Ⓐ <u>Einschub</u>: Berechnung reeller Integrale

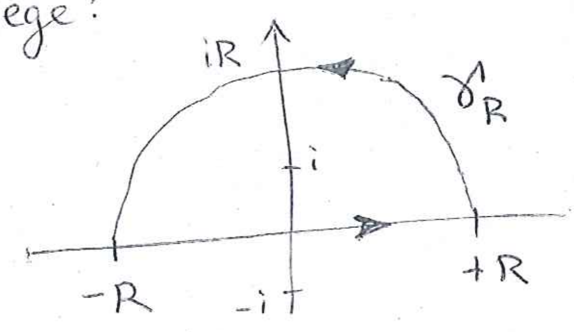
Erinnerung Beispiel aus erster Vorlesung $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = ?$$

holomorph auf:

<u>Berechnung</u>: Betrachte $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} = \mathcal{U}$

Integrationswege:



$$\gamma_R = \underbrace{[-R, R]}_{=\gamma_R^1} \cup \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0,\ |z| = R\}}_{=\gamma_R^2}$$

Nach Cauchy-Integralformel gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{\overbrace{1/(z+i)}^{g(z)}}{z-i} = 2\pi i \cdot g(i) = \pi$$

Es gilt auch:

$$\left| \int_{\gamma_R^2} f(z)\,dz \right| \le \max_{z \in \gamma_R^2} \left(\frac{1}{|z^2+1|} \right) \cdot \underbrace{\pi R}_{\text{Länge von } \gamma_R^2}$$

$$\le C \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \pi R \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^1} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \pi.$$

§ Potenzreihenentwicklung

Theorem 5.11 Sei $U \subset \mathbb{C}$ ~~[illegible]~~ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Setze für $B_r(z_0) \subset U$.

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz$$

Dann gilt: (i) $|a_n| \leq \frac{C_r}{r^n}$

(ii) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

mit Konv-Radius $R \geq r$ (halt maximale Kreisscheibe $B_R(z_0)$ die noch in U rein passt). D.h. holom. f ist kplx analytisch, ie lässt sich lokal in Pot. Reihe entw.

(iii) $a_n = \left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\right)(z_0) / n!$

Beweis: (i) $|f|$ ist auf $\overline{B_r(z_0)}$ beschränkt durch C_r.

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\max_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)| \right)}_{\leq C_r} \cdot \oint_{\partial B_r(z_0)} \underbrace{\frac{1}{|z-z_0|^{n+1}}}_{\leq \frac{1}{r^{n+1}}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot C_r \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \underbrace{\oint_{\partial B_r(z_0)} dz}_{= \text{Länge}(\partial B_r(z_0)) = 2\pi r} = C_r / r^n$$

(ii) Nebenrechnung vorab: Sei $z \in B_r(z_0)$. Wähle $\rho < r$ so dass $z \in B_\rho(z_0)$. Für $\xi \in \partial B_\rho(z_0)$ gilt:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}$$

$$= \left[\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < \frac{\rho}{\rho} = 1, \text{ also konv. geom. Reihe} \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Nach der Cauchy-Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} \, d\xi$$

[Beachte $z \in B_\rho(z_0)$ und das Integral ändert sich nicht durch Wegverschiebung solange die Polstelle an $\xi = z$ eingeschl. bleibt]

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \right)}_{=: a_n} (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$ Die Potenzreihe hat Konv-Radius $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

$$\geq \frac{1}{\lim \sqrt[n]{C_r / r^n}} = r$$

(iii) $$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\right)(z_0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \Big|_{z=z_0}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k!\,(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0} = a_n.$$

$\square$

Einschub (B)

~~Auf Sterngebieten gilt~~

f holomorph $\Longleftrightarrow$ f kplx analytisch, d.h. lokal in Pot-Reihen entw-bar

Frage: • Cauchy-Integralsatz besagt:

$$f \text{ holomorph} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

Gilt evtl die Umkehrung?

