein Produkt.

$$\xi \in A_p(T^p(V)), \quad \eta \in A_q(T^q(V))$$

$$\xi \wedge \eta := \frac{(p+q)!}{p!\,q!} A_{p+q}(\xi \otimes \eta)$$

<u>Satz</u>

ϕ wie oben ist Isomorphismus der $\mathbb{Z}_+$-graduierten Algebren

Bew: Surjektivität: $[\xi] = [A_n(\xi)]$

Injektivität: $[A(\xi)] = [A(\eta)] \Leftrightarrow A_n(\xi) = A_n(\eta) + \rho, \ \rho \in J^n(V)$

ÜA: Es gilt $A_n \circ A_n = A_n$ und $J(V) \subseteq \ker(A_n)$

$\Rightarrow A_n(\xi) = A_n(\eta) + A_n(\rho) = A_n(\eta)$

b.z.z.: $[A_n(\xi)] \wedge [A_n(\eta)] = [A_n(\xi) \wedge A_n(\eta)]$

folgt aus der Konstruktion

$\square$

Ab jetzt kann man statt mit $\bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(V)$ mit $\bigoplus_{n \geq 0} A_n(T^n(V))$ arbeiten.

<u>Bsp:</u> $V = \mathbb{R}^3 = \langle v, w, u \rangle$

$\Lambda^1 \mathbb{R}^3 \cong A_1(T^1(\mathbb{R}^3)) = \langle v, w, u \rangle = \mathbb{R}^3$

Allgemein gilt $\Lambda^1(V) \cong V$

$\Lambda^2 \mathbb{R}^3 \cong A_2(T^2(\mathbb{R}^3)) = A_2(\langle v \otimes w, w \otimes u, v \otimes u, w \otimes v, u \otimes w, u \otimes v$

$= \operatorname{span}\{A_2(v \otimes w), A_2(w \otimes u), A_2(v \otimes u)\}$

$= \operatorname{span}\{v \otimes w - w \otimes v, w \otimes u - u \otimes w, v \otimes u, u \otimes w\}$

$\overset{\phi}{\cong} \operatorname{span}\{[v \wedge w], [w \wedge u], [v \wedge u]\}$

$$\Lambda^3 \mathbb{R}^3 \equiv A_3\left(T^3(\mathbb{R}^3)\right) = A_3(v \otimes w \otimes u, \dots)$$
$$= \langle v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u + \dots \rangle$$

Allgemein gilt $\dim \Lambda^{\dim V}(V) = 1$

$$\Lambda^4 \mathbb{R}^3 \equiv A_4(v \otimes w \otimes u \otimes v, \dots) = 0$$

Allgemein gilt $\Lambda^n(V) = 0 \quad \forall\, n > \dim V$

Zusammengefasst:

Satz

Sei $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Für jedes $I = \{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n\}$ setze $v_I := [v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}]$.

Dann ist $\{v_I\}_{|I|=r}$ Basis von $\Lambda^r(V)$.

$\dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$, $\dim \Lambda^r(V) = 0$, $\forall\, r > n$.

$$\dim \Lambda(V) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Satz

Die äußere Algebra erfüllt folgende Universaleigenschaft:
$\Lambda^* V$ ist ein VR. mit einer alternierenden multilinearen Abb. $\beta : V \times \dots \times V \to \Lambda^* V$
$$\beta(\dots, v, w, \dots) = -\beta(\dots, w, v, \dots)$$
so dass für jeden weiteren VR U mit einer alternierenden multilinearen Abb. $h : V \times \dots \times V \to U$ existiert genau eine lineare Abb. $\bar{h} : \Lambda^* V \to U$ so dass

$$\begin{tikzcd}
V \times \dots \times V \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\beta"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \\
& \Lambda^* V \arrow[ur, "\bar{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aus der univ. Eigenschaft folgt

$$\Lambda^* V \cong \bigoplus_{r=0}^{\dim V} A_r(T^r(V))$$

$$\cong \{\phi : V^* \times \ldots \times V^* \to K \mid \phi \text{ multilinear, alternierend}\}$$

Orientierung

Def. Eine Orientierung auf V ist die Wahl einer $\ulcorner n = \dim V \lrcorner$ Zusammenhangskomponente $\Lambda^n_+ V$ von $\Lambda^n V \setminus \{0\}$.
Eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von V heißt positiv orientiert, falls $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in \Lambda^n_+ V$

Falls $(v_1, \ldots, v_n)$ eine weitere Basis von V ist, mit $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, dann $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det(a_{ij})\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$

Sei $g : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, d.h. positiv definit, sym. u. bilinear, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine pos. orientierte Basis von V.
Mit Gram-Schmidt konstruiere Orthonormalbasis bzgl. g, d.h. $\{v_1, \ldots, v_n)$ sodass $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda^n_+ V$, $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$
Man kann jetzt g auf $\Lambda^k V$ erweitern mit der Forderung „$\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}\}$ bilden ONB bzgl. g".

