Nach dem Satz über Gebietstreue muss f auf U konstant sein. Nach Identitätssatz auf ganz G konstant. Der 2-te Teil der Aussage (i) folgt automatisch.

(ii) Falls $f(z_0) \neq 0$, dann $f(z) \neq 0$ in einer Kreisscheibe $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset G$. $g = 1/f$ ist auf $B_\varepsilon(z_0)$ definiert. Wende (i) auf g an.

$\Rightarrow$ g ist konstant auf $B_\varepsilon(z_0)$, $f = \text{const}$

$\Rightarrow$ nach Identitätssatz auf ganz G.

Der 2-te Teil der Aussage (ii) folgt automatisch

$\boxtimes$

§ 9. Komplexe Logarithmen

Umkehrsatz vorschalten

Wir brauchen eine Vorüberlegung:

<u>Satz 9.1</u> Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to V$ holomorph, bijektiv und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann gilt nach Umkehrsatz, dass $f^{-1}: V \to U$ reell diffbar ist, mit $Df^{-1}(f(z)) = Df(z)^{-1}$

Da aber $Df(z)$ $\mathbb{C}$-linear, also einfach eine kplxe Zahl ist, ist $Df^{-1}(f(z))$ es ebenfalls, also ist f^{-1} ebenfalls holomorph mit $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$

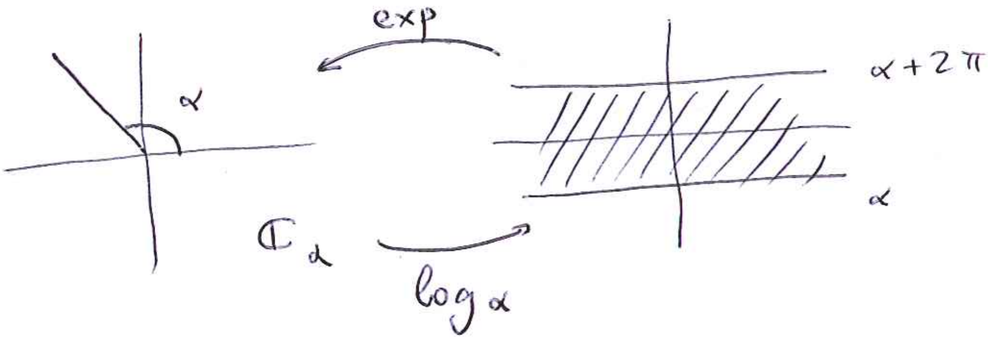
__Umkehrsatz:__ Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to V$ stetig diffbar. Falls $Df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv, dann existiert eine offene Umgebung $\Omega \subset U$ von x_0, so dass $f: \Omega \to f(\Omega)$ bij, und $f^{-1}: f(\Omega) \to \Omega$ ebenfalls stetig diffbar ist, mit

$$Df^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1}.$$

__Definition 9.2__ (Zweige des Logarithmus)

$$\mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C} \setminus \{ re^{i\alpha} \mid r \geq 0 \} \text{ geschlitzte Ebene, } \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$\Omega_\alpha := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (\alpha - 2\pi, \alpha) \}$$



$\exp: \Omega_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha$ (Einschränkung von $\exp(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ auf $z \in \Omega_\alpha$) ist bijektiv, sowieso holomorph, und $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$. Nach Satz 9.1 besitzt es eine Umkehrabb.

$$\log_\alpha : \mathbb{C}_\alpha \longrightarrow \Omega_\alpha$$

"Zweig des Logarithmus auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}_\alpha$"

__Spezialfall:__ $\alpha = \pi$, $\log_\pi$ heißt "Hauptzweig des Log"

Beweis der Bijektivität von $\exp : \Omega_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha$:

- sei $z \in \mathbb{C}_\alpha$, $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{\alpha\}$
  wir können (evtl nach $\pm 2\pi$ Addition) festlegen,
  $\varphi \in (\alpha - 2\pi, \alpha)$. ~~Also~~ Schreibe

  $$z = re^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$$

  ($\ln r$ – ist log. aus der reellen Analysis)

  $\Rightarrow$ $(\ln r + i\varphi) \in \Omega_\alpha$ ist Urbild von $z \in \mathbb{C}_\alpha$

  $\Rightarrow$ $\exp : \Omega_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha$ ist surjektiv.

