Funktionentheorie – Münster – WS 2015/16

§1. Motivierendes Beispiel

Im Kapitel 1 werden Begriffe nur INTUITIV eingeführt. Formale Definitionen folgen erst ab Kapitel 2.

Ein Höhepunkt der Vorlesung:

Auswertung von Integralen die man mit bisherigen Mitteln der Analysis - Vorlesung nicht auswerten kann.

Beispiel: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

Schritt 0: Überzeuge dich, dass die Stammfunktion $f(x)$ mit der Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ nicht mit Substitutions- oder Produktregel gefunden werden kann (jedenfalls sehe ich es nicht)

Schritt 1: Der Schlüssel zum Berechnen des Integrals liegt im Studium der Nullstellen des Nenners

$$x^2+1$$

→ im Reellen $\mathbb{R}$: $x^2+1=0$ besitzt in den reellen Zahlen keine Lösung, da man aus (-1) keine Wurzel ziehen kann.

→ im Komplexen $\mathbb{C}$ ($\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ist im Komplexen erlaubt)

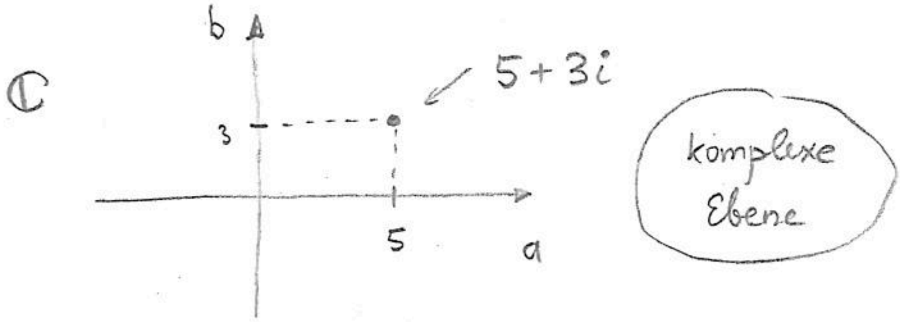
$$\mathbb{C} := \{ a + b \cdot \sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

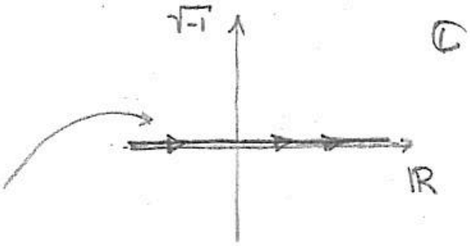
die Gleichung besitzt in $\mathbb{C}$ 2 Lösungen

Bemerkung: $\mathbb{C} = \{ a + b \cdot \sqrt{-1} \equiv a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

kann mit der Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden



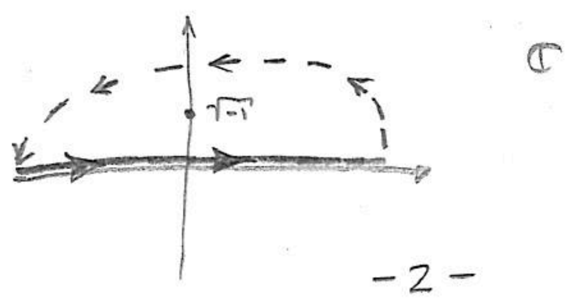
Schritt 2: Interpretiere das $\int_{-\infty}^{+\infty}$ - reelle Integral als ein Integral über einen Weg in der komplexen Ebene:



Integral $\int_{-\infty}^{+\infty}$ ist einfach
ein Integral über die reelle Achse (horizontale x-Achse)

Wir können uns sogar VORSTELLEN (hier erstmal alles rein INTUITIV) dass

der Integrationsweg im Unendlichen abgeschlossen ist



Schritt 3: Ein zentraler Satz der Vorlesung

Residuensatz / Cauchy-Integralsatz: Der Wert solcher Wegintegrale in $\mathbb{C}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{z^2+1}\, dz = \int \frac{1}{(z-\sqrt{-1})}\cdot\frac{1}{(z+\sqrt{-1})}\, dz$$

ergibt sich aus dem Wert des regulären Anteils des Integranden an der eingeschlossenen Nullstelle des Nenners, an $z = \sqrt{-1}$:

$$= 2\pi\sqrt{-1}\cdot\left[\frac{1}{z+\sqrt{-1}}\right]\Bigg|_{z=\sqrt{-1}}$$

$$= 2\pi\cancel{\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{-1}}} = \pi.$$

Fazit: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi$. Nach entsprechender Vorbereitung werden wir solche Integrale praktisch durch Hingucken ausrechnen können.