Satz: Sei V orientiert, g ein Skalarprodukt, erweitert wie oben auf $\Lambda^* V$. Dann ex. genau ein „Volumenelement" $\omega_g \in \Lambda^n_+ V$ mit $g(\omega_g, \omega_g) = 1$

Theorem Seien V, g wie oben, ω_g das pos. orientierte Volumenelement. Dann ist die folgende Bilinearform

$$(\cdot, \cdot) : \Lambda^k V \times \Lambda^{n-k} V \to \mathbb{R}$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto g(\omega \wedge \eta, \omega_g)$$

nicht ausgeartet. Insbesondere erhält man einen Isomorphismus

$\Lambda^k V \cong \Lambda^{n-k} V$

$\eta \longmapsto *\eta$

$\ulcorner$ $(\cdot,\cdot) : W \times U \to \mathbb{R}$ nicht ausgeartete ~~Skalarprodukt~~ Bilinearform, dann $W \cong U^* \cong U$ mittels $w \mapsto (w, \cdot)$ $\lrcorner$

sodass
$$g(\omega, \eta) = g(\omega \wedge *\eta, \omega_g)$$
$$\iff \omega \wedge *\eta = g(\omega, \eta) \cdot \omega_g$$

$\ulcorner$

$$\underset{\Lambda^k V}{\eta} \longmapsto \underset{(\Lambda^{n-k} V)^*}{(\eta, \cdot)} = (\cdot, *\eta) \longleftarrow\!\shortmid \underset{\Lambda^{n-k} V}{*\eta}$$

$$g(\omega, *\eta) = g(\omega \wedge **\eta, \omega_g)$$

$\lrcorner$

§ 2 Die äußere Algebra des Kotangentialraumes

! Ab jetzt seien alle Mfkt kompakt u. orientiert.
Sei M^m geschlossene glatte m-Mfkt.

Sei $p \in M$, (U, φ) Karte um p mit $\varphi(p) = 0$ und $\{x_1, \dots, x_m\}$ lokale Koordinaten.

Der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ ist dann wie folgt definiert:

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ diffbare Abb.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f := \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)=0} (f \circ \varphi^{-1})$$

Der Tangentialraum an p ist dann

$$T_pM := \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p \right\}$$

Falls (U', φ') weitere Karte ist mit $p \in U' \cap U$
und $x_i' = x_i'(x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten bzgl. φ',
dann $T_pM = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \mid i = 1..m \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_i'}\Big|_p \mid i = 1..m \rangle$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j'}\Big|_p \quad \text{(Kettenregel)}$$

<u>Def.</u> Das Tangentialbündel $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$

<u>Theorem</u> TM besitzt eine durch M induzierte kanonische differenzierbare Struktur einer $2m$-Mfkt.

Mit der Kettenregel lässt sich T_pM wie folgt definieren:
T_pM besteht aus allen Abb. $v : (U, \varphi) \mapsto v^\varphi \in \mathbb{R}^m$

sodass für alle (U,φ), (U',φ') mit $p \in U \cap U'$ gilt:

$$v^{\varphi'} = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(p)} \right)_{ij} v^{\varphi}$$

Beweis des Theorems:

Sei (U,φ) lokale Karte auf M mit lokalen Koord.
$(x_1, \dots, x_m) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p))$

Setze $\psi : TU := \coprod_{p \in M} T_pM \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

$$(p, v) \mapsto (\varphi(p), v^{\varphi}(p))$$

Betrachte die natürliche Projektion $\pi : TM \to M$.
Induziere auf TM eine Topologie sodass π zu einer stetigen Abb. wird. Wähle auf Fasern T_pM die Topologie des $\mathbb{R}^m$. Dann ist ψ ein Homeomorphismus.
ÜA: Kartenwechsel sind glatt.

<u>Def</u> Kotangentialraum

Für $p \in M$ $T_p^*M := (T_pM)^*$ heißt Kotangentialraum.
Sei $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p \right\}$ Basis von T_pM (in (U,φ)),
dann ist $\{ dx_1|_p, \dots, dx_m|_p \}$ die duale Basis von T_p^*M.

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

Trafo-Regel: $d\tilde{x}_i|_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} dx_j$ (ÜA)

($\tilde{x}_i$ lokale Koord. auf $\tilde{U}$)

Def Kotangentialbündel

$$TM^* := \coprod_{p\in M} T_p^* M$$

Theorem: T^*M hat eine durch M induzierte kanonische diff. Struktur einer $2m$-Mfkt.

$$T_p^*M = \langle dx_1|_p, \dots, dx_m|_p \rangle$$

$$\Lambda^k T_p^* M = \langle \{ dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le m \} \rangle$$

Transformationsregel:

$$d\tilde{x}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_{j_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\frac{\partial \tilde{x}_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}_{j_k}}{\partial x_{i_k}} \right) dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}$$

Def.

$$\Lambda^k T^* M := \coprod_{p\in M} \Lambda^k T_p^* M$$

$$\Lambda^* T^* M := \bigoplus_{k=0}^{m} \Lambda^k T^* M \qquad \text{wobei } \Lambda^0 T^* M = M \times \mathbb{R}$$

$$\overset{\shortparallel}{\Lambda T^* M}$$

$\Lambda^* T^* M$ heißt die äußere Algebra auf M.

Theorem $\Lambda^k T^* M$ hat eine durch M induzierte kanonische diffbare Struktur einer $(m + \binom{m}{k})$-Mfkt.

§3 Differentialformen

Def Eine Differentialform ω vom Grad k ist eine glatte Abb. $\omega: M \to \Lambda^k T^* M$ mit $\omega(p) \in \Lambda^k T_p^* M \;\; \forall p \in M$.