Das beantwortet der nachfolgende Satz

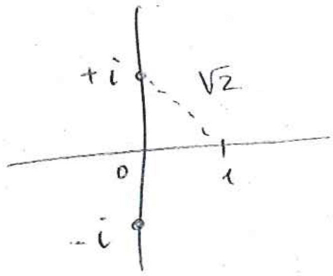
Thm 5.12 (Morera) Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ stetig, und für jedes Dreieck $\Delta \subset \mathcal{U}$ gelte $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Dann ist f holomorph.

Beweis: Nach Thm 5.11 ist Holomorphie lokale Eigenschaft, also OBdA $\mathcal{U} = B_r(z_0)$.

B Einschub Beispiel Potenzreihenentwicklung

$$U = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, \quad f: U \to \mathbb{C}; \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$



- Entwicklung um $z_0 = 0$: $R = 1$
- Entwicklung um $z_0 = 1$; $R = \sqrt{2}$

um $z_0 = 0$ lässt sich die Potenzreihenentw. leicht errechnen: Für $|z| < 1$ geom Reihe

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Wie im Beweis von Thm. 5.7 (Cauchy-Integralsatz für Sterngebiete) zeigen wir, dass f ein holomorphe Stammfkt besitzt:

- $F: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph
- $\frac{\partial F}{\partial z} = f$

Müssen nur noch folgern, dass f holomorph ist:

a) F holom., also nach Thm 5.11 kplx. analytisch, also $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ auf $\mathcal{U} = B_r(z_0)$

b) $\frac{\partial F}{\partial z} \equiv f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z-z_0)^n$ auf $\mathcal{U}$,

also ist f eine auf $\mathcal{U}$ konv. kplxe Potenzreihe, f kplx analytisch $\underset{\text{Thm 5.11}}{\Rightarrow}$ f holomorph. $\boxtimes$

§ 6. Satz von Liouville und Fundamentalsatz der Algebra

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph $(\mathcal{U} = \mathbb{C})$. Dann besitzt f eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

ganze Funktion

mit Konv-Radius $R = \infty$.

<u>Frage</u>: Unter welchen Umständen ist f ein Polynom?

<u>Satz 6.1</u> (Liouville) Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom, dh. <u>ganze</u> Fkt, so dass

$$\exists R>0 : \forall |z| \geq R : |f(z)| \leq C \cdot |z|^N$$

für Konstante $C>0$. Dann ist f ein komplexes Polynom vom Grad $\leq N$. Insbesondere gilt:

$$\boxed{f \text{ beschränkt (dh } N=0) \Rightarrow f \text{ konstant.}}$$

<u>Beweis</u>: Entwickle um $z_0=0$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Für $r \geq R$ folgt mit Thm 5.11 (i)

$$|a_n| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| \cdot \frac{1}{r^n} \underset{r \geq R}{\leq} C r^{N-n} \xrightarrow[\text{falls } n>N]{r\to\infty} 0$$

Also $a_n = 0$ für $n>N$ und damit gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. ◪

<u>Satz 6.2</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $a_n \neq 0$ ein Nichtkonstantes Polynom. Dann besitzt P (mindestens) eine komplexe Nullstelle.

Beweis: Angenommen, $P(z)$ besitzt KEINE Nullstelle.
Dann ist $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ eine holomorphe Fkt, ganz ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

$$|P(z)| = |a_n| \cdot |z|^n \left| \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right] \right|$$

$$\geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n \text{ für } |z| \geq R \text{ für geeignetes } R > 0.$$

$\Rightarrow |f(z)| \leq C |z|^{-n}, \ |z| \geq R$

$\Rightarrow f$ ist auf $\{|z| \geq R\}$ beschränkt,
auf $\{|z| \leq R\}$ sowieso beschränkt, also
auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt.

f ganz + beschränkt $\Rightarrow$ f konstant $\lightning$ (da $P \not\equiv$ konst per Annahme)
Satz 6.1, Satz von Liouville