Die Vorbereitung beinhaltet:

Kapitel 2: Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Kapitel 3: Funktionen in $\mathbb{C}$

- → holomorphe Funktionen
- → komplexe Potenzreihen
- → analytische Funktionen

Kapitel 4: Wegintegrale in $\mathbb{C}$

- → Cauchy-Integralsatz
- → später: Residuensatz.

§ 2. Komplexe Zahlen

Erinnerung: Ein n-dim. Vektorraum V über $\mathbb{R}$ besitzt eine Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ von Vektoren, so dass jeder Vektor $\vec{v} \in V$ sich als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

schreiben lässt, mit reellen Koeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein 2-dim. Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der kanonischen Basis 1 und i.

Das heißt, jedes $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich als Linearkomb.

$$z = x \cdot \vec{1} + y \cdot \vec{i} = x + iy \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit reellen Koeffizienten $x, y \in \mathbb{R}$.

Vektorraumstruktur auf $\mathbb{C}$:

→ $(\mathbb{C}, +)$ Addition von Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \tilde{x} \\ y + \tilde{y} \end{pmatrix}$

dh $(x + iy) + (\tilde{x} + i\tilde{y}) = (x + \tilde{x}) + i(y + \tilde{y})$

mit dem Neutralen Element $0 = 0 + 0 \cdot i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

→ $(\mathbb{C}, \cdot_{\mathbb{R}})$ skalare Multiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

dh $\lambda \cdot (x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Komplexe Multiplikation auf $\mathbb{C}$: $(\mathbb{C}, \cdot)$

(Genau hier liegt der Unterschied zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$)

$$(x+iy)\cdot(\tilde{x}+i\tilde{y}) = (x\tilde{x}-y\tilde{y})+i(x\tilde{y}+\tilde{x}y)$$

Übungsaufgabe: Zeige, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist,
(im Gegensatz zu $\mathbb{R}^2$)

- dh zeige, dass $(\mathbb{C},+)$ eine abelsche Gruppe ist mit 0 als Neutralem Element.
- dh zeige, dass $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist mit $1 = 1+0\cdot i$ als Neutralem Element. Insbesondere besitzt jedes $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ein Multiplikativ-Inverses

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

- es gelten Distributivgesetze für $+$ und $\cdot$.

Bemerkung 2.2 Aus der Komplexen Multiplikation folgt

$$i\cdot i \equiv (0+i\cdot 1)\cdot(0+i\cdot 1) = -1+i\cdot 0$$

dh $i^2 = -1$ und man schreibt $i = \sqrt{-1}$.

Eine weitere nützliche Operation auf $\mathbb{C}$ ist die

Komplexe Konjugation: $\mathbb{C} \xrightarrow{\;\overline{}\;} \mathbb{C}$

$$[z = x+iy] \xrightarrow{\;\overline{}\;} [\bar{z} := x-iy]$$

erfüllt: $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$; $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$; $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

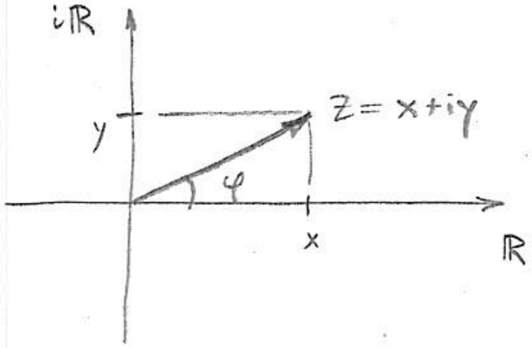
Definition 2.3 Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann nennt man

$$Re(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in \mathbb{R} \quad \text{"Realteil von } z\text{"}$$
$$Im(z) := \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \in \mathbb{R} \quad \text{"Imaginärteil von } z\text{"}$$

Es gilt: $Re(z) + i \cdot Im(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) + \frac{1}{2}(z-\bar{z}) = z$

und für $z = x + iy$ gilt damit $x = Re(z)$
$y = Im(z)$.

