

① Zeigen Sie, dass  $R$  tatsächlich ein "Tensor" ist, dh in allen 3 Komponenten "tensoriell" ist, im Sinne von  $\mathbb{R}C^\infty(M)$ -Linearität. Dh. für alle  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  und  $f \in C^\infty(M)$ :

$$R(f \cdot X, Y)Z = f \cdot R(X, Y)Z$$

$$R(X, f \cdot Y)Z = f \cdot R(X, Y)Z$$

$$R(X, Y)f \cdot Z = f \cdot R(X, Y)Z$$

○ Satz 11.2 Folgende Aussagen sind äquivalent für  $(M, g)$

a) Zu ~~jeder~~ <sup>einem</sup>  $p \in M$  existiert  $U \subset M$  und eine Isometrie  $(U, g|_U) \xrightarrow{f} (f(U) \subset \mathbb{R}^n, g|_{\mathbb{R}^n})$  <sup>eukl.</sup>  
 dh  $g$  ist lokal isometrisch zur eukl. Metrik

b) Der Riemannsche Krümmungstensor  $R \equiv 0$  in einer Umgebung  $U$  um  $p \in M$ .

○ Beweis: " $\Rightarrow$ " Wir nehmen  $f$  als Karte mit Koordinatenvektorfeldern  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ . Wegen der Isometrie, ist  $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$  identisch auf der gesamten Koordinatenumgebung. Dann  $\nabla_X Y = DY \cdot X$  wie in Lemma 9.4

Nun:  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0 \Rightarrow$

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})Z = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z - \underbrace{\nabla_{[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]} Z}_{=0}$$

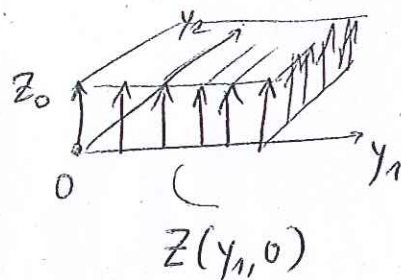
$$= \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

$\nabla_X Y = DY \cdot X$

" $\Leftarrow$ " Sei  $(U, \varphi)$  eine Kartenumgebung um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$  und lokalen Koord.  $y_1, \dots, y_n$ . Sei  $Z_0 \in T_p M$  beliebig.

Schritt 1: Wir konstruieren ein lokales VF  $Z \in \Gamma(TU)$  so dass  $Z_p = Z_0$  und  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_i}} Z \equiv 0$  für alle  $i$ :  
Wir erklären die Konstruktion für  $n=2$ :

- verschiebe  $Z_0$  parallel entlang der  $y_1$ -Achse. Das liefert  $Z(y_1, 0)$  VF entlang der  $y_1$ -Achse.
- verschiebe  $Z(y_1, 0)$  für jedes  $y_1$  entlang der  $y_2$ -Achse. Das liefert  $Z(y_1, y_2)$  und per Konstruktion:



$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_2}} Z \equiv 0 \text{ überall}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} Z \equiv 0 \text{ an } (y_1, 0)$$

Nun gilt:  $R \equiv 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_2}} Z = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} Z$  überall

$$\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} Z \equiv 0 \text{ überall}$$

also ist  $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} Z)$  parallel entlang aller Geraden in  $y_2$ -Richtung.

Da aber  $(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} Z)$  an allen  $(y_1, 0)$  null ist, sind alle Parallelverschiebungen ebenfalls Null und daher ist  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_1}} Z \equiv 0$  überall. Beweis analog für alle  $n$

$$\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_i}} Z \equiv 0 \text{ für alle } i.$$



Schritt 2: Sei  $(Z_1)_0, \dots, (Z_n)_0$  eine ONB von  $T_p M$   
 und  $Z_1, \dots, Z_n$  entsprechende lokale VF  
 wie im Schritt 1.

$$\nabla \text{ torsionsfrei} \Rightarrow \nabla_x Y - \nabla_y X - [X, Y] = 0$$

$$\Rightarrow [Z_i, Z_j] = \nabla_{Z_i} Z_j - \nabla_{Z_j} Z_i = 0$$

Also kommutieren alle VF  $\{Z_j\}$ .

$$\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$$

wegen Schritt 1

(ii) Lemma: Falls  $Z_1, \dots, Z_n \in \Gamma(TM)$   
 und  $Z_1(p), \dots, Z_n(p)$  eine Basis von  
 $T_p M$  bilden, sind folgende Aussagen  
 äquivalent a)  $\exists$  lok. Koord  $\{x_j\}$  s.d.  $Z_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \forall j$   
 b)  $[X_i, X_j] \equiv 0$  nahe  $p \in M$ .