- seien $z = e^{a+ib}$, $w = e^{c+id}$ beide Bilder
  von exp mit $b, d \in (\alpha - 2\pi, \alpha)$; $z = w$.

  $$\Rightarrow (a+ib) - (c+id) \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

  $\Rightarrow$ $a = c$, $b = d$, also ist exp injektiv

$\blacksquare$

Wie berechnet man denn nun $\log_\alpha$ explizit?

Sei $z \in \mathbb{C}_\alpha$, $z = re^{i\varphi}$, $\boxed{\varphi \in (\alpha - 2\pi, \alpha)}$

Nach der Anpassung des Winkels φ auf $\varphi \in (\alpha - 2\pi, \alpha)$
durch evtl Addition von $(\pm 2\pi)$ ergibt sich

$$\log_\alpha z = \log_\alpha re^{i\varphi} \mathrel{\hat{=}} \log_\alpha r + \log_\alpha e^{i\varphi}$$

$$\boxed{\log_\alpha z := \log r + i\varphi}$$

reeller Log

$\varphi \in (\alpha - 2\pi, \alpha)$.

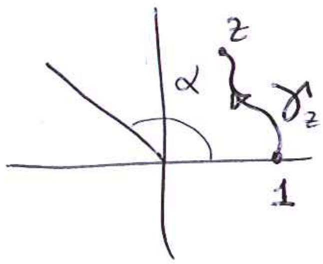
Bemerkung: Stammfunktion von $\log_\alpha$

Für $z \in \mathbb{C}_\alpha$: $\quad z = \exp(\log_\alpha z)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dz}{dz}}_{=1} = \frac{d\log_\alpha(z)}{dz} \cdot \underbrace{\exp(\log_\alpha(z))}_{=z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\log_\alpha(z)}{dz} = \frac{1}{z}$$

Das heißt $1/z$ ist die Stammfunktion von $\log_\alpha(z)$, und für $\alpha \neq 0$ ergibt sich (für $\alpha = 0$ (Ü))



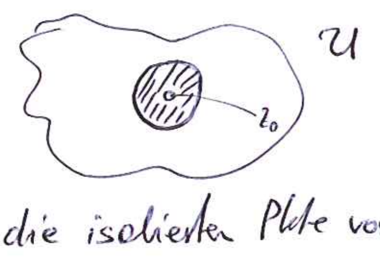
$$\log_\alpha(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{z}\, dz$$

(vergleiche Konstr-n von Stammfkt Th. 5.7)

§ 10. Isolierte Singularitäten

Definition 10.1:

(i) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $U \neq \mathbb{C}$.
Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ heißt isoliert (von U), falls für ein $\varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$



(ii) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man die isolierten Pkte von U isolierte Singularitäten von f

Beispiele: a) $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$

b) $U = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

c) $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $f(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}$

Wir wollen die isolierten Singularitäten in 3 Typen klassifizieren:

Definition 10.2 (Klassifikation von isolierten Singularitäten)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holom.
z_0 – isolierte Singularität von f.

1) z_0 heißt "hebbare Singularität"
falls f zu einer holomorphen Funktion

$$\tilde{f}: U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \tilde{f}(z_0), & z = z_0 \end{cases}$$

fortgesetzt werden kann.

2) z_0 heißt "Polstelle von f m-ter Ordnung"
falls die holomorphe Fkt $(z-z_0)^m \cdot f(z)$
an z_0 eine hebbare Singularität hat.
(m ist die KLEINST-MÖGLICHE Potenz so dass das gilt)

3) z_0 heißt "wesentliche Singularität"
falls weder (1) noch (2) gelten.