§ Polardarstellung komplexer Zahlen



Länge des Vektors: $r = |z| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{array}\right\} \; z = r\cos\varphi + i r \sin\varphi$$
$$= r \cdot \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{=: e^{i\varphi}}$$

$z = re^{i\varphi}$ heißt Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$

$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\rightarrow \bar{z} = \overline{(re^{i\varphi})} = re^{i(-\varphi)}$, dh Vektor wird gespiegelt

§ Lineare Abbildungen $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Lemma 2.4 Sei $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

bzgl der Basis $\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$. Dann ist T genau dann $\mathbb{C}$-linear (dh $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$) wenn

$$a = d, \; b = -c, \quad \text{ie } T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Beweis: Die Matrixdarstellung $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bedeutet

$$T(1) = a + ic = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$
$$T(i) = b + id = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

($\mathbb{R}$-Linearität von T impliziert gerade Existenz der Matrixdarst.)

Wir rechnen nach:

$$T(z) = T(x+iy) \overset{\mathbb{R}\text{-linear}}{=} x\,T(1) + y\,T(i)$$

$$= \frac{z+\bar{z}}{2} \underbrace{T(1)}_{= a+ic} + \frac{z-\bar{z}}{2i} \underbrace{T(i)}_{= b+id}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(a+d+(c-b)i\right)}_{=:\lambda} \cdot z + \underbrace{\frac{1}{2}\left(a-d+(c+b)i\right)}_{=:\mu} \bar{z}$$

dh insbesondere $T(1) = \lambda + \mu$

$$T(i) = (\lambda - \mu)\, i$$

- $\mathbb{R}$-Linearität: $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$-Linearität: $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow T(i) = i T(1).$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu) i = (\lambda + \mu) i$$

Zusatzblatt 8a

$$\Leftrightarrow \mu = 0 \text{, dh } a = b,\ c = -d.$$

$\boxed{}$

§ 3. Reelle und komplexe Differenzierbarkeit

Funktionen, für welche wir die Wegintegrale auswerten können, sind differenzierbar in einem besonderen – komplexen Sinn. Wir wiederholen die übliche Diff'barkeit zuerst.

§ Reelle Diff'barkeit

Erinnerung: Definition 3.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ ist an $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. Dieser Grenzwert wird, falls existent, mit $f'(x_0)$ notiert. Die Definition bedeutet in äquivalenter Weise, dass eine Zahl $f'(x_0)$ existiert, so dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x, x_0)$$

$$\text{mit } \lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Zusatzblatt $\mathbb{C}$-Linearität

Bemerkung: $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear falls
$T(z) = z \cdot T(1)$, das heißt

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto T(1) \cdot z$$

T ist $\mathbb{C}$-linear, falls es einfach als komplexe Multiplikation mit $T(1) \in \mathbb{C}$ agiert

Beobachtung 2.5 Komplexe Konjugation $z \longmapsto \bar{z}$ ist nicht $\mathbb{C}$-linear.

Beweis: Konjugation $z \longmapsto \bar{z}$ ist offensichtlich $\mathbb{R}$-linear
$1 \longmapsto \bar{1} = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $i \longmapsto -i = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
also erhalten wir die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 2.4 ist die $z \mapsto \bar{z}$ nicht $\mathbb{C}$-linear $\boxtimes$

Angelehnt an dieses ein-dimensionale Bsp gilt in allen Dimensionen die folgende

Definition 3.2 Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann ist $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ an $x_0 \in \mathcal{U}$ diffbar, falls

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \mathbb{R}\text{-linear}$$

existiert, so dass

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \mathcal{R}(x, x_0)$$

$$\text{mit } \lim_{x \to x_0} \frac{\| \mathcal{R}(x, x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$$

Die lineare Abbildung $A = Df(x_0)$ heißt das totale Differential von f an der Stelle x_0.