Beweis: " $\Rightarrow$ " klar. " $\Leftarrow$ ": nutze die Flüsse von  
 den VF.

$\Rightarrow$  es existieren Koord  $\{x_1, \dots, x_n\}$  nahe  $p \in M$   
 so dass  $Z_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  für  $j=1, \dots, n$ .

Schritt 3: Wegen Lemma 10.3 sind Parallelverschiebungen  
 orthogonaler Vektoren immer noch orthogonal.

$(Z_1)_0, \dots, (Z_n)_0$  ONB von  $T_p M$

$\Rightarrow (Z_1, \dots, Z_n)$  bilden einen lokalen  
 orthonormalen Rahmen, das heißt  $\{Z_j(q)\}$   
 ist ONB von  $T_q M$  für  $q$  nahe  $p$ .

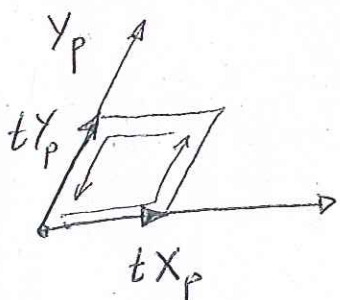
$\Rightarrow g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv \delta_{ij}$ , also lokal  
 isom. zur Eukl. M.  $\square$

Wir sehen, dass  $R$  einen Aufschluss darüber gibt, ob die MfK  $(M, g)$  lokal flach ist. Daher kann  $R$  aufzeigen, ob  $M$  gekrümmt ist oder nicht.

Alternative Interpretation von  $R$  mittels Parallelversch.

Satz 11.3 Sei  $(M, g)$  eine Riem. MfK und  $R$  der Riem. Krümmungstensor. Seien  $X_p, Y_p, Z_p \in T_p M$  und  $X_p, Y_p$  linear unabhängig.

$Z_{p,t} \in T_p M$  sei der Tangentialvektor, der sich aus  $Z_p$  durch Parallelverschiebung entlang



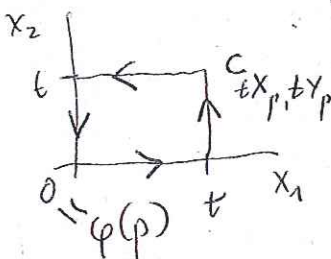
des von  $tX_p$  und  $tY_p$  aufgespannten Parallelogramms ergibt.

Dann gilt:

(ohne Beweis)

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Z_p - Z_{p,t}}{t^2}$$

Bemerkung: Aufgespanntes Parallelogramm ist explizit definiert wie folgt: Wähle Koordinaten  $(U, \varphi)$  um  $p \in M, \varphi(p) = 0$  so dass  $X_p = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p; Y_p = \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p$  (da  $X_p, Y_p$  linear unabh. sind geht das immer). Betrachte in  $\varphi(U)$  die Kurve



Das Parallelogramm ist die Kurve  $\varphi^{-1} \circ c_{tX_p, tY_p}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R(X_p, Y_p)Z_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Z_p - \varphi^{-1} \circ c_{tX_p, tY_p}^{-1} Z_p}{t^2} \end{aligned}$$



Krümmungstensor misst, wie sehr ein Vektor bei Parallelverschiebung entlang eines geschlossenen Weges bei Rückkehr zum Ausgangspunkt verändert wird.

Wir haben in Bsp 10.4 a) gesehen, dass  $P_c \in \text{Hol}_p(M)$  von der Kurve  $c$  abhängt. Aus Satz 11.4 kann man folgern:

Korollar 11.5 Folgende Aussagen sind äquivalent

- Satz 11.2
- a)  $R \equiv 0$  nahe  $p \in M$
  - b)  $g$  ist lokal isometrisch zur Eukl. Metrik nahe  $p$
  - c) Parallelversch  $P_c \in \text{Hol}_p(M)$  sind lokal unabh. von  $c$ .
- (ohne Beweis)

### Weitere Krümmungsbegriffe

#### Definition 11.6

a) Ricci-Krümmung  $\text{Ric} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Ric}(X, Y) := \sum_{i=1}^n g(R(\frac{\partial}{\partial x_i}; X) Y; \frac{\partial}{\partial x_i})$$

→ wobei  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  ein lokaler ON-Rahmen ist.