Beispiele 10.3

1) hebbare Singularität: $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{z^2}{z}$

f kann zu $\tilde{f}(z) = z$ auf ganz $U \cup \{0\} = \mathbb{C}$ holomorph fortgesetzt werden.

2) Polstelle m-ter Ordnung: Sei $g : \tilde{U} \to \mathbb{C}$ holomorph $z_0 \in \tilde{U}$; mit $g(z_0) \neq 0$. Setze $U := \tilde{U} \setminus \{z_0\}$.

$$f : U \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

hat in z_0 eine Polstelle m-ter Ordng.

3) Polstellen und hebbare Singularitäte:

$U = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+i}{1+z^2}$

$$f(z) = \frac{z+i}{1+z^2} = \frac{z+i}{(z+i)(z-i)}$$

- hat in $z_0 = -i$ hebbare Singularität
- hat in $z_1 = +i$ Polstelle erster Ordng.

4) Wesentliche Singularität: $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f : U \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$$

hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

Beweis! (Ü?)

Beweis, dass 0 wesentliche Sing. von $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist:

Setze $z_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $\sin\left(\frac{1}{z_n}\right) = 0$; $z_n \to 0$.

- Angenommen 0 wäre hebbar, und $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ lässt sich zu holom $\tilde{f}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.
  Es gilt dann: $\tilde{f}(z_n) = 0$ für $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $z_n \to \tilde{z} \in \mathbb{C}$, $\tilde{z} = 0$
  Nach Identitätssatz für holom. Funktionen $\tilde{f} \equiv 0$ ↯
  $\Rightarrow$ 0 nicht hebbar.

- Angenommen 0 wäre Polstelle m-ter Ordnung.
  Dann wäre 0 hebbar für $z^m \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
  Gleiches Argument wie oben $\Rightarrow z^m \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 0$ ↯
  $\Rightarrow$ 0 keine Polstelle. $\square$

Frage: Lässt sich für isolierte Singularitäten etwas ähnliches wie Potenzreihenentw. $\sum a_n (z-z_0)^n$ erreichen? Antwort: ja, Laurentreihenentwicklung

Theorem 10.4 (Laurententwicklungssatz)

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit isolierter Sing. an $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.
Dann existiert $R > 0$ so dass $\overline{B_R(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset U$. Setze

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dann gilt: $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{"Nebenteil" } f_2(z)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n}_{\text{"Hauptteil" } f_1(z)}$$

Nebenteil - Pot.-Reihe, auf $B_R(z_0)$ konv

Die Laurentreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ konvergiert gleichmäßig auf $\{r \leq |z-z_0| \leq R\}$ für $0<r<R$ und es gilt:

1) z_0 hebbar $\Rightarrow$ Hauptteil $f_1(z) \equiv 0$.
2) z_0 Polstelle m-ter Ordnung $\Rightarrow$ Hauptteil $f_1(z) = \sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-z_0)^n$.
3) z_0 wesentliche Singularität $\Rightarrow$ Hauptteil hat <u>unendlich</u> viele nicht-triviale Glieder.

<u>Beweis:</u>

γ kann stetig deformiert werden solange z_0 außerhalb bleibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad \text{(Cauchy-Integralformel)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{B_R(z_0)\\ \circlearrowleft}} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{B_r(z_0)\\ \circlearrowleft}}$$ für $r \in (0,R)$ ausreichend klein.