Lokale Darstellung:

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \underbrace{\omega_{i_1 \dots i_k}(x)}_{\text{glatte Abb. } \mathbb{R} \to \mathbb{R}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \qquad x = \varphi(p)$$

Insbesondere sind Differentialformen alternierende multilineare Abb. $TM \times \dots \times TM \to C^\infty(M)$

$$f(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right]$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) f(x)\, dx_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes dx_{\sigma(i_k)} \left[\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right]$$

$$E = \coprod_{p \in M} E_p, \quad F = \coprod F_p \quad \text{Faserbündel}$$

$$\Rightarrow E \times F := \coprod E_p \times F_p$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) f(x) \cdot \prod_{l=1}^{k} dx_{\sigma(i_l)} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_l}} \right) = f(x) \det\left(dx_{i_l}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_s}} \right) \right)_{l,s}$$

Bsp $M = \mathbb{R}^3$

1) Diff-formen 0-ten Grades: $\omega: M \to \Lambda^0 T^* M = M \times \mathbb{R}$
$\omega(p) \in \{p\} \times \mathbb{R}$
d.h. $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

2) Diff-formen 1-ten Grades: $\omega = f_1(x)\,dx_1 + f_2(x)\,dx_2 + f_3(x)\,dx_3$
denn $\Lambda^1 T_p^* M = \langle dx_1, dx_2, dx_3 \rangle = T_p^* M$
$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}$

3) Diff-Formen 2-ten Grades:

$$\omega = f_{12}(x)\,dx_1 \wedge dx_2 + f_{23}(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_{13}(x)\,dx_1 \wedge dx_3$$

$$dx_1 \wedge dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = dx_1 \otimes dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) - dx_2 \otimes dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$= dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) - dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) & dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\ dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) & dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

Insbesondere erkennen wir eine wichtige Rechenregel:

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) = \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right) & \cdots & dx_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) & \cdots & dx_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) \end{pmatrix}$$

<u>Def</u> $\Omega^k(M) := \{\omega \mid \omega \text{ Diff-Form } k\text{-ten Grades}\}$

$= \{\omega : M \to \Lambda^k T^*M \mid \omega \text{ glatt}, \ \omega(p) \in \Lambda^k T_p^* M\}$

<u>Def</u> Orientierung einer Mfkt

Eine Orientierung auf M ist die Wahl einer nirgends verschwindenden Diff-Form $\omega \in \Omega^m(M)$.

$\omega : M \to \Lambda^m T^*M \setminus \{0\}$

$\omega(p) \in \Lambda^m_{\oplus} T_p^* M$

per Def.

Theorem

Sei M zusammenhängende Mfkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) M ist orientierbar

ii) $\Lambda^m T^*M \cong M \times \mathbb{R}$ (triviales Bündel)

iii) Es ex. ein Atlas auf M, so dass die Jakobi-Matrizen der Koordinatenwechsel alle positive Determinante haben.

Def Eine Riemannsche Metrik ist eine glatte (in p), positiv definite symmetrische Bilinearform

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \qquad p \in M$$

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x)\, dx_i \otimes dx_j, \quad g_{ij} \text{ glatt in } x := \varphi(p)$$

Theorem Jede glatte Mfkt besitzt eine Riemannsche Metrik.

Bew.skizze:

Whitney: Man kann jede Mfkt in $\mathbb{R}^N$ einbetten

$\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $d\iota : TM \to \mathbb{R}^N$

in lokalen Koord: $\iota(x_1, \dots, x_m) = (\iota_1(x), \dots, \iota_N(x))$

$$\underbrace{d\iota(x)}_{\text{totale Diferential}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \iota_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \iota_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \iota_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \iota_N}{\partial x_m} \end{pmatrix} : TM \to \mathbb{R}^N$$

Setze $g^M\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g^{\mathbb{R}^N}\left(d\iota\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), d\iota\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)$

eukl. Skalarprodukt

$$= g^{\mathbb{R}^N}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \iota_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \iota_N}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \iota_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \iota_N}{\partial x_j} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \iota_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \iota_\alpha}{\partial x_j}$$

d.h. $g^M = \sum_{ij} \left(\sum_\alpha \frac{\partial \iota_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \iota_\alpha}{\partial x_j} \right) dx_i \otimes dx_j$

Sei lokal $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p \right\}$ Basis von T_pM.

Orthonormiere diese Basis bzgl. des Skalarprodukts g_p mittels Gram-Schmidt

$\rightsquigarrow T_pM = \langle e_1|_p, \dots, e_m|_p \rangle$

<u>Erweiterung von g auf Diff-Formen</u>

- Wähle auf T_p^*M die Dualbasis $\{e_1^*|_p, \dots, e_m^*|_p\}$

  Setze $g_p : T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R}$

  $(e_i^*|_p, e_j^*|_p) \mapsto \delta_{ij}$

- Wie im algebraischen Fall erweitere g_p auf $\Lambda^k T_p^*M$ so dass $\{e_{i_1}^*|_p \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*|_p\}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ eine ONB bildet.

<u>Volumenform:</u> $(m = \dim M)$

$\omega_g(p) := e_1^*|_p \wedge \ldots \wedge e_m^*|_p \in \Lambda^m T_p^* M$ heißt „Volumenform"

Wiederhole die Konstruktion auf allen Karten mit orientierten Koordinaten. Das liefert eine globale wohldef. m-Form mit
$\omega_g(p) = e_1^*|_p \wedge \ldots \wedge e_m^*|_p = \det \phi \cdot e_1'^*|_p \wedge \ldots \wedge e_m'^*|_p$
Da $\{e_i^*\}$, $\{e_i'^*\}$ ONB, folgt $\det \phi = \pm 1$. Wg. Orientierung $\det \phi = +1$.

In ursprünglichen Koordinaten $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ergibt sich

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \,,$$

$$g = \sum g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j \,, \quad (g_{ij}) \text{ ist sym., pos. definit.}$$

<u>Def.</u>

$* = *_g : \Lambda^k T_p^* M \to \Lambda^{m-k} T_p^* M$ heißt der „Hodge-Stern-Operator", falls für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^k T_p^* M$ gilt:

$$\alpha \wedge *\beta = g_p(\alpha, \beta) \cdot \omega_g$$

lokal: $*_g(e_1^* \wedge \ldots \wedge e_k^*) = e_{k+1}^* \wedge \ldots \wedge e_m^*$

§4 Operationen auf Differentialformen

Def Pullback

Sei $f: M \to N$ eine glatte Abb. von Mfkt., $\omega \in \Omega^k(N)$.