(ii) Ric ist symmetrischer (✓) Tensor (✓)

oder halt punktweise aufschreiben und ONB wählen

b) Skalarkrümmung  $\text{scal} \in C^\infty(M)$

$$\text{scal}_p := \sum_{i=1}^n \cancel{g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i})} \text{Ric}_p(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i})$$

wobei  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$  eine ONB von  $T_p M$  ist.

c) Für jeden 2-dim. Unterraum  $\mathfrak{b} = \text{span} \langle X_p, Y_p \rangle \subset T_p M$

heißt  $K_{\mathfrak{b}} := g_p (R_p (X_p, Y_p) Y_p, X_p)$

"Schnittkrümmung von  $g$  bei  $p \in M$  bzgl  $\mathfrak{b}$ "

Bemerkung: • Ric, scal stellen Mittelwerte des Riem. Krümmungstensors dar.

• Falls Ric  $\equiv \lambda g$  auf ganz  $M$ , dann heißt  $(M, g)$  "Einstein-MfK";  $\lambda$  - Einstein-Konstante

• R ist durch  $\{K_{\mathfrak{b}}\}_{\mathfrak{b}}$  eindeutig bestimmt.

Algebraische Eigenschaften des Krümmungstensors:

Satz 11.7 Seien  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ . Dann gilt:

a)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

Beachte: die Reihenfolge ist die gleiche

b)  $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$

"1. Bianchi Identität"

c) Die kovariante Ableitung des Riem. Krümmungstensors  $R$  sei wie folgt definiert Beweis !!

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W) := \nabla_X [R(Y, Z)W] - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)(\nabla_X W)$$

Dann gilt die "2. Bianchi Identität"

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0$$



Beweis: (a) folgt unmittelbar aus der Def. von R:

$$\begin{aligned} R(X, Y) \cdot &= \nabla_X \nabla_Y \cdot - \nabla_Y \nabla_X \cdot - \nabla [X, Y] \cdot \\ &= -R(Y, X) \cdot \text{ weil } [X, Y] = -[Y, X]. \end{aligned}$$

(b) Da R in allen Komponenten tensoriell ist, können wir die Identität für Koordinatenvektorfelder  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  nachprüfen (allg. Aussage folgt weil multiplikative Faktoren  $X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$  "herausgezogen" werden dürfen, und wegen Linearität). Sei  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $Z = \frac{\partial}{\partial x_k}$  lok. VF.

$$\Rightarrow [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] \stackrel{!}{=} 0$$

in einer lokalen Umgebung.

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X =$$

$$= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \cancel{\nabla [X, Y] Z} \\ = 0$$

$$+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \cancel{\nabla [Z, X] Y} \\ = 0$$

$$+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \cancel{\nabla [Y, Z] X} \\ = 0$$

$$= \nabla_X \left\{ \underbrace{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y}_{=[Y, Z]=0} \right\} + \nabla_Y \left\{ \underbrace{\nabla_Z X - \nabla_X Z}_{=[Z, X]=0} \right\} + \nabla_Z \left\{ \underbrace{\nabla_Y X - \nabla_X Y}_{=[X, Y]=0} \right\}$$

= 0.

← Gleichheit ist nicht offensichtlich!

$\nabla$  torsionsfrei (Levi-Civita)  $\Rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$

$$\Rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

(c) Beweis:  $\textcircled{ii}$  (Hinweis: Folge b)

$\square$

§ 12. Krümmung Riemannscher Untermfk

soweit möglich  
bleiben wir allgemeiner

- Wir betrachten hier den Spezialfall  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ,  $k=1, n=2$ .
- Verallg. von Flächen auf allg. Untermfk. folgt mit etwas mehr Arbeit.

Definition 12.1 Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$  eine Untermfk. Sei  $\hat{g}$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^{n+k}$  und  $g_p := \hat{g}|_{T_p M}$  die induzierte Riemannsche Metrik auf  $M$ . Für jedes  $p \in M$  existiert eine Zerlegung

$$T_p \mathbb{R}^{n+k} = T_p M \oplus N_p M$$

mit  $\hat{g}_p(T_p M; N_p M) = 0$ .