Wir fahren fort wie beim Beweis vom Potenzreihenentw.-satz:

- für $\xi \in B_R(z_0)$: $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

- für $\xi \in B_r(z_0)$: $\left|\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right| < 1$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{z - z_0} \cdot \frac{(-1)}{1 - \frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = -\frac{f(\xi)}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der geom. Reihe

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{B_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \cdot (z-z_0)^n$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n}} \, d\xi \cdot (z-z_0)^{-(n+1)}$$

Since we may now change Integrations for the individual coefficients, we conclude (ups → deutsch)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \right\} \cdot (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Klassifikation der Isolierten Sing. ist von hier aus offensichtlich. $\boxtimes$

Theorem 10.5 (Casorati-Weierstraß)

Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ isolierte Sing. Es gilt:

(1) z_0 hebbar $\Leftrightarrow$ f beschränkt auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \mathcal{U}$.

(2) z_0 Polstelle $\Leftrightarrow$ $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$

(3) z_0 wesentlich $\Leftrightarrow$ $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C}$ dicht.

Beweis: (1) "Hebbarkeitssatz" "$\Rightarrow$" offensichtlich

"$\Leftarrow$" Schreibe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. f beschränkt $\Rightarrow$ $a_n = 0$ für $n < 0$

"$\Rightarrow$" also verschwindet Hauptteil und z_0 ist hebbar.

(3) Widerspruchsannahme: $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C}$ sei nicht dicht. Dann $\exists\, \omega \in \mathbb{C}, \delta > 0$ st.

$$f(z) \notin B_\delta(\omega) \text{ für } z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$$
$$\text{dh } |f(z) - \omega| > \delta. \quad (*)$$

Setze: $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - \omega}$ auf $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$

Wegen $(*)$ ist $|g(z)| \leq 1/\delta$ auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph und beschränkt. Nach Hebbarkeitssatz (1) lässt sich $g(z)$ auf ganz $B_\varepsilon(z_0)$ holom. fortsetzen.

Fall 1: $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt also nach Hebbarkeitssatz (1) ist z_0 hebbar $\lightning$

Fall 2: $g(z_0) = 0$ also keine wesentliche Singularität

(Ü) Sei $h: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph, $h \not\equiv 0$
Dann sind die Nullstellen von h abzählbar ohne Häufungspunkte.

(Fortsetzung) und es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$ so dass an NST z_0

$$h(z) = (z - z_0)^m \cdot \tilde{h}(z)$$

mit $\tilde{h}$ holom mit $\tilde{h}(z_0) \neq 0$.

Hinweis: Identitätssatz

Da sicherlich $g \not\equiv 0$, gilt $g(z) = (z - z_0)^m \tilde{g}(z)$ wobei $\tilde{g}$ auf $B_\varepsilon(z_0)$ holomorph, $\tilde{g}(z_0) \neq 0$.

$\Rightarrow f(z) = \omega + \dfrac{1}{g(z)}$ hat an z_0 PST m-ter Ordng $\lightning$ also keine wesentliche Sing.

(2) "$\Rightarrow$" ebenfalls offensichtlich.

"$\Leftarrow$". Angenommen $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$.

$\longrightarrow$ Dann ist $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C}$ nicht dicht, also kann z_0 keine wesentliche Sing. sein. (3 $\Rightarrow$)

$\longrightarrow$ Dann ist f auf $B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ nicht beschränkt also kann z_0 keine hebbare Sing sein (1 $\Rightarrow$)

Nach Ausschluss muss z_0 PST sein.

(3) "$\Leftarrow$" Falls $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C}$ dicht, dann treten (1) und (2) nicht auf. z_0 muss wesentliche Sing. sein. $\square$

Thm 10.6 (Satz von Picard)

$f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ für eine wesentliche Sing.

§ 11. Meromorphe Funktionen

Def 11.1: Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset \mathcal{U}$ so dass jedes $z_0 \in P$ ein isolierter Punkt von $\mathcal{U} \setminus P$ ist. Eine holom. Funktion $f : \mathcal{U} \setminus P \to \mathbb{C}$ heißt meromorph, falls alle Singularitäten $z_0 \in P$ unwesentlich sind (hebbar / PST).