Dann setze $f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$

$$(f^*\omega)|_p (v_1, \dots, v_k) := \omega|_{f(p)} (T_pf(v_1), \dots, T_pf(v_k))$$

wobei $T_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$ das totale Differential von f sei,

d.h. falls $T_pM = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p \rangle$,

$$T_{f(p)}N = \langle \frac{\partial}{\partial y_1}|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_{f(p)} \rangle$$

dann $T_pf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$

Proposition

Seien $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Z$ glatte Abb. zwischen Mfkt.

Dann gilt:

i) Falls $\varphi \in C^\infty(N)$, dann $f^*\varphi = \varphi \circ f$

ii) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

iii) Ist f Diffeo, dann $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

iv) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$

Bsp

Lokale Koordinaten $\{x_1, \dots, x_m\}$ auf M, $\{y_1, \dots, y_n\}$ auf N, $f: M \to N$.

~~$f^* dy_1 (X)$~~

$$f^* dy_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = dy_1\left(T_p f\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = dy_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$= dy_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow f^* dy_1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j$$

Def „äußere Ableitung"

Sei M glatte Mfkt. Dann ex. zu jedem Grad k eine eindeutige lineare Abb.

$$d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

so dass

i) Für $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^\ell(M)$ ist
$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$$

ii) Für $f \in C^\infty(M)$, X ein Schnitt auf TM, lokal $X = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
$$df(X) = X(f) = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

iii) $d \circ d = 0$

iv) d ist kompatibel mit Einschränkungen, d.h. für offene Teilmengen $U \subseteq V \subseteq M$ gilt

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(V) \arrow[r, "d"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Omega^{k+1}(V) \arrow[d] \\ \Omega^k(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(U) \end{tikzcd}$$

Die hierdurch eindeutig festgelegte Abb. erfüllt ferner:

v) Für $\omega \in \Omega^k(M)$, $X^0, \dots, X^k \in \Gamma(TM)$ Schnitte von TM:

$$d\omega(X^0, \dots, X^k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X^i \omega(X^0, \dots, \hat{X}^i, \dots, X^k)$$

$$+ \sum_{0 \le i < j \le m} (-1)^{i+j} \omega(\underbrace{[X^i, X^j]}_{\text{Lie-Klammer}}, X^0, \dots, \hat{X}^i, \dots, \hat{X}^j, \dots, X^k)$$

insbesondere $d(f\, dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

vi) Für $f: M \to N$ glatt: $f^*(d\omega) = df^*\omega$

Beweisidee:

Eindeutigkeit: Sei (U, φ) lokale Karte

$$d(f \cdot dx_I) = d(f \wedge dx_I)$$

$$\| $$

$$d(f \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \overset{i)}{=} (df) \wedge dx_I + f \wedge d(dx_I)$$

$$\overset{iii)}{=} (df) \wedge dx_I$$

$$\overset{ii)}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_I$$

Diese Darstellung gilt in allen Karten und wg. iv) global

Existenz: Nehme v) als Def. und zeige vi) und dass $\omega \in \Omega^k \mapsto d\omega \in \Omega^{k+1}$

<u>Def.</u>

$(\Omega^*(M), d)$ heißt „de Rham-Komplex von M"

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \to 0$$

§5 Bezug zur Vektoranalysis

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \qquad g^{ij} := g(dx_i, dx_j)$$

$$(g_{ij})_{ij} = \left(g^{ij}\right)_{ij}^{-1}$$

<u>Musische Operationen:</u>

$$dx_i^\# := \sum_{j=1}^m g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\flat := \sum_{j=1}^m g_{ij}\, dx_j$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\flat \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_j g_{ij}\, dx_j \frac{\partial}{\partial x_k} = g_{ik} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\flat = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \cdot\right)$$

$$(dx_i)^\# dx_k = g^{ik} = g(dx_i, dx_k)$$

$$\Rightarrow (dx_i)^\# = g(dx_i, \cdot)$$

<u>Def.</u>

Sei M geschlossene Mfkt mit einer Riemannschen Metrik g. Dann ist

$$\operatorname{grad}^g : C^\infty(M) \to \Gamma(TM)$$

⌈ $\Gamma(TM)$ = glatte Schnitte von TM ⌋

definiert durch

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^1(M) \arrow[d, shift right, "\#"'] \\ C^\infty(M) \arrow[r, "\operatorname{grad}^g"] & \Gamma(TM) \arrow[u, shift right, "\flat"'] \end{tikzcd}$$

d.h. $\operatorname{grad}^g(f) = (df)^\# = \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right)^\# = \sum_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}$

Falls $M = \mathbb{R}^m$, $g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ Euklidisches Skalarprodukt

dann $\operatorname{grad}(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$

<u>Def.</u>

$\operatorname{div}^g : \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$

definiert durch

$\operatorname{div}^g(X) = * d * X^\flat$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{m-1}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^m(M) \arrow[d, "*"] \\
\Gamma(TM) \arrow[u, "* \circ \flat"] \arrow[r, "\operatorname{div}^g"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & C^\infty(M)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Es gilt: $\operatorname{div}^g(X) = \operatorname{div}^g\left(\sum_j X_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{\det g}\, X_j\right)$

Falls $M = \mathbb{R}^m$, $g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

dann $\operatorname{div}(X) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} X_j$

Falls $m = \dim(M) = 2$ ergibt sich

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\#"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^2(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\
C^\infty(M) \arrow[r, "\operatorname{grad}"'] & \Gamma(TM) \arrow[r, "\operatorname{div}"'] \arrow[u, shift right, "\flat"'] & C^\infty(M)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = 0$

Def

Sei $\dim(M) = m = 3$.