Bemerkung 3.3 Für $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$

bestimmt sich $Df(x)$ aus den partiellen Ableitungen

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Zusatzblatt 9a

Satz 3.4 (Satz von Schwartz)

a) f an $x_0 \in \mathcal{U}$ diffbar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \left\{ \text{alle partiellen Ableitungen } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \text{ existieren.} \right.$

b) $\left. \begin{array}{l} \text{alle partiellen Ableitungen} \\ \text{existieren und sind STETIG} \end{array} \right\} \Rightarrow f$ an $x_0 \in \mathcal{U}$ diffbar.

an $x_0 \in \mathcal{U}$

Zusatzblatt Partielle Ableitung

Stetigkeit: $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist an $x_0 \in \mathcal{U}$ stetig, falls für alle Folgen $(x_n) \subset \mathcal{U}$ mit $x_n \longrightarrow x_0$

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$$

Wir schreiben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Partielle Diffbarkeit: Die Komponente f_i

$$f_i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

ist an $x_0 = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ nach x_j partiell diffbar falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_j + h, \ldots, \overline{x}_n)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ bezeichnet. Die partielle Ableitung ist selbst eine Funktion auf $\mathcal{U}$ (falls definiert)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Berechnung: z.B.: $f_i(x, y) = x \cdot y^2$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y^2) = y^2$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x y^2) = 2xy$$

Beispiele 3.5

a) Diffbarkeit bedeutet noch lange nicht, dass die Ableitung stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

ist überall diffbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Aber die Ableitung $f'(x)$ ist in $x=0$ unstetig, dh $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$.

b) Falls alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, ist die gesamte Fkt diffbar:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + y^3 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) = 3x^2 \text{ stetig}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3) = 3y^2 \text{ stetig}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \text{ stetig}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x \text{ stetig}$$

alle partiellen Ableitungen sind stetig, also ist f diffbar und

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

§ Die Wirtinger-Ableitungen

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar in z_0

Nach Definition 3.2 gilt:

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0)(z - z_0) + R(z, z_0)$$

mit $Df(z_0): \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear

und $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{R(z, z_0)}{z - z_0} = 0$.

Erinnerung: für ein $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

haben wir zuvor im Beweis von Lemma 2.4 ausgerechnet:

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{a + d + (c - b)i}{2} \qquad\qquad (*)$$

$$\mu = \frac{a - d + (c + b)i}{2}$$

Wir setzen $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$.

Dann ist bzgl $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}(z_0)$$

Mit den Formeln $(*)$ ergibt sich

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x(u + iv) - i\,\partial_y(u + iv)\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_x f - i\,\partial_y f\right)$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u))$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f).$$

<u>Definition 3.5a</u> Die Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(z_0) \equiv \lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(z_0) \equiv \mu$$

heißen Wirtinger-Ableitungen. Mit (*) folgt

$$Df(z_0)\cdot(z-z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot\overline{(z-z_0)} \qquad (3.5b)$$

<u>Beispiel:</u>

$f(z) := z^2 = (x+iy)^2$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(2(x+iy) - 2i^2(x+iy)\right)$$
$$= z + z = 2z \quad \left(\frac{\partial z^2}{\partial z} = 2z\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = z - z = 0 \quad \left(\frac{\partial z^2}{\partial \bar z} = 0, \text{ da}\right.$$

z und $\bar z$ im Endeffekt unabhängige Variablen sind)

Übungsaufgaben: Zeigen Sie folgende Rechenregeln für differenzierbare Funktionen f, g:

1) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}$; $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}$

2) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$

$\frac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial z\overline{z}}{\partial \overline{z}} = z$ Ü

3) $$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z)$$

analog für $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}}$.

Satz 3.5 c) Sei $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ diffbar

$Df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear $\iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ und damit $Df(z_0)(z-z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0)$

Beweis: Erinnerung aus Lemma 2.4:

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\mathbb{C}$-linear

$\iff a = d,\ c = -b$ und damit

$Tz = \lambda z + \mu \overline{z}$ mit

$\mu = \frac{1}{2}(a - d + (c+b)i) = 0$

Hier wegen (3.5.b) $Df(z_0)(z-z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{(z-z_0)}$ ist also genau dann $\mathbb{C}$-linear wenn $\mu = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. ▨