- $N_p M$  heißt Normalraum von  $M$  am Punkt  $p \in M$
- $NM := \bigcup_{p \in M} N_p M$  heißt Normalenbündel von  $M$

$\textcircled{ii}$   $NM$  ist ein Vektorbündel über  $M$ .

Definition 12.2 Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Eine Vektorfeld  $N \in \Gamma(NM)$  heißt Einheitsnormalenfeld falls  $\|N(p)\|_{\wedge} \equiv 1$ . Eine Hyperfläche  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  heißt orientierbar,  $g_p$  wenn sie ein Einheitsnormalenfeld  $N$  besitzt.

Beispiele: a) lokal lässt sich  $N$  für  $n=2$  wie folgt definieren: Sei  $(\mathcal{U}, \varphi)$  eine lokale Karte.

$$N(p) = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_p \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}|_p}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_p \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}|_p \right\|_{\wedge} g_p}$$



b) global braucht ~~es~~ ein Einheitsnormalenfeld nicht zu existieren, d.h. es gibt nicht orientierbare U'mflk., z.B.: Möbiusband. (Problem ist dass  $N$  nicht stetig wäre)

c) Falls  $M = F^{-1}(\{0\})$  Niveaumenge ~~von~~ von  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $DF|_p \in T_p^* \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  auf  $p \in M$  nicht verschwindet, dann  $N(p) = \pm \frac{DF|_p}{\|DF|_p\|}$  definiert ein glattes Einheitsnormalenfeld, d.h.  $M$  ist in diesem Fall orientierbar.

Ziel: Ablesen der Krümmung aus der Änderung des Einheitsnormalenvektorfelds  $N \in \Gamma(NM)$  entlang von Kurven.

Definition 12.3 "Die Weingartenabbildung"

$$W_p: T_p M \rightarrow T_p M; X \mapsto - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\gamma(t))$$

wobei  $\gamma(t)$  eine Kurve in  $M$  ist mit  $\gamma(0) = p; \dot{\gamma}(0) = X$ . Die Abbildung ist linear und hängt von der Wahl von  $N$  auf deiner orientierten Hyperfläche  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

unabh. von der Wahl von  $\gamma$

Frage ins Publikum: Warum ist  $\left. \frac{d}{dt} \right|_0 N(\gamma(t)) \stackrel{?}{\in} T_p M$ ?

Antwort:  $\hat{g}(N(\gamma(t)); N(\gamma(t))) = \|N(\gamma(t))\|^2 \stackrel{\hat{g}}{=} 1$  für alle  $t$ . Ableiten nach  $t$  liefert:

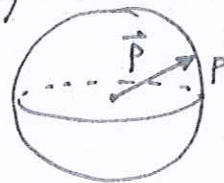
$$2 \hat{g}\left(N(\gamma(t)); \frac{d}{dt} N(\gamma(t))\right) = 0$$

da  $N(p)$  das ganze  $N_p M$  aufspannt, d.h. gilt nur in  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$   $\Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_0 N(\gamma(t)) \perp N_p M \Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_0 N(\gamma(t)) \in T_p M$

Beachte:  $W_p(X) = - \frac{d}{dt} \Big|_0 N(\gamma(t)) = - DN \Big|_p [X]$   
 also gilt:  $W_p \equiv - DN \Big|_p : T_p M \rightarrow T_p M.$

Bemerkung: (ii) allgemein gilt:  $W_p(X) = \text{proj}_{T_p M} (\nabla_X N)$

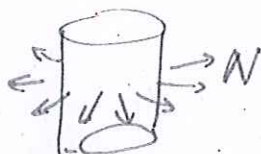
Beispiele: a)  $M = \mathbb{S}^2$ ;  $N(p) = \vec{p}$   
 $N$ -nach außen zeigendes  
 Einheitsnormalenfeld.



$$W_p = - DN \Big|_p = - \text{id}_{T_p M} \text{ für alle } p \in M.$$

b)  $M = \text{Ebene in } \mathbb{R}^3$ , z.B.  $M = \{x=0\} \subset \mathbb{R}^3_{\{(x,y,z)\}}$   
 $N(0,y,z) = (1,0,0)^t \perp M$ ;  $W_p = - DN \Big|_p \equiv 0.$

c)  $M = \text{Zylinder in } \mathbb{R}^3$  mit Karte  $\varphi : M \rightarrow [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$



$$\varphi^{-1}(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)^t$$

$N$ -nach außen zeigendes Einheitsnormalenfeld

$$N(\varphi^{-1}(\theta, z)) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^t$$

$$\Rightarrow W \left( \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial N(\varphi^{-1}(\theta, z))}{\partial \theta} = - \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenso gilt:  $W \left( \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial z} \right) = 0.$  Also gilt

für  $W : TM \rightarrow TM$  bzgl der Basis  $\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \theta}; \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial z} \right\rangle = TM$

