§ Folgen holomorpher Funktionen 16.

Definition 16.1 Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, zshg (Gebiet) (f_n), $f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ Folge holomorpher Fkt; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.

- $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ konvergiert gleichmäßig, falls
$$\sup_{z \in \mathcal{U}} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
- $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ konvergiert lokal gleichmäßig, falls
$$\forall z_0 \in \mathcal{U} \ \exists\, \mathcal{U}_{z_0} \subset \mathcal{U} \text{ offen} : f_n|_{\mathcal{U}_{z_0}} \to f|_{\mathcal{U}_{z_0}} \text{ gleichmäßig}$$
- $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ konvergiert gleichmäßig auf Kompakta, falls
$$\forall K \subset \mathcal{U} \text{ kompakt}: f_n|_K \to f|_K \text{ gleichmäßig.}$$

Ü Lokale gleichm. Konv und gl. Konv. auf Kompakta sind äquivalent.

FRAGE: Lässt sich aus (lokaler) gleichm. Konv. etwas über die Grenzfunktion f aussagen?

Theorem 16.2 (Weierstraß) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, nichtleer (Gebiet) $(f_n) : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ Folge holom. Fkt, $f_n \to f$ lokal gleichm. Dann

- $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ist ebenfalls holomorph
- jede Folge der Ableitungen $f_n^{(j)} \to f^{(j)}$ lokal gleichmäßig.

<u>Beweis:</u> Wir benutzen folgende Aussagen der Analysis:

Sei $f_n|_K \longrightarrow f|_K$ gleichmäßig konv. auf einem Kompaktum $K \subset \mathcal{U}$. Dann ist f stetig und

$$\int_{\partial K} f_n \xrightarrow{n \to \infty} \int_{\partial K} f$$

Damit folgt zumindest, dass f stetig ist (da Kompaktum K beliebig gewählt werden kann) und für $K = \Delta$ abgeschloss. Dreieck in $\mathcal{U}$ gilt:

$$\int_{\partial \Delta} f(z)\,dz = \lim \underbrace{\int_{\partial \Delta} f_n(z)\,dz}_{=0} = 0$$

$= 0$ ~~wg. Satz von Morera~~
da f_n ja alle holomorph sind.

Nach Satz von Morera ist f ebenfalls holomorph.

Für die Konvergenz der Ableitungen beachte die Cauchy-Integralformel: für $z_0 \in \mathcal{U}$, $B_\varepsilon(z_0) \subset \mathcal{U}$, $\hat{z} \in B_{\varepsilon/2}(z_0)$

$$f^{(j)}(\hat{z}) = \frac{j!}{2\pi i} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{(z-\hat{z})^{j+1}}\,dz$$

$$\Rightarrow \left| f_n^{(j)}(\hat{z}) - f^{(j)}(\hat{z}) \right| \leq \frac{j!}{2\pi} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \left| \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-\hat{z})^{j+1}} \right| dz$$

$$\leq \frac{j!}{2\pi} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Länge}(\partial B_\varepsilon(z_0))}}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{j+1}} \cdot \max_{|z-\hat{z}| = \varepsilon/2} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

das Beweist gleichmäßige Konvergenz von Ableitungen auf $B_{\varepsilon/2}(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathcal{U}$, also $f_n^{(j)} \to f^{(j)}$ lokal glm. $\boxtimes$

<u>Definition 16.3</u> Sei $(f_n) : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Die Summen $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$

konvergieren NORMAL gegen eine Grenzfunktion, bezeichnet als $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, falls für alle $z_0 \in \mathcal{U}$ ex $\mathcal{U}_{z_0} \subset \mathcal{U}$

(i) $|f_n|_{\mathcal{U}_{z_0}}(z)| \leq M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$

Offensichtlich $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)$ lokal gleichmäßig.

Thm 16.2 (Weierstraß) $\Rightarrow \displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)$ ist holomorph.

<u>Beispiel:</u> Zeta-funktion. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$, $Re(z) > 1$

ü $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 1\}$; $f_n(z) := \frac{1}{n^z} = e^{-z\ln(n)}$

Die Reihe konvergiert normal ü, also ist die Zeta fns holomorph auf $\mathcal{U}$.

Neben Holomorphie lässt sich sogar Nullstellenverhalten der Grenzfunktion studieren

Theorem 16.4 (Hurwitz) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\neq \emptyset$

$f_n \longrightarrow f$ lokal glm Konv. Folge holom. Fkt.

Angenommen $f \not\equiv 0$. Für ein $z_0 \in U$ sind äquivalent

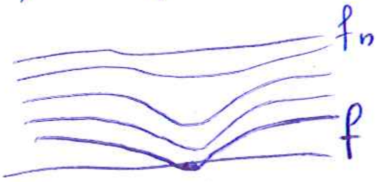
1) f hat an z_0 eine NST der Ordnung $m \geq 0$

2) $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \ \exists n(\varepsilon) \ \forall n \geq n(\varepsilon)$:

f_n besitzt in $B_\varepsilon(z_0)$ genau m Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten)

(Insbesondere: falls f_n in einer Umgebung von z_0 keine Nullstellen aufweisen, kann f in z_0 ebenfalls keine NST haben)

dh



kann im $\mathbb{C}$ nicht passieren!

~~Beweis:~~

Beweis: Da $f \not\equiv 0$, sind die Nullstellen von f isoliert (wären sie es nicht, wäre $f \equiv 0$ nach Identitätssatz)

(1) $\Rightarrow$ (2) Wähle damit $\varepsilon_0 > 0$ so dass $z_0 \in B_\varepsilon(z_0)$ die einzige Nullstelle ist. Setze für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\delta_\varepsilon := \min_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)| \underset{\neq}{\geq} 0$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta $\exists n_\varepsilon$ groß:

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad |f_n(z) - f(z)| < \delta_\varepsilon \text{ für } z \in \partial B_\varepsilon(z_0)$$

$$\Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$$

$\Rightarrow$ nach Rouché haben f, f_n in $B_\varepsilon(z_0)$ dieselbe Anzahl von Nullstellen

(2) $\Rightarrow$ (1): Ebenso mit Rouché zeigt man, f besitzt m NST auf $B_\varepsilon(z_0)$. Da $\varepsilon \to 0$ gewählt werden kann, muss f eine NST an z_0 der Vielfachheit m haben $\boxed{\text{//.}}$

Ü $\boxed{\text{Ist jedes } f_n \text{ injektiv, so ist auch } f \text{ inj oder konstant}}$