Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 12

Aufgabe 54 (5 Punkte)**.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, sowie $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f_n genau dann lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn f_n gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

Aufgabe 55 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Zeta-Funktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

auf $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$ normal konvergiert.

Aufgabe 56 (5 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n \to f$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist jedes f_n injektiv, so ist f entweder konstant oder injektiv.

Aufgabe 57 (5 Punkte)**.**

i) Bestimmen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\cos(z)\sin(z)} dz,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben sei durch $t \mapsto 3142e^{2\pi it}$.

Hinweis. Betrachten Sie $\cot(z)'$.

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) = z^4 + 4z + 2$$

in $B_2(0)$ genau vier und in $B_1(0)$ genau eine Nullstelle besitzt.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 29. Januar 2016, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.