§ Komplexe Diffbarkeit

<u>Def + Satz 3.6</u> Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen. $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist an $z_0 \in \mathcal{U}$ komplex diffbar, falls eine der 4 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) Der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert und ist gleich $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

(2) f ist an $z_0 \in \mathcal{U}$ reell-diffbar

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0)(z - z_0) + R(z, z_0)$$

mit $Df(z_0) : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ <u>$\mathbb{C}$-linear</u>

(dh $Df(z_0)$ ist zwar bzgl $\mathbb{R}^2$ eine 2×2 Matrix, aber in $\mathbb{C}$ einfach komplexe Multiplikation mit einer komplexen Zahl $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \in \mathbb{C}$)

ist f an z_0 reell diffbar und es

(3) Setze $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Dann gelten die "Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen"

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{an } z_0)$$

(4) f ist an $z_0 \in \mathcal{U}$ reell-diffbar und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$

<u>Beispiele 3.7</u>

a) $f(z) = z^2$

Bedingung (1): $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{\cancel{(z - z_0)}(z + z_0)}{\cancel{z - z_0}}$

$$= (z + z_0) \xrightarrow[z \to z_0]{} 2z_0$$

Grenzwert existiert für alle z_0

Bedingung (2): $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i(2xy)$

$$\text{dh } f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) = 2x \; ; \; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) = -2y \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

existieren und sind stetig. Also ist f (überall) reell diff'bar

Für komplexe Diffbarkeit muss $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ $\mathbb{C}$-linear sein. $\mathbb{C}$-Linearität folgt aus Lemma 2.4

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\mathbb{C}$-linear falls $a=d$, $b=-c$. Dann agiert T als komplexe Multiplikation mit

$$\frac{1}{2}(a+b+(c-d)i)$$

$$Df(z) \overset{z=x+iy}{\equiv} Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

agiert als Multiplikation mit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(4x + 4yi) = 2(x+iy) = 2z$$

(eigentlich intuitiv klar: $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2z$)

Bedingung (3) Wie zuvor schon nachgerechnet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Die C.R. DGL's sind also erfüllt.

Bedingung (4) $\frac{\partial z^2}{\partial \bar{z}} = 0$ wie im Bsp nach Def 3.5.a

Fazit: $f(z) = z^2$ ist komplex diffbar nach allen 3 äquivalenten Bedingungen.

Beweis vom Satz 3.6

(1) $\Rightarrow$ (2): Setze $R(z, z_0) := f(z) - f(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0)$

Der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{R(z, z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

existiert und ist gleich 0 nach Voraussetzung (1). Also

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + R(z, z_0)$$

mit $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{R(z, z_0)}{z - z_0} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \in \mathbb{C}$

und damit in trivialer Weise $\mathbb{C}$-linear

$\Rightarrow$ (2) ist erfüllt. ✓

(2) $\Rightarrow$ (1): Nach Satz 3.5 c) $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear genau dann wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ und somit

$$Df(z_0)(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0)$$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + R$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \text{ existiert.}$$ ✓

(2) $\Leftrightarrow$ (4): Das ist genau die Aussage vom Satz 3.5 c) ✓

(4) $\Leftrightarrow$ (3): $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (f = u + iv$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad ✓$$

Das beweist (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). $\boxed{//}$

<u>Definition 3.8</u> $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (offen) heißt <u>holomorph</u> auf $\mathcal{U}$, falls sie in jedem $z_0 \in \mathcal{U}$ komplex-differenzierbar ist.

<u>VORGRIFF</u> Wir werden später sehen, dass im Gegensatz zur reellen Analysis gilt:

cool

f auf $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen <u>EINMAL</u> kplx diffbar

$\Rightarrow f$ auf $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ <u>UNENDLICH OFT</u> kplx diffbar

Eine weitere Konsequenz der Holomorphie:

<u>Lemma 3.9</u> Seien $f, g : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$. Dann ex eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ so dass $f = g + c$.

dh: falls $h = f - g$ holomorph dann $\mathrm{Re}(h) = 0 \Rightarrow h = \mathrm{const}$