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 12.4 "Die 2-te Fundamentalform"

$$\mathbb{II}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

ist bilineare Abbildung definiert wie folgt:



- a) falls  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine orientierte Hyperfläche mit der Weingartenabbildung  $W$ , dann setze

$$\mathbb{I}_p(X, Y) := g_p(W_p(X), Y).$$

- b) im allgemeinen Setting, sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$  und für  $p \in M$   $\text{proj}_p: T_p \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow N_p M$  die orthogonale Projektion von  $T_p \mathbb{R}^{n+k} = T_p M \oplus N_p M$  auf die 2-te Komponente. Dann setze für  $\nabla^\circ$  die triviale kovariante Ableitung auf  $\mathbb{R}^{n+k}$ :

$$\mathbb{I}_p(X, Y) := \text{proj}_p \left( \nabla_{\hat{X}}^\circ \hat{Y} \right),$$

wobei  $X, Y \in T_p M$  zu einem lokalen glatten Vektorfeld  $\hat{X}, \hat{Y}$  auf  $\mathbb{R}^{n+k}$  fortgesetzt wird.

- ü) Zeigen Sie, dass im Fall von orientierten Hyperflächen  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  beide Definitionen äquivalent sind.

Lemma 12.5 Die zweite Fundamentalförm ist symmetrisch

$$\mathbb{I}_p(X, Y) = \mathbb{I}_p(Y, X)$$

und in beiden Komponenten tensoriell.

Beweis: Wir nutzen die allgemeine Definition 12.4 b).

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(X, Y) - \mathbb{I}_p(Y, X) &= \text{proj}_p \left( \nabla_{\hat{X}}^\circ \hat{Y} \right) - \text{proj}_p \left( \nabla_{\hat{Y}}^\circ \hat{X} \right) \\ &= \text{proj}_p \left( \nabla_{\hat{X}}^\circ \hat{Y} - \nabla_{\hat{Y}}^\circ \hat{X} \right) \\ &= \text{proj}_p \left( [\hat{X}, \hat{Y}] \right) = \text{proj}_p \left( \underbrace{[X, Y]}_{\in T_p M} \right) \end{aligned}$$

$\nabla^\circ$  ist Levi-Civita und insbesondere torsionsfrei

$\stackrel{!}{=} 0$

Per Definition ist  $\Pi_p(X, Y)$  in der ersten Komponente tensoriell.  
Wegen Symmetrie nun auch in der 2-ten Komponente.  $\square$

Geometrische Interpretation der 2. Fundamentalform:

Def 2.1

Wir erinnern uns, dass bei Kurven  $\gamma$  (nach Bogenlänge parametrisiert) die Krümmung durch  $\kappa(t) = \langle \dot{T}(t), N(t) \rangle$  definiert war ( $T(t) = \dot{\gamma}(t)$ ;  $\dot{T}(t) = \ddot{\gamma}(t)$ ;  $N$ -Normalenfeld)  
Genau das gleiche tun wir nun im Falle von Mflk:

Definition 12.6 Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine Untermflk,  $N \in \Gamma(TM)$  das Einheitsnormalenfeld,  $X \in T_p M$  mit  $\|X\|=1$ . Für Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = X$  sei

$$\kappa_n := g_p^\circ(\ddot{\gamma}(0); N(p))$$

die "Normalenkrümmung von  $M$  in  $p \in M$  in Richtung von  $X$ .

Proposition 12.7 Im Setup der Def 12.6 ist

$\kappa_n \stackrel{!}{=} \Pi_p(X, X)$  die Normalenkrümmung von  $M$  in  $p \in M$  in Richtung von  $X$ .