$\mathrm{rot}: \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$

sei definiert durch

$$\begin{tikzcd} \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\#"'] & \Omega^2(M) \arrow[d, shift right, "\#\circ *"'] \\ \Gamma(TM) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] \arrow[u, shift right, "\flat"'] & \Gamma(TM) \arrow[u, shift right, "*\circ\flat"'] \end{tikzcd}$$

d.h. $\mathrm{rot}(X) = (* d X^\flat)^\#$

Falls $M = \mathbb{R}^3$, $g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich rot wie bekannt.

Insgesamt für $\dim M = 3$:

$$\begin{tikzcd} \Omega^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\#"'] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\#\circ *"'] & \Omega^3(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\ C^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \Gamma(TM) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] \arrow[u, shift right, "\flat"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \Gamma(TM) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] \arrow[u, shift right, "*\circ\flat"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & C^\infty(M) \end{tikzcd}$$

§6 Integration von Diff-Formen und Satz von Stokes

Betrachte einen Atlas orientierter Karten für M $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$

d.h. auf $U_i \cap U_j$ ist $\det D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) > 0$. $m := \dim M$

<u>Proposition</u>

Es ex. eine eindeutige lineare Abb.

$$\int_M : \Omega^m(M) \to \mathbb{R}$$

die invariant unter Diffeomorphismen ist und in lokalen Koord. mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt.

$$\int_M f(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = \int_{U\subseteq\mathbb{R}^m} f(x)\, dx_1 \cdots dx_m$$

Beweis:

1) Lokale Konstruktion: Sei $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U$ mit (U, φ) Karte. $\operatorname{supp}(\omega) := \overline{\{x\in M \mid \omega(x) \neq 0\}}$

Wegen Diffeo-Invarianz setze

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^m} (\varphi^{-1})^* \omega$$

Falls (V, ψ) eine gleich orientierte Karte ist und $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U \cap V$ dann sei $(\varphi^{-1})^*\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$

$$\Rightarrow (\psi^{-1})^*\omega = (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})^*\omega = (\varphi \circ \psi^{-1})^* \circ (\varphi^{-1})^*\omega$$

$$= (\varphi \circ \psi^{-1})^* f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

$$\overset{\text{ÜA}}{=} \det D(\varphi \circ \psi^{-1})\, f(\varphi \circ \psi^{-1}(\cdot))\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m$$

Mit dem Transformationssatz folgt

$$\int (\psi^{-1})^*\omega = \int (\varphi^{-1})^*\omega$$

d.h. lokale Def. ist unabhängig von den gewählten Koord.

2) Globale Konstruktion:

Wähle $\rho_1, \dots, \rho_k \in C^\infty(M)$

mit $\sum_i \rho_i = 1$, $\operatorname{supp}(\rho_j) \subseteq U_j \ \forall j$

Setze $$\int_M \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_M \rho_j \omega$$

Diese Def. ist unabhängig von der Wahl der ρ_i. $\square$

<u>Korollar</u>

Sei $\phi: M \to N$ Diffeo, $m = \dim(M) = \dim(N)$.
Dann

$$\int_M \phi^* \omega = \int_N \omega \quad \text{für } \omega \in \Omega^m(N)$$

Stokes' Theorem:

Version 1:

Halbraum $H = \{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \leq 0 \}$

$\partial H = \{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0 \}$

$\iota : \partial H \hookrightarrow H$ Inklusion

$\iota^* : \Omega^*(H) \to \Omega^*(\partial H)$ ist die Einschränkung

$$\iota^*(f)(x_2, \dots, x_m) = (f \circ \iota)(x_2, \dots, x_m) = f(0, x_2, \dots, x_m)$$

$$\iota^*(dx_k) = \begin{cases} dx_k, & k = 2, \dots, m \\ 0, & k = 1 \end{cases}$$

Proposition (Stokes auf Halbräumen)

Sei $\omega \in \Omega^{m-1}(H)$ mit $\operatorname{supp}(\omega)$ kompakt.

Dann $$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \iota^* \omega$$

Beweis:

Schreibe $\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m$.

$$d\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} dx_k \wedge (dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

$$\int_H d\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_H \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m .$$

Betrachte die einzelnen Summanden:

$$j \geq 2: \int_H \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \overset{\text{Fubini}}{=} \int \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j}_{=0, \text{ da } \operatorname{supp}(\omega) \text{ kpt.}} \Big) dx_1 \ldots$$

$$j = 1: \int_H \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = \int \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1}_{= f_1(0, x_2, \ldots, x_m)} \Big) dx_2 \ldots dx_m$$

$$= \int_{\partial H} f_1(0, x_2, \ldots, x_m) \, dx_2 \ldots dx_m = \int_{\partial H} \iota^* \omega$$

Theorem (Stokes)

Sei M eine kpt. Mfkt. mit Rand ∂M, wobei M orientiert und ∂M mit der induzierten Orientierung versehen ist. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega$$

Beweis:

Seien $\rho_1, \dots, \rho_k \in C^\infty(M)$ mit $\sum_i \rho_i = 1$, $\operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq U_i$ wobei (U_i, φ_i) Atlas.