Wollen nicht ständig Singularitätenmenge P abziehen:

$\to$ $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\to$ $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$ heißt meromorph,
falls f auf $\mathcal{U} \setminus f^{-1}(\{\infty\})$ holomorph
und $f^{-1}(\{\infty\}) =: P_f$ isolierte
unwesentliche Singularitäten von f sind.

$$\boxed{\mathcal{M}(\mathcal{U}) := \{ f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}^* \text{ meromorph} \}}$$

Addition auf $\mathcal{M}(\mathcal{U})$: $(f+g) \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ für $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$
mit Singularitätenmenge
$$P_{f+g} = P_f \cup P_g$$

Multiplication auf $\mathcal{M}(\mathcal{U})$: $(f \cdot g) \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ für $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$
mit Singularitätenmenge
$$P_{f \cdot g} = P_f \cup P_g.$$

Satz 11.2 $\boxed{(\mathcal{M}(\mathcal{U}), +, \cdot) \text{ ist ein Körper}}$ Ü.

Hinweis: grundlegender Teil ist zu zeigen,
dass für $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, $1/f$ ebenfalls
meromorph ist.

Warum?
weil wesentliche
Sing. ausgenommen
sind

f hat PST m-ter Ordng $\Rightarrow$ $1/f$ hat NST
f hat hebbare Sing, NST $\Rightarrow$ $1/f$ hat PST

Definition 11.3 $\operatorname{ord}_{z_0} : \mathcal{M}(U) \to \mathbb{Z}$ für $z_0 \in U$

mit $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z_0 \text{ hebbar, } f(z_0) \neq 0 \\ k, & \text{falls } z_0 \text{ - NST } m\text{-ter Ordnung} \\ (-k), & \text{falls } z_0 \text{ - PST } m\text{-ter Ordnung.} \end{cases}$

§ 12. Funktionentheorie

(I) Polynome

eigentlich gehört der Satz ins Kapitel 7

Einschub: "Schwarzsches Spiegelungsprinzip"

Sei $\tilde{U} \subset \mathbb{C}$ offen, $U := \tilde{U} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

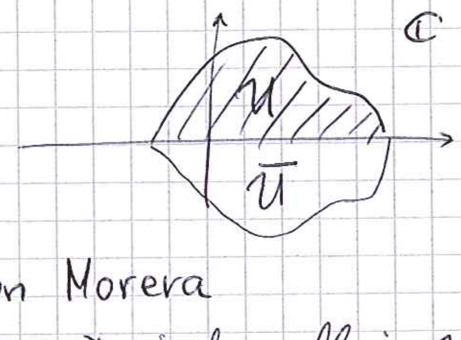
Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig so dass

- $f : \{z \in U \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ holom.
- $f : U \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reell-wertig.

Dann ist die gespiegelte Funktion

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \overline{f(\bar{z})}, & \bar{z} \in U \end{cases}$$

holomorph auf $U \cup \overline{U}$, $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\}$



Beweisidee: Satz von Morera

$\mathring{U}$

Schritt 1: Dreiecke voll in $U \setminus \mathbb{R}$, $\overline{U} \setminus \mathbb{R}$

Schritt 2: Dreieck mit einem Pkt oder Seite in $\mathbb{R}$

Schritt 3: allgemeine Dreiecke in $U \cup \overline{U}$.

Satz 12.1 Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ ein kplxes Polynom, $a_m \neq 0$.

Dann existieren (m^{+1}) nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen $z_0, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ s.d.

$$p(z) = a_m (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_m)$$

Beweis: Fundamentalsatz der Algebra: p Polynom ist nicht-konstant ($a_m \neq 0$) also ex. eine kplxe Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, $p(z_0) = 0$.

Potenzreihenentwicklungssatz: $\Rightarrow p(z) = \sum_{k=1}^{m} b_k (z - z_0)^k$

$$= (z - z_0)^k \cdot \tilde{p}(z)$$

Nun iteriere das Argument for $\tilde{p}$, Polynom vom Grad $(m-1)$

$\boxtimes$