Beweis: Setze $h = f - g$

Dann ist z. zg $\boxed{Re(h) = 0 \Rightarrow h = \text{constant}}$

Cauchy-Riemann-DGL $\Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial Re(h)}{\partial x} = \frac{\partial Im(h)}{\partial y}$$

$$0 = \frac{\partial Re(h)}{\partial y} = - \frac{\partial Im(h)}{\partial x}$$

dh auf jeder Zusammenhangskomponente von U ist $Im\, h$ konstant. Also $Re(h) = 0$, $Im(h) = \text{const}$ also ist h konstant. $\square$

Beispiele holomorpher Funktionen:

1) Alle Polynome $f(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j (z - z_0)^j$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph

2) Sei $f: U_1 \to \mathbb{C}$, $g: U_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind

- $f \pm g$, $f \cdot g$ holomorph auf $U_1 \cap U_2$
- ü f/g holomorph auf $U_1 \cap U_2 \setminus \{\text{Nullstellen von } g\}$
- Falls Bild $g \subset U_1$, dann ist $f \circ g$ holom. auf U_2.

3) $f(z) = \bar{z}$ ist NICHT holomorph, ist nirgends kplx diffbar, da $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$.

nach Satz 3.6 (4)

§4. Komplexe Potenzreihen

Wir kommen zum GRUNDLEGENDEN Beispiel holomorpher Funktionen — komplexen Potenzreihen

Frage: Warum gefallen uns Polynome? (ins Publikum)

$$p(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0$$

$$\left(\text{oder allgemeiner } p(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot (z-z_0)^j \right)$$

→ p lässt sich leicher ableiten:

$$p(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j (z-z_0)^j \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot j \cdot (z-z_0)^{j-1}$$

→ im reellen lässt sich p leichter integrieren:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j (x-x_0)^j \Rightarrow \int p(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} \frac{a_j}{j+1} (x-x_0)^j$$

REALITÄTSCHECK:

- Leider sind nur wenige (holomorphe) Fkt. Polynome ☹
- Aber sie lassen sich durch Polynome approximieren!

Dazu betrachten wir eine Folge von Polynomen

$$\Bigg(\underbrace{\sum_{j=0}^{N} a_j \cdot (z-z_0)^j}_{=: p_N(z)}\Bigg)_{N \in \mathbb{N}_0}$$

und fragen uns wann $p_N(z)$ für $N \to \infty$ eine holomorphe Funktion annähert.

§ Reihen und Potenzreihen

<u>Definition 4.1</u> Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge kplxer Zahlen

a) Eine Reihe ist eine Folge von Summen $\left(\sum_{j=0}^{N} a_j\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$

Falls diese Folge konvergiert, setzen wir:

$$"\sum_{j=0}^{\infty} a_j" := \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_j$$

b) Eine Potenzreihe ist eine Folge von Polynomen $\left(\sum_{j=0}^{N} a_j (z-z_0)^j\right)_{N\in\mathbb{N}}$ für $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Falls diese Folge für ein $z\in\mathbb{C}$ konvergiert, setzen wir

$$"\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j" := \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_j (z-z_0)^j.$$

<u>Bemerkung</u>: Konvergenz in $\mathbb{C}$ ist genauso definiert wie in $\mathbb{R}$: Eine Folge $(u_N)_{N\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen U falls

$$|u_N - U| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Betrag kplxer Zahlen

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall N \geq N_0 : |u_N - U| \leq \varepsilon.$

<u>Wichtige Frage</u>: Wann genau konvergieren Reihen und Potenzreihen eigentlich?

Dh: wann approximiert die Folge von Polynomen tatsächlich eine Funktion?

ohne Beweis

Satz 4.2 (Konvergenzkriterien für Reihen)

Wir betrachten die Reihe $\left(\sum_{j=0}^{N} a_j\right)_{N\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$

a) Quotientenkriterium: $\rho := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

falls Grenzwert existier

- falls $\rho < 1$ dann konvergiert die Reihe, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$.
- falls $\rho > 1$ dann divergiert die Reihe, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$.
- falls $\rho = 1$ dann liefert das Kriterium keine Aussage.

b) Wurzelkriterium: $\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

- falls $\rho < 1$ dann konv. die Reihe, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$
- falls $\rho > 1$ dann divergiert die Reihe, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty$
- falls $\rho = 1$ dann liefert das Kriterium keine Aussage.