Beweis:  $N(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t) \Rightarrow g_p^\circ(N(\gamma(t)); \dot{\gamma}(t)) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \Big|_0 g_p^\circ(N(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) = g_p^\circ\left(\frac{d}{dt} \Big|_0 N(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\right) \\ &\quad + g_p^\circ(N(\gamma(t)), \ddot{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Pi_p(X, X) &= -g_p^\circ\left(\frac{d}{dt} \Big|_0 N(\gamma(t)); \underbrace{\dot{\gamma}(0)}_X\right) \\ &\stackrel{!}{=} g_p^\circ(N(p); \ddot{\gamma}(0)) = \kappa_n. \end{aligned}$$



## Hauptkrümmungen, Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung

Definition 12.8 Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine Untermannigk.

- a) Hauptkrümmungen  $\kappa_1(p)$ ;  $\kappa_2(p)$  sind der kleinste und der größte Wert von  $\mathbb{II}_p(X, X)$  über alle  $X \in T_p M$  mit  $\|X\| = 1$ . Die zugehörigen  $X$  heißen Hauptkrümmungsrichtungen.
- b) Gauß-Krümmung  $K(p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p)$  für  $n=2$ .
- c) mittlere Krümmung  $H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$

Proposition 12.9  $\kappa_1(p)$  und  $\kappa_2(p)$  sind Eigenwerte von  $W_p$

Beweis: (U)

Bemerkung: Damit folgt:

•  $K(p) = \det W_p$

•  $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} W_p$

← hier bitte Seite 75 a) hinten einfügen

Berechnungen in lokalen Koordinaten:

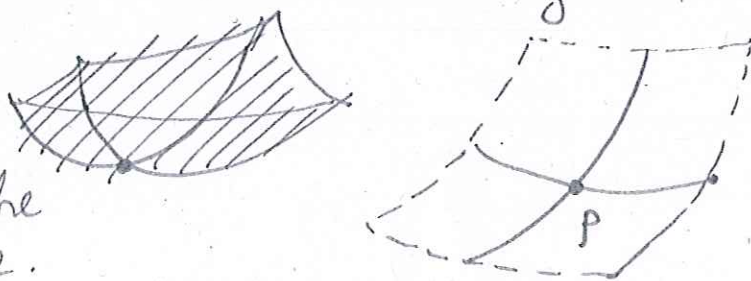
- $(U, \varphi)$  lokale Karte ;  $\varphi = \varphi^{-1}$
  - $g_{ij} = g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$  Riemannsche Metrik ;  $g^{ij} = (g_{kl}^{-1})_{ij}$
  - $h_{ij} = \mathbb{II}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$  2-te Fundamentalfonn
  - $\Gamma_{jk}^i$  — Christoffel-Symbole der Levi-Civita Abl. auf  $(M, g)$ .
  - $N$  — Einheitsnormalenfeld
- (in diesem Abschnitt  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  orientierte Hyperfläche)

## Geometrische Interpretation von $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

Erinnerung: Nach Prop 12.7 ist  $\Pi_p(X, X)$  die Normalenkrümmung von  $M$  in  $p \in M$  in Richtung von  $X$ .

Fall 1:  ~~$\kappa_1(p) > 0; \kappa_2(p) > 0$~~   $K(p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p) > 0$

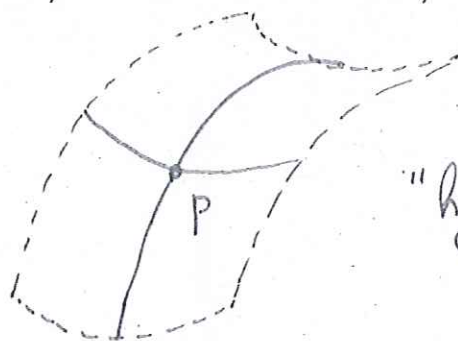
OBdA  $\kappa_1(p) > 0; \kappa_2(p) > 0$ . Sowohl die maximale als auch die minimale Normalenkrümmung sind  $> 0$ .



dh  $M^2$  ist in der Nähe von  $p$  eine Schale.

