14.3 Residuensatz: Sei γ geschlossen, sich innerhalb vom Gebiet G auf einen Punkt zusammenziehbar. Sei $A \subset G$ diskret und f auf $G \setminus A$ holomorph. Dann

$A \cap \gamma = \emptyset$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in A} n(\gamma, z)\, \mathrm{Res}_z(f)$$

- $\mathrm{Int}(\gamma) = \{z \in G \mid n(\gamma, z) \neq 0\}$ ist kompakt und daher ist die Summe endlich.
- $\mathrm{Res}_z(f) = a_{-1}$ in der Laurentreihenentw um z.

Weitere Formeln siehe letzte Woche 2015.

Beweis: Seien $\{z_1, \dots, z_n\}$ die singulären Punkte in A.
Sei $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass $B_\varepsilon(z_j) \cap A = \{z_j\}$, $B_\varepsilon(z_j) \subset G$.
Durch Deformation von γ lässt sich zeigen

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z_j \in A} n(\gamma, z_j) \cdot \int_{\partial B_\varepsilon(z_j)} f(z)\,dz$$

Erinnerung: Bei der Laurententw $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \cdot (z - z_0)^j$ haben wir eine Integraldarstellung für a_j Laurentkoeff gezeigt:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}}\,dz$$

$\Rightarrow \int_{\partial B_\varepsilon(z_j)} f(z)\,dz = a_{-1}$ in der Laurentreihe um z_j $\cdot 2\pi i$

$= \mathrm{Res}_{z_j}(f) \cdot 2\pi i.$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z_j \in A} n(\gamma, z_j)\, \mathrm{Res}_{z_j}(f) \cdot 2\pi i$ $\boxtimes$

§ 15 Anwendungen des Residuensatzes

(I) Berechnung bestimmter Integrale

(15.1) a) Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

Sei $R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ mit $p, q \in \mathbb{C}[x,y]$

eine rationale Funktion ohne Singularitäten (NST von q)

auf der Kreislinie $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \cdot \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}_z \widetilde{R}(z) \quad \text{mit } \widetilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right); \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}$$

Beweis: Setze $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

eine geschlossene Kurve die einen Kreis umschreibt.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{R\left(\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}); \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})\right)}{ie^{it}} \cdot ie^{it}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{i} \widetilde{R}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \oint_\gamma \frac{1}{i} \widetilde{R}(z)\, dz$$

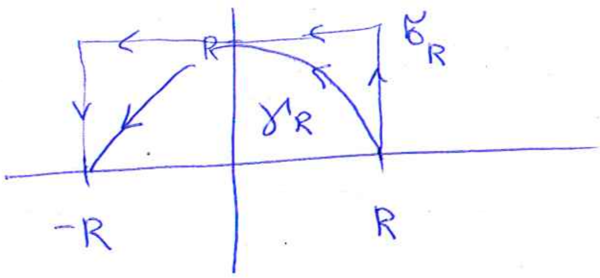
Jetzt lässt sich Residuensatz anwenden: $= 2\pi \sum_{\substack{z \text{ von } \gamma \\ \text{eingeschlossen}}} \operatorname{Res}_z \widetilde{R}(z)$

$\square$

Beispiel: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\lambda\cos^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda+1}}$ für $\lambda > -1$ (Ü)

b) *Uneigentliche Integrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

(15.2) **Satz**: Sei f meromorph auf $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ und sei die Singularitätenmenge von f endlich und vollständig in $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ enthalten.



Falls $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ oder $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0$, $(*)$

dann gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx \overset{!}{=} 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_z f$

(Ü) A → $(*)$ ist erfüllt, falls $\displaystyle\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |z|\cdot|f(z)| = 0$, also insbesondere falls f eine rationale Funktion vom Grad ≤ -2 ist (Grad Zähler − Grad Nenner)

(Ü) B → $(*)$ ist erfüllt, falls $|f(z)| \leq \rho(z)\, e^{-\lambda \cdot \operatorname{Im}(z)}$, $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$

insbesondere falls $f(z) = g(z)e^{iz}$ mit $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$

Warnung: $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx$ braucht nicht zu existieren.

$(\lambda > 0)$
mit ρ stetig auf $\mathbb{H}\setminus\{0\}$ und $\lim \rho(z) = 0$ für $|z|\to\infty$

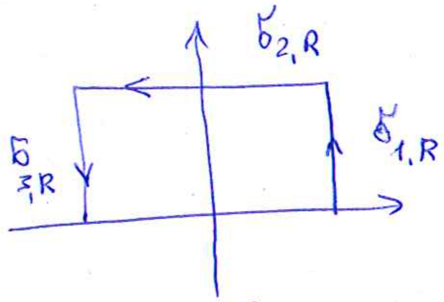
Beweis von (A):

$$\Big|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\Big| \le \sup_{|z|=R} |f(z)| \cdot \overbrace{\text{Länge}(\gamma_R)}^{=\pi R}$$

$$= \pi \cancel{R} \cdot \frac{1}{\cancel{R}} \cdot \sup_{|z|=R} |z|\cdot|f(z)| \longrightarrow 0$$

(analog mit σ_R, da Länge$(\sigma_R) = 4R$.)