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^k \int_M d(\rho_j \cdot \omega) = \sum_{j=1}^k \int_H (\varphi_j^{-1})^* (d(\rho_j \cdot \omega))$$

$$= \sum_{j=1}^k \int_H d((\varphi_j^{-1})^* (\rho_j \cdot \omega)) = \sum_{j=1}^k \int_{\partial H} \iota^* (\varphi_j^{-1})^* (\rho_j \cdot \omega)$$

$$= \sum_{j=1}^k \int_{\partial H} \underbrace{(\varphi_j^{-1} \circ \iota)}_{\tilde{\varphi}_j^{-1}}{}^* \rho_j \omega = \sum_{j=1}^k \int_{\partial H} (\tilde{\varphi}_j^{-1})^* \iota^* \rho_j \cdot \omega$$

$$= \sum_{j=1}^k \int_{\partial M} \iota^* \rho_j \omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega \qquad \square$$

§7 de Rham Kohomologie

Def

Ein Komplex von K-Vektorräumen ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) besteht aus einem $\mathbb{Z}$-graduierten K-Vektorraum $E = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E^k$ und einem Homomorphismus

$$d : E^k \to E^{k+1}$$

sodass $d \circ d = 0$

$Z^k E := \ker d : E^k \to E^{k+1}$ heißen „Zykel"

$B^k E := \operatorname{im} d : E^{k-1} \to E^k$ heißen „Ränder"

$d \circ d = 0 \Rightarrow B^k E \subseteq Z^k E$

Def

$H^k E := Z^k E / B^k E$ heißt die k-te Kohomologie des Komplexes (E, d)

Bsp

$(\Omega(M), d)$ heißt de Rham-Komplex.

Die de Rham-Kohomologie $H^k(M)$ ist die Kohomologie des de Rham-Komplexes.

Bsp

$$0 \to \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$$

$B^0(\Omega(M)) = 0 \quad Z^0(\Omega(M)) = \ker d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$

sind die lokal konstanten Funktionen in $C^\infty(M)$

$$\Rightarrow H^0(M) = Z^0 / B^0 = Z^0 \cong \prod_{\substack{\text{Zshkpt} \\ \text{von } M}} \mathbb{R}$$

Def

Ein Homomorphismus von Komplexen (E, d_E), (F, d_F) ist eine lineare Abb. $f: E^k \to F^k$ $\forall k$, so dass

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E^k \arrow[r, "d_E"] \arrow[d, "f"] & E^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & F^k \arrow[r, "d_F"] & F^{k+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $d \circ f = f \circ d$.

Proposition

Ein Homomorphismus von Komplexen f induziert einen Homomorphismus auf der Kohomologie

$$H^k(f): H^k(E) \to H^k(F)$$

Beweis:

f bildet $Z^k(E)$ auf $Z^k(F)$ ab, da $0 = da \Rightarrow 0 = (f \circ d)a = (d \circ f)a$

f bildet $B^k(E)$ auf $B^k(F)$ ab, da $f(db) = d(f(b))$ $\square$

Für eine glatte Abb. $f: M \to N$ von (orientierten geschlossenen) Mfkt induziert das Pullback $f^*: \Omega(N) \to \Omega(M)$ einen Homomorphismus zwischen den de Rham-Komplexen, da $f^* \circ d = d \circ f^*$. Insbesondere liefert es eine Abb. auf der de Rham-Kohomologie $H(f^*): H^k(N) \to H^k(M)$

§8 Poincaré Lemma

Def

Zwei Homomorphismen von Komplexen

$$f, g : (E, d) \to (F, d)$$

heißen homotop, falls es einen Homom.

$$K : E^{k+1} \to F^k$$

gibt, sodass

$$dK + Kd = f - g$$

In diesem Fall gilt $H^k(f) = H^k(g)$

Beweis:

Falls $\omega \in Z^k E$ dann $[\omega] \in H^k E$ und $f(\omega) - g(\omega)$
$= dK\omega + Kd\omega = dK\omega \in B^k F$
$\Rightarrow [f(\omega) - g(\omega)] = 0$

Ziel: Konstruiere Homotopie für de Rham-Komplexe auf M und auf $M \times \mathbb{R}$.

Für fixes $t_0 \in \mathbb{R}$ sei $j_{t_0} : M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$, $p \mapsto (p, t_0)$

Setze $K : \Omega^{k+1}(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^k(M \times \mathbb{R})$

$$(K\omega)\big|_{(p,t)} = \int_{t_0}^{t} \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot\right)(p, t')\, dt'$$

Proposition

Sei $\pi: M \times \mathbb{R} \to M$ Projektion auf die erste Komponente.

Dann $dK + Kd = id - (j \circ \pi)^*$

Beweis:

Sei $\omega \in \Omega^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ von der Form

$\omega = \omega_1(t) \wedge dt + \omega_2(t)$ mit $\omega_1(t) \in \Omega^k(M)$, $\omega_2(t) \in \Omega^{k+1}(M)$ glatt in t.

$$\Rightarrow K\omega(t) = \int_{t_0}^{t} \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot\right)(t')\, dt' = \int_{t_0}^{t} (-1)^k \omega_1(t')\, dt'$$

$$\Rightarrow dK\omega = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t_0}^{t} \omega_1(t')\, dt'\right) \wedge dt + (-1)^k \int_{t_0}^{t} d_M \omega_1(t')\, dt'$$

$$= \omega_1(t) \wedge dt + (-1)^k \int_{t_0}^{t} d_M \omega_1(t')\, dt'$$

$$d\omega = d_M \omega_1(t) \wedge dt + (-1)^{k+1} \omega_2'(t) \wedge dt + (d_M \omega_2)(t)$$

$$\Rightarrow Kd\omega = (-1)^{k+1} \int_{t_0}^{t} (d_M \omega_1)(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \omega_2'(s)\, ds$$

$$(dK + Kd)\omega = \omega_1(t) \wedge dt + \omega_2(t) - \underbrace{\omega_2(t_0)}_{(j \circ \pi)^* \omega}$$

Korollar

Für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ liefert der Homom. auf den de Rham-Komplexen

$$j_{t_0}^* : \Omega(M \times \mathbb{R}) \to \Omega(M)$$

einen Isomorphismus auf der de Rham Kohomologie

$$j_{t_0}^* : H^k(M \times \mathbb{R}) \to H^k(M)$$

Insbesondere induzieren $j_{t_0}^*$, $j_{t_1}^*$ die gleiche Abb. auf der Kohomologie und zwar die Inverse von π^*.

