Prof. Dr. B. Vertman
M. Wunderlich

WS 2015/2016
WWU Münster

Übungen zur Funktionentheorie
Serie 8

Aufgabe 30. Beweisen Sie folgende Identitäten für den Tangens und Kotangens.

i)
$$\tan(z) = i\left(1 - \frac{2}{1+e^{2iz}}\right)$$

ii)
$$\operatorname{cotan}(z) = i\left(1 - \frac{2}{1-e^{2iz}}\right)$$

Aufgabe 31. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln:

i)
$$\frac{1}{\sin(z)} = \operatorname{cotan}(z) + \tan\left(\frac{z}{2}\right)$$

ii)
$$\operatorname{cotan}'(z) + \operatorname{cotan}^2(z) + 1 = 0$$

iii)
$$\begin{aligned} 2\operatorname{cotan}(2z) &= \operatorname{cotan}(z) + \operatorname{cotan}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{cotan}(z) - \tan(z) \end{aligned}$$

Aufgabe 32. Wir definieren den *Sinus hyperbolicus* als $\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ und den *Cosinus hyperbolicus* als $\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Beweisen Sie:

i)
$$\cosh'(z) = \sinh(z) \text{ und } \sinh'(z) = \cosh(z)$$

ii)
$$\cosh(z) = \cos(iz),\ \sinh(z) = -i\sin(iz) \text{ und } \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

iii) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt
$$\begin{aligned} \cosh(w+z) &= \cosh(w)\cosh(z) + \sinh(w)\sinh(z) \\ \sinh(w+z) &= \sinh(w)\cosh(z) + \cosh(w)\sinh(z). \end{aligned}$$

iv) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) \\ \sin(x+iy) &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

Aufgabe 33. Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in (0,\pi)\}$, $V = \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,\infty))$. Zeigen Sie, dass $\cos : U \to V$ biholomorph ist und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arccos : V \to U$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Freitag, den 18. Dezember 2015, um 10.00 Uhr, in den Briefkästen im Hörsaalgebäude.