Bemerkung: Konvergenz für $\rho < 1$ gilt im Sinne von "absoluter Konvergenz", dh es gilt viel mehr:

$\left(\sum_{j=0}^{N} |a_j|\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$.

Beispiel 4.3 a) geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| = |x|$$

dh die geom. Reihe konv. falls $|x| < 1$
und div. falls $|x| > 1$
nach Quotientenkriterium

b) harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

dh das Quotientenkriterium liefert keine Aussage. Mit anderen Mitteln zeigt man dass die Reihe divergiert.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$: $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$

also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

<u>Satz 4.4</u> (Konvergenzkriterium für Potenzreihen)

Wir betrachten die Potenzreihe $\left(\sum_{j=0}^{N} a_j (z-z_0)^j\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$

a) <u>Quotientenkriterium für Potenzreihen</u>

$$R := \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{(falls Grenzwert existiert)}$$

b) <u>Wurzelkriterium für Potenzreihen</u>

$$R := \frac{1}{\rho} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

- falls $|z-z_0| < R$ dann konvergiert die Potenzreihe
- falls $|z-z_0| > R$ dann divergiert die Potenzreihe
- falls $|z-z_0| = R$ liefern die Kriterien keine Aussage.

Beweis:

a) Wir wenden das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum a_j (z-z_0)^j$ an:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z-z_0| \cdot \rho$$

- Reihe konvergiert falls $|z-z_0| \cdot \rho < 1$

$$\Longleftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\rho} =: R$$

- Reihe divergiert falls $|z-z_0| \cdot \rho > 1$

$$\Longleftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{\rho} =: R$$

$$R = \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

b) Wir wenden das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum a_j (z-z_0)^j$ an:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0| \cdot \rho$$

nun folgt analog aus dem Wurzelkriterium:

- Reihe konvergiert falls $|z-z_0| \cdot \rho < 1$

$$\Longleftrightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\rho} =: R$$

- Reihe divergiert falls $|z-z_0| \rho > 1$

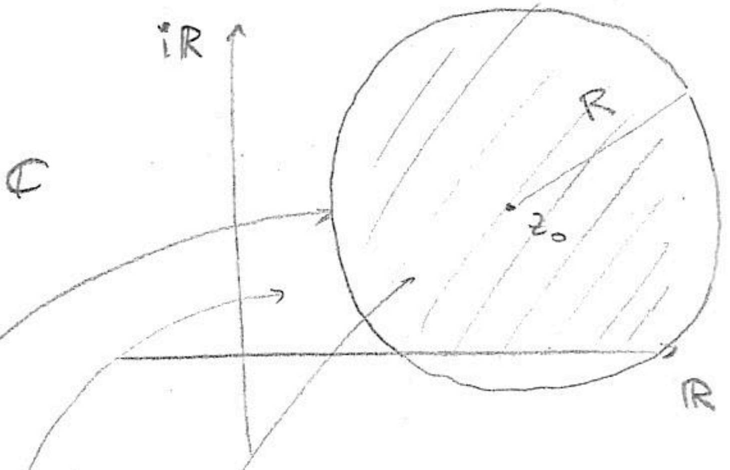
$$\Longleftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{\rho} =: R$$

$$R = \frac{1}{\rho} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

$\square$

<u>Veranschaulichung:</u> $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$

$$R := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$



(absolut)

innerhalb des Kreises $|z-z_0| < R$: Potenzr. konvergiert
außerhalb des Kreises $|z-z_0| > R$: Potenzr. divergiert
auf dem Kreis $|z-z_0| = R$: keine Aussage.

Deswegen nennt man R auch

$$\boxed{R - \text{Konvergenzradius}}$$

<u>Fazit:</u> Komplexe Potenzreihen konvergieren innerhalb ihres Konvergenzkreises $B_R(z_0)$ absolut ; $B_R(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R \}$

Beispiel 4.5

Bestimmen Sie Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{17+i}{j!} z^j$$

Lösung: Wir betrachten den Grenzwert

$$R := \lim_{j\to\infty} \frac{|(17+i)/j!|}{|(17+i)/(j+1)!|} = \lim_{j\to\infty} \frac{(j+1)!}{j!} = \lim_{j\to\infty} (j+1) = \infty$$

Das heißt, der Konvergenzradius R der Potenzreihe ist ∞.
Also die Potenzr. konvergiert für $|z| < R = \infty$, also ÜBERALL!