Beweis von (B):



$$\Big|\int_{\sigma_R} f\Big| \le \Big|\int_{\sigma_{1,R}} f\Big| + \Big|\int_{\sigma_{2,R}} f\Big| + \Big|\int_{\sigma_{3,R}} f\Big|$$

- $$\Big|\int_{\sigma_{2,R}} f\Big| \le \underbrace{\text{Länge}(\sigma_{2,R})}_{=2R} \cdot \sup_{t\in[-R,R]} \rho(iR+t)\, e^{-\lambda R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

- $$\Big|\int_{\substack{\sigma_{1,R}\\ \sigma_{3,R}}} f\Big| \le \int_0^R \sup_{0\le t\le R} \rho(\pm R+it)\, e^{-\lambda t}\, dt$$

$$\le \frac{1}{\lambda} \sup_{0\le t\le R} \rho(\pm R+it) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

$\boxed{4}$

Beweis: Wähle $R>0$ so groß, dass $|z|<R$ für alle Singularitäten z gilt. Dann folgt aus dem Residuensatz:

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_z f$$

 $= \gamma_R \cup [-R,R]$

$$\Rightarrow \int_{-R}^{R} f = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_z f - \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

$$\left(\text{oder } - \int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right).$$

Damit folgt aus $(*)$ tatsächlich für $R\to\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_z f. \qquad \boxtimes$$

A + B Beweis siehe Blatt dahinter

Beispiel: "Die Fourier-Transformation"

$$g(z) := \frac{1}{z-i}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$f(z) := e^{-iz\xi}\, g(z), \quad \xi\in\mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, g(x)\,dx = 0 \text{ für } \xi>0.$$

$\uparrow$

"Fourier-transformierte von g"

(ii) Für $\xi > 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} g(x)\, dx = 2\pi i\, e^{\xi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \binom{n}{k} (2i)^k$

<u>Beweis der Aussage für $\xi \leq 0$:</u>

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{1}{(x-i)} \frac{(x+i)^n}{(x-i)^n}\, dx = (\text{Substituiere } y = -x)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{iy\xi} \frac{(-y+i)^n}{(-y-i)^n}}_{} (-1)\, dy$$

dieser Integrand besitzt eine Singularität nur an $y = -i \notin \mathbb{H}$, also wird keine Sing. eingeschlossen und das Integral $= 0$. $\boxtimes$

(II) Null- und Polstellen zählendes Integral

(15.3) <u>Satz</u>: Sei γ ein geschlossener, sich innerhalb eines Gebietes G stetig auf einen Punkt zusammenziehbarer Weg und $f \in \mathcal{M}(G)$ ohne Sing auf γ.

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \#\{\text{NST innerhalb } \gamma\} - \#\{\text{PST innerhalb } \gamma\}$$

$$= \sum_{\substack{z \in \mathrm{Int}(\gamma) \\ f(z)=0}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ordng der NST}}}{\mathrm{ord}_z(f)} - \sum_{\substack{z \in \mathrm{Int}(\gamma) \\ f(z)=\infty}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ordng der PST.}}}{|\mathrm{ord}_z(f)|}$$

<u>Beweis:</u> Nach dem Residuensatz gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}_z\left(\frac{f'}{f}\right)$$

<u>Fall 1:</u> z_0 eine Nullstelle der Ordnung $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$

$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^m \cdot g(z)$ wo g an z_0 holomorph, $\neq 0$.

$\Rightarrow f'(z) = m(z-z_0)^{m-1} \cdot g(z) + (z-z_0)^m \cdot g'(z)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} = m(z-z_0)^{-1} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$ ← holomorph an $z = z_0$

Damit besitzt f'/f eine Laurentreihen-entwicklung mit $a_{-1} = m$. Also: $\mathrm{Res}_{z_0}\left(f'/f\right) = m$.

<u>Fall 2:</u> z_0 eine Polstelle der Ordnung $-m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$.

$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z)$, wo g an z_0 holom, $\neq 0$.

Wiederholung der gleichen Rechnung liefert

$\dfrac{f'(z)}{f(z)} = -m\cdot(z-z_0)^{-1} + \dfrac{g'(z)}{g(z)} \Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}\left(f'/f\right) = -m$

Zusammensetzung von Fall 1 + Fall 2 ☒