Beweis:

$\pi \circ j = id_M \Rightarrow j^* \circ \pi^* = id_{\Omega(M)}$

Wegen der Existenz des Homotopie-Operators K folgt

$H(\pi^*) \circ H(j^*) = id$ □

Theorem

Seien $f, g: M \to N$ C^∞-Homotopie-äquiv. Abb., d.h.
es ex. eine glatte Abb. $F: M \times \mathbb{R} \to N$, so dass
$F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$.

Dann $H(f^*) = H(g^*): H(N) \to H(M)$

Beweis:

$f = F \circ j_0$, $g = F \circ j_1$

$$H(f^*) = H(j_0^* \circ F^*) = H(j_0^*) \circ H(F^*) \overset{\text{Korr.}}{=} H(j_1^*) \circ H(F^*)$$

$$= H(j_1^* \circ F^*) = H(g^*)$$

Bemerkung

Falls M, N homotopieäquivalente Mfkt sind, d.h. es ex.
glatte Abb. $f: M \to N$, $g: N \to M$, $f \circ g \simeq id_N$ $g \circ f \simeq id_M$
dann $H(g^*) \circ H(f^*) = id_{H^*(N)}$ und $H(f^*) \circ H(g^*) = id_{H^*(M)}$
und $H^*(M) \cong H^*(N)$

<u>Theorem</u> (Poincaré Lemma)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Sternumgebung, d.h. $\exists\, x_0 \in U$ sodass $\forall\, x \in U$ die Strecke $\overline{x_0, x}$ in U liegt. Dann

$$H^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$$

Insbesondere ist jede geschlossene k-Form $\omega \in Z^k U$ exakt für $k > 0$, d.h. $\omega \in B^k U$.

Beweis:

Wähle $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ sodass $g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

Setze $F: U \times \mathbb{R} \Rightarrow U \quad F(x,t) := x_0 + g(t)(x - x_0)$

wobei x_0 das Sternzentrum von U sei.

$\Rightarrow F(x,0) = x_0, \quad F(x,1) = x \quad \Rightarrow id_U \simeq c_{x_0} : \cdot \mapsto x_0$

Folglich gilt für $k > 0$: $id_{H^k(U)} = H(id_U^*) = H(c_{x_0}^*) = 0$

denn für jede k-Form ω ist $c_{x_0}^* \omega = 0$

$H^0(U) = \mathbb{R}$ da U zshg.

§9 Mayer-Vietoris-Sequenz

<u>Lemma</u> (Schlangenlemma)

Sei $0 \to (A^*, d) \xrightarrow{\varphi} (B^*, d) \xrightarrow{\psi} (C^*, d) \to 0$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen, d.h.

φ, ψ sind Homom. von Komplexen und $0 \to A^k \xrightarrow[\varphi]{} B^k \xrightarrow[\psi]{} C^k \to 0$

ist exakt $\forall k$.

Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$H^k(A) \xrightarrow{H(\varphi)} H^k(B) \xrightarrow{H(\psi)} H^k(C) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(A)$$

Dabei ist δ der Verbindungshomomorphismus, definiert wie folgt:

$$H^k(C) = Z^kC/_{B^kC} \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(A) = Z^{k+1}A/_{B^{k+1}A}$$

Bew.:

Sei $c \in Z^kC$, wähle $b \in B^k$ so dass $\psi(b) = c$.

Dann $\psi(db) = d(\psi(b)) = dc = 0$, d.h. $db \in \ker\psi$

$= \operatorname{im}\varphi \implies \exists\, a \in A^{k+1}: \; db = \varphi(a)$

Setze $\delta[c] = [a]$. δ ist wohldef. da $\varphi(da) = d\varphi(a) = ddb = 0$

Rest ÜA.

<u>Theorem</u> (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Sei M glatte Mfkt, $M = U \cup V$, $U, V \subseteq M$ offen.

Dann ist

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{\varphi} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\psi} \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

$$\omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V)$$

$$(\eta, \tau) \mapsto (\eta|_{U\cap V} - \tau|_{U\cap V})$$

exakt und wir erhalten mit dem Schlangenlemma die dazugehörige lange exakte Sequenz der Kohomologien.

Beweis:

$\varphi: \Omega^*(M) \to \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$
$\omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V)$ ist injektiv, denn falls $\varphi(\omega)=0$

$\Rightarrow \omega|_U = 0 \wedge \omega|_V = 0 \Rightarrow \omega = \omega|_{U\cup V} = 0$

$\psi(\varphi(\omega)) = \psi(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V} = 0 \Rightarrow \operatorname{im}\varphi \subseteq \ker\psi$

Sei $(\eta, \tau) \in \ker\psi$, d.h. $(\eta - \tau)|_{U\cap V} = 0 \Leftrightarrow \eta = \tau$ auf $U \cap V$, also lässt sich (η, τ) zu einer glatten Form $\omega \in \Omega^*(M)$ fortsetzen mit $\omega|_U = \eta$, $\omega|_V = \tau \Rightarrow (\eta, \tau) \in \operatorname{im}\varphi$.