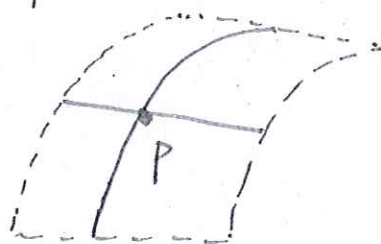
(falls  $\kappa_1(p) < 0, \kappa_2(p) < 0$ , ist die Schale nach unten gekippt).  
"elliptischer Punkt"

Fall 2:  $K(p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p) < 0$



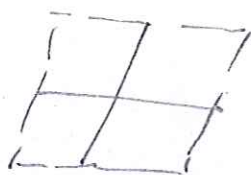
"hyperbolischer Punkt"

Fall 3:  $K(p) = 0$  aber nicht beide  $\kappa_i$  sind Null



"parabolischer Punkt"

Fall 4:  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$



"Flachpunkt"



Satz 12.10 "Frenet-Formeln für Hyperflächen"

vergleiche Frenet-Formeln für Kurven

a)  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\kappa} \Gamma_{ij}^{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} + h_{ij} \cdot N$

b)  $\frac{\partial N}{\partial x_{\kappa}} = - \sum_{ij} h_{\kappa j} g^{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

Beweis: a) In der Bemerkung 9.10 haben wir gesehen

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle \cdot N \\ &= \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}^{\circ} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big| = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}^{\circ} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, N \right\rangle = \text{II} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - h_{ij} \cdot N \end{aligned}$$

wegen Def. 12.4 b)  
siehe auch Übung 9

Nun ist  $\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{\kappa} \Gamma_{ij}^{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}}$  per Def. der Christoffel-Symbole.

b)  $-\frac{\partial N}{\partial x_{\kappa}} \equiv W \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} \right)$ . Sei  $W = (w_{ij})$

Matrix-Darstellung der Weingarten-Abb.

$W: TM \rightarrow TM$  bzgl. der Basis  $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\ell}} \right\}_{\ell}$ .

•  $\text{II}(X, Y) = g(W(X), Y)$   
 schreibt sich in Matrixform als  $(h_{ij})_{ij} = (g_{ij})_{ij} \cdot (w_{ij})_{ij}$   
 ~~$(h_{ij})_{ij} = (g_{ij})_{ij} \cdot (w_{ij})_{ij}$~~   
 $= (w_{ij})_{ij} \cdot (g_{ij})_{ij}$   
 da alle Matrizen symm.

$\Rightarrow (w_{ij})_{ij} = (h_{ij})_{ij} \cdot (g_{ij}^{-1})_{ij}$

$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x_{\kappa}} = -W \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} \right) = - \sum_{\ell} w_{\kappa \ell} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\ell}}$   
 $= - \sum_{\ell} h_{\kappa \ell} g_{\ell j}^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$



Satz 12.11 "Gauß-Gleichung"

~~Sei  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  Untermannigk~~ Sei  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  Untermannigk

mit der induzierten Metrik  $g$ . Sei  $(U, \varphi)$ ;  $\varphi = \varphi^{-1}$  lok. Karte

Betrachte  $R \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} = \sum_{\kappa} R_{\ell ij}^{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}}$ . Dann gilt:

$$R_{\ell ij}^{\kappa} = \sum_m (h_{j\ell} h_{im} - h_{i\ell} h_{jm}) g^{m\kappa}$$

Beweis: Index-Schlacht!

a) Aus der Definition von  $R_{\ell ij}^{\kappa}$  erhalten wir

$$R_{\ell ij}^{\kappa} = \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^{\kappa}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^{\kappa}}{\partial x_j} + \sum_{\alpha} (\Gamma_{j\ell}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^{\kappa} - \Gamma_{i\ell}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^{\kappa})$$

b) Leiten wir die Formel in Satz 12.10 a) ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{\alpha} \Gamma_{j\ell}^{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} + h_{j\ell} \cdot N \right)$$

$$= \sum_{\kappa} \left( \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^{\kappa}}{\partial x_i} + \sum_{\alpha} \Gamma_{j\ell}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^{\kappa} - h_{j\ell} \omega_{i\kappa} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}}$$

$$+ \left( \sum_{\alpha} \Gamma_{j\ell}^{\alpha} h_{i\alpha} + \frac{\partial h_{j\ell}}{\partial x_i} \right) \cdot N \quad (*)$$

langes Nachrechnen

Es gilt  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_\ell} \right)$

Also sind die Ausdrücke  $(i \leftrightarrow j)$ , (\*) für  $(j\ell)$  und  $(j\ell)$  gleich.