$\boxed{\lightning}$

§ 7. Identitätssatz

Einschub C

Theorem 7.1 Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ ein ~~....förmiges~~ Gebiet { dh offen nicht leer zshgd }
Für $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph sind äquivalent

(i) $f \equiv g$ identisch auf ganz $\mathcal{U}$
(ii) für $z_0 \in \mathcal{U}$ gilt: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$
(iii) $\exists (z_n) \subset \mathcal{U} \setminus \{z\}$, $z_n \to z \in \mathcal{U}$, so dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Wichtig $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ liegt in $\mathcal{U}$)

(c) Einschub Topologie: "Offen und abgeschlossen"

Erinnerung: $U \subset \mathbb{C}$ heißt

- offen, falls $\forall a \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset U$.
- abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen; alternativ, falls für jede konvergente Folge $(z_n) \subset U$ gilt: $z = \lim_{n \to \infty} z_n \in U$

offen ist kein Widerspruch zu abgeschl.

Beispiele:

- $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$ ist offen, da für jedes $a \in U$, mit $\varepsilon = R - |a - z_0|$, $B_\varepsilon(a) \subset U$.
- $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \} = \mathbb{R}$ (reelle Achse)

  $\rightarrow$ nicht offen, da für jedes $x \in U$, jedes $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \not\subset U$.

  $\rightarrow$ aber abgeschlossen: falls $(x_n) \subset \mathbb{R}$ konv. Folge, $x = \lim_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Wichtiger Satz:

ERKLÄREN: falls $G = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2 offen dann ist ein $G_i = G$, ein anderes $= \emptyset$.

Falls $U \subset G$, G offen, zusammenhängend (d.h. alle Verbindungslinien können in G gewählt werden) dann gilt: falls U offen UND abgeschl.

$$\Rightarrow U = G.$$

Beweis: Wir betrachten $(f-g)=h$. Zu zeigen ist also

(i) $h \equiv 0$

(ii) $h^{(n)}(z_0)=0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(iii) $h(z_n)=0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $z_n \to z \in \mathcal{U}$

sind äquivalent.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $h \equiv 0$ impliziert $h^{(n)}(z_0) \equiv 0$ für alle n, z_0

(ii) $\Rightarrow$ (iii): h holomorph, also kplx analytisch, nach Thm 5.11

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0) \quad \left\{ a_n = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}, \text{Thm } 5.11 \text{ (iii)} \right\}$$

für $z \in B_\varepsilon(z_0)$ für geeignetes $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(z_0) \subset \mathcal{U}$.

Damit ist wegen (ii) $h(z)=0$ für $z \in B_\varepsilon(z_0)$

und für eine konv. Folge $(z_n) \subset B_{\varepsilon/2}(z_0)$ gilt $h(z_n)=0\ \forall n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $z_n \to \hat{z} \in \mathcal{U}$. Entwickle um $\hat{z}$:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall z \in B_\varepsilon(\hat{z}) : h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\hat{z})^n$$

- $h(\hat{z}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{h(z_n)}_{=0} = 0 = a_0$

- Wir zeigen per Induktion dass $\forall n : a_n = 0$.

Seien also $a_0 = \dots = a_m = 0$ schon gezeigt. Dann ist $h(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z-\hat{z})^n = (z-\hat{z})^{m+1}\, \tilde{h}(z)$

mit $\tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+1+n}(z-\hat{z})^n$ holom. auf $B_\varepsilon(\hat{z})$

und es gilt immernoch $\tilde{h}(z_n) \equiv 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{h}(\hat{z}) = 0$

[Beachte: hierbei ist wichtig, dass $\{z_n\} \subset \mathcal{U} \setminus \{\hat{z}\}$
so dass $h(z_n) = 0$ tatsächlich $\tilde{h}(z_n) = 0$ impliziert]

$$a_{m+1} = \tilde{h}(\hat{z}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{h}(z_n) = 0 .$$

Damit folgt $\forall n: a_n = 0 \Rightarrow h \equiv 0$ auf $B_\varepsilon(\hat{z})$.