B. z.z. ψ surjektiv: Wähle $\rho_U, \rho_V \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\rho_U) \subseteq U$, $\operatorname{supp}(\rho_V) \subseteq V$ und $\rho_U + \rho_V = 1$ (Zerlegung der 1)

Sei $\omega \in \Omega^*(U \cap V)$. Dann $(\rho_V \omega, -\rho_U \omega) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ und $\psi(\rho_V\omega, -\rho_U\omega) = (\rho_V\omega + \rho_U\omega)|_{U\cap V} = \omega$.

§10 Das Hodge de Rham Theorem

Sei M geschlossene orientierte Mfkt., g Riemannsche Metrik, $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, $n = \dim M$, der Hodge-Operator.

Wir definieren ein Skalarprodukt auf $\Omega^k(M)$:

Für $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ setze $\langle \omega, \eta \rangle := \int_M \omega \wedge * \eta$

Proposition

Die Adjungierte von $d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
d.h. die Abb. $d_k^t : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ so dass $\forall \omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$: $\langle d\omega, \eta \rangle = \langle \omega, d^t \eta \rangle$
ist gegeben durch

$$d_k^t = (-1)^{nk+1} * d_{n-k} *$$

Beweis:

$$\langle d\omega, \eta \rangle = \int_M d\omega \wedge * \eta = \int_M d(\omega \wedge * \eta) - (-1)^k \omega \wedge d * \eta$$

$$\underset{\partial M = \emptyset}{\overset{\text{Stokes}}{=}} (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d * \eta = (-1)^{k+1+k(n-k)} \int_M \omega \wedge ** d * \eta$$

$$= \langle \omega, (-1)^{\cdots} * d * \eta \rangle$$

Definition (Der Hodge-Laplace-Operator)

$$\Delta_k := d_k^t d_k + d_{k-1} d_{k-1}^t : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

Für $k=0$ ergibt sich der übliche Laplace-Operator $-\operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$.
Formen ω mit $\Delta \omega = 0$ heißen „harmonische Formen".

<u>Theorem</u> (Hodge-de-Rham-Theorem)

$$\Omega^k(M) = \ker \Delta_k \oplus \operatorname{im} d_{k-1} \oplus \operatorname{im} d_k^t$$

Insbesondere ist $H^k(M)$ kanonisch isomorph zu $\ker \Delta_k$, d.h. jede Kohomologieklasse besitzt einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten.

Ferner gilt: $H(*): H^k(M) \xrightarrow{\cong} H^{m-k}(M)$ („Poincare-Dualität")

Elemente des Beweises:

Orthogonalität der 3 Komponenten auf der rechten Seite:

Sei $\omega \in \ker d_p$ und $\eta \in \Omega^{p+1}(M)$.

$\Rightarrow \langle \omega, d_p^t \eta \rangle = \langle d_p \omega, \eta \rangle = 0$ also $\ker d_p \perp \operatorname{im} d_p^t$

Es gilt $\operatorname{im} d_{p-1} \subseteq \ker d_p \Rightarrow \operatorname{im} d_{p-1} \perp \operatorname{im} d_p^t$

Ähnlich zeigt man $\ker d_{p-1}^t \perp \operatorname{im} d_{p-1}$

Sei nun $\omega \in \ker \Delta_p$, d.h. $\Delta_p \omega = d_p^t d_p \omega + d_{p-1} d_{p-1}^t \omega = 0$

$$0 = \langle \Delta_p \omega, \omega \rangle = \langle d_p^t d_p \omega, \omega \rangle + \langle d_{p-1} d_{p-1}^t \omega, \omega \rangle$$
$$= \langle d_p \omega, d_p \omega \rangle + \langle d_{p-1}^t \omega, d_{p-1}^t \omega \rangle$$
$$\Rightarrow d_p \omega = 0, \ d_{p-1}^t \omega = 0$$
$$\Rightarrow \ker \Delta_p = \ker d_p \cap \ker d_{p-1}^t$$

$$(1) \left.\begin{array}{l} \ker d_p \perp \operatorname{im} d_p^t \\ \ker d_{p-1}^t \perp \operatorname{im} d_{p-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \ker \Delta_p \perp (\operatorname{im} d_p^t \oplus \operatorname{im} d_{p-1})$$

Poincare-Dualität:

$$\begin{tikzcd} \Omega^{p-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "*"'] & \Omega^p \arrow[r, "d"] \arrow[d, "*"] & \Omega^{p+1} \arrow[d, "*"] \\ \Omega^{m-p+1} \arrow[r, "d^t"'] & \Omega^{m-p} \arrow[r, "d^t"'] & \Omega^{m-p-1} \end{tikzcd}$$

Kommutiert bis auf Vorzeichen. D.h. $*$ ist ein Homomorphismus zwischen 2 Komplexen

$(\Omega^*(M), d)$, (Ω^{m-*}, d^t).

Insbesondere induziert es eine Abb. auf der Kohomologie

$$H^p(\Omega^*, d) = H^p(M) \longrightarrow H^p(\Omega^{m-*}, d^t) = H^p(M).$$

$H(*)$ ist Isomorphismus, denn $** = \pm 1$ und somit ist $*$, $H(*)$ invertierbar

(1). Hier nicht gezeigt: $\Omega^k(M) = \ker \Delta_p \oplus \operatorname{im} d_{p-1} \oplus \operatorname{im} d_p^t$

$$\ker d_p \perp \operatorname{im} d_p^t \Rightarrow \ker d_p \subseteq \ker \Delta_p \oplus \operatorname{im} d_{p-1}$$

$$\Rightarrow \ker d_p = \ker \Delta_p \oplus \operatorname{im} d_{p-1}$$

$$\Rightarrow \ker d_p / \operatorname{im} d_{p-1} = \frac{\ker \Delta_p \oplus \operatorname{im} d_{p-1}}{\operatorname{im} d_{p-1}} \cong \ker \Delta_p$$