Theorem 4.6

- Komplexe Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzkreises holomorph.
- insbesondere können sie innerhalb des Konv-Kreises komplex differenziert werden mit

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot j \cdot (z-z_0)^{j-1}$$

Beweis: Wir betrachten die Potenzreihe $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ mit Konvergenzradius

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Wir berechnen Konv-Radius von $\sum_{j=0}^{\infty} a_j j (z-z_0)^{j-1} =: f'(z)$

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{n}}$$

$$= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

dh Konvergenzradius dieser Potenzreihe $f'(z)$ ist der gleiche wie für $f(z)$. Damit konvergieren beide Potenzreihen f, f' auf $B_R(z_0)$.

Wir zeigen für alle $z \in B_R(z_0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \qquad (*)$$

Damit ist f an allen $z \in B_R(z_0)$ komplex diffbar per Definition, also holomorph. Und $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$.

Für $(*)$ OBdA $z_0 = 0$. Wir rechnen für $z, z+h \in B_R(z_0 = 0)$

$$\frac{1}{h}\left[f(z+h) - f(z)\right] = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{\frac{(z+h)^j - z^j}{h}\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^{k} - z^{j} \right) \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^{k} \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^{k-1} \right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \underbrace{\binom{j}{1}}_{= j} z^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^{k-1}$$

$$= f'(z) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^{k-2} \right) \cdot h$$

Wir nutzen aus

$$\binom{j}{k} \leq j(j-1) \binom{j-2}{k-2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \cdot j(j-1) \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{j} \binom{j-2}{k-2} |z|^{j-k} \cdot |h|^{k-2}}_{= \sum_{k=0}^{j-2} \binom{j-2}{k} |z|^{j-k} |h|^{k}} \cdot |h|$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \cdot j(j-1) \cdot (|z|+|h|)^{j-2} \cdot |h|$$

Beachte: $z \in B_R(z_0=0) \Rightarrow |z| < R$

Wähle $|h|$ so klein, dass $|h| + |z| < R$.

Konvergenzradius von $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, j(j-1)\, u^j$ ist immernoch R, so dass für $|h|$ klein genug:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \cdot j \cdot (j-1)\, (|z|+|h|)^{j-2} < C(z)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq C(z)\,|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Das beweist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z).$$

und damit folgt

- f ist in $B_R(z_0)$ an jedem Pkt kplx diffbar
- $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, j\, (z-z_0)^{j-1}$

$\blacksquare$

<u>Bemerkung</u>: Potenzreihen sind innerhalb des Konv.-Kreises UNENDLICH oft kplx diffbar (und insbes. holomorph)

Beispiele von Komplexen Potenzreihen

- Exponentialfunktion $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (R=\infty)$

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

- Sinusfunktion: $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R=\infty)$

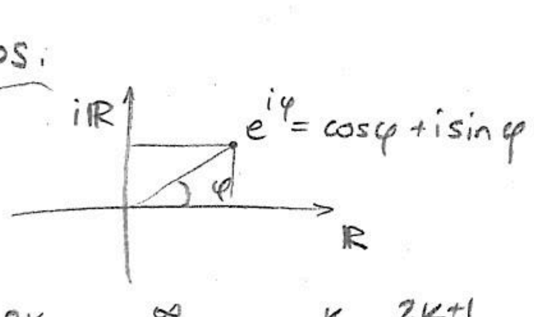
  Cosinusfunktion: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (R=\infty)$

$$\frac{\partial \sin(z)}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) \cdot z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos(z)$$

- Beziehung zwischen e^{iz} und $\sin/\cos$:

  Erinnerung: Polardarstellung:



$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{\substack{n=2k \\ k=0}}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{\substack{n=2k+1 \\ k=0}}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos z + i \sin z.$$

- Logarithmus: $\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad (R=1)$

$$\frac{\partial \log z}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cancel{n}(z-1)^{n-1}}{\cancel{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z-1)^n$$

$$= (\text{geom. Reihe}) \ \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z}.$$