Setze $\quad M := \{ z \in \mathcal{U} \mid h(z) = 0 \}$

- $M \neq \emptyset$, denn $B_\varepsilon(\hat{z}) \subset M$ wegen oben
- M offen: denn mit obigem Beweis zeigt man:
  falls $a \in M \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset M$
- M abgeschlossen: h stetig.

Da $\mathcal{U}$ als $\star$-Gebiet insbesondere zusammenhängend ist, folgt $M = \mathcal{U}$, also $h \equiv 0$ auf $\mathcal{U}$

$\boxtimes$

§ 8. Maximums und Minimumsprinzip

Satz 8.1 (Satz über Gebietstreue) [ohne Beweis]

[Gebiet $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$: offen, nicht-leer, zusammenhgd.]

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holom., nicht-konstant.
Dann ist das Bild $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Folgerung 8.2 Sei G Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holom, inj.
Dann gilt $\forall z \in G: f'(z) \neq 0$
und $f^{-1}: f(G) \to \mathbb{C}$ ebenfalls holom.

Beweisidee: f inj $\Rightarrow$ f nicht-konstant, also
Satz 8.3 auf allen $B_\varepsilon(z) \subset G$ anwendbar.
Da nach Satz 8.3 $f(B_\varepsilon(z))$ wieder
Ü Gebiet, also insbes. offene Umg. von $f(z)$
ist, kann bei $f'(z) = 0$ f nicht inj. sein

$$f^{-1} \circ f : G \to G, \quad f^{-1} \circ f(z) = z.$$

$$1 = \frac{\partial (f^{-1} \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial f^{-1}}{\partial z}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f^{-1}}{\partial z}(f(z)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right)^{-1}$$

Da $f'(z) \equiv \frac{\partial f}{\partial z}(z) \neq 0$, ist also f^{-1}
auf dem Bild $f(G)$ holomorph.

Wir sagen: $f: G \to f(G)$ ist biholomorph
falls f, f^{-1} beide holomorph sind.

Satz 8.3 Sei G Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holom.

(i) Hat $|f|$ ~~an~~ in $z_0 \in G$ ein lokales Max, so ist f konstant. Ist G beschränkt, f auf dem Abschluss $\overline{G}$ stetig fortsetzbar, dann

$$\|f\|_{\infty, G} \leq \|f\|_{\infty, \partial G}$$

dh $|f|$ nimmt auf ∂G sein Maximum an.

(ii) Hat $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Min. so ist f konstant oder $f(z_0) = 0$. Ist G beschränkt, f auf den Abschluss $\overline{G}$ stetig fortsetzbar, dann

$$\|f\|_{\infty, G} \geq \|f\|_{\infty, \partial G}$$

dh $|f|$ nimmt auf ∂G sein Minimum an.

Beweis: (i) Sei $z_0 \in G$ ein lokales Max von $|f|$, und $U \subset G$ eine offene Umgebung von z_0 mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in U$. Dann ist

$$f(U) \subset \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(z_0)| \}$$

sicher keine Umgebung von $f(z_0)$, denn $B_\varepsilon(f(z_0))$ wird immer w mit $|w| > |f(z_0)|$ beinhalten!

Nach dem Satz über Gebietstreue muss f auf U konstant sein. Nach Identitätssatz auf ganz G konstant. Der 2-te Teil der Aussage (i) folgt automatisch.

(ii) Falls $f(z_0) \neq 0$, dann $f(z) \neq 0$ in einer Kreisscheibe $\overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset G$. $g = 1/f$ ist auf $B_\varepsilon(z_0)$ definiert. Wende (i) auf g an.

$\Rightarrow$ g ist konstant auf $B_\varepsilon(z_0)$, $f = \text{const}$

$\Rightarrow$ nach Identitätssatz auf ganz G.

Der 2-te Teil der Aussage (ii) folgt automatisch

$\boxtimes$

§ 9. Komplexe Logarithmen