Wir ziehen sie voneinander ab und erhalten:

$$\sum_{\kappa} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{j\ell}^{\kappa}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^{\kappa}}{\partial x_j} + \sum_{\alpha} (\Gamma_{j\ell}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^{\kappa} - \Gamma_{i\ell}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^{\kappa}) - (h_{j\ell} \omega_{i\kappa} - h_{i\ell} \omega_{j\kappa}) \right\}$$

$$\dots \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} + \left[ \sum_{\alpha} (\Gamma_{j\ell}^{\alpha} h_{i\alpha} - \Gamma_{i\ell}^{\alpha} h_{j\alpha}) + \frac{\partial h_{j\ell}}{\partial x_i} - \frac{\partial h_{i\ell}}{\partial x_j} \right] \right\} N$$



Da  $\left\{ \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\}_{k=1}^n \mid N \right\}$  linear unabh. (Basis von  $T_p \mathbb{R}^{n+1}$ ) sind,  
sind die einzelnen Summanden in  $\{ \dots \}$ -Klammern jeweils  $= 0$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x_j} + \sum_{\alpha} (\Gamma_{jl}^{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^k - \Gamma_{il}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^k)}_{= R_{lij}^k \text{ wegen (a)}} = h_{jl} \omega_{ik} - h_{il} \omega_{jk}$$

$$\Rightarrow R_{lij}^k = h_{jl} \omega_{ik} - h_{il} \omega_{jk}$$

$$= h_{jl} \left( \sum_m h_{im} g^{mk} \right) - h_{il} \left( \sum_m h_{jm} g^{mk} \right)$$

$$\boxed{(\omega) = (h) \cdot (g^{-1})}$$

wie im Beweis  
von Satz 12.10

$$= \sum_m (h_{jl} h_{im} - h_{il} h_{jm}) g^{mk}$$

□

Korollar 12.12 ("Theorema Egregium von Gauß")

Sei  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche. Dann ist die Gauß-Krümmung  $K$  eine Größe der Inneren Geometrie, dh. nur von der induzierten Riem. Metrik  $g$  abhängig und es gilt:

$$K = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})}$$

und von ihren  
Ableitungen

wobei  $R_{kl ij} = g(R(\partial_i, \partial_j) \partial_l, \partial_k)$

Beweis: Sei zunächst einmal  $M$  orientiert:

(Sobald die Formel bewiesen ist, hängen die Gauß-Krümmung  $K$  nicht mehr von  $\Pi$  ab und wir können mit lokalem Normalenfeld  $N$  arbeiten, und müssen Orientierbarkeit nicht mehr extra annehmen)

Wegen Satz 12.11 gilt:  $R_{2121} = h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}$   
 $= \det (h_{ij})_{ij}$

Wegen Def 12.8 und Prop 12.9 gilt:

$$K = \frac{\det (h_{ij})_{ij}}{\det (g_{ij})_{ij}} = \frac{R_{2121}}{\det (g_{ij})_{ij}} \quad \square$$

### § 13. Geodätische und kürzeste Verbindungslinien

Wir erinnern uns an die Def. 10.5

Eine Kurve  $\gamma$  in  $(M, g)$  heißt Geodätische falls  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$ , dh. falls  $\dot{\gamma}(t)$  parallel entlang von  $\gamma(t)$  ist.

#### Satz 13.1 (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen)

Sei  $(M, g)$  eine Riem. MfK mit  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ . Dann gibt es genau eine Geodäte  $\gamma: I \rightarrow M$  mit maximalem Definitionsbereich  $I$  und  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$ .  $\gamma$  ist glatt, von  $t, p$  und  $v$  abhängig.

Beweis: Wir schreiben  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$  in lok. Koord. auf  $(U, \varphi)$ :

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(u^1(t), \dots, u^n(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_i \frac{\partial u^i(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Mit der gleichen Rechnung wie im Beweis von Satz 10.2

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{u}^k + \sum_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k.$$

Das ist ein System von  $n$  DGL 2-ter Ordnung der Form



$\ddot{\vec{u}} = F(\vec{u}, \dot{\vec{u}})$  mit  $\vec{u} = (u^1, \dots, u^n)$ . Nach dem Existenz- und Eindeigkeitsatz besitzt das System eine eindeutige Lösung  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  für  $\varepsilon > 0$  klein genug, die glatt von der Zeit  $t$  und von den Anfangsbed  $\gamma(0) = p; \dot{\gamma}(0) = v$  abhängt. Fortsetzung zum maximalen Intervall  $(\vec{u})$ .  $\square$

### Geometrische Bedeutung von Geodätischen:

Satz 13.2 Kürzeste Linien sind Geodäten. D.h. für  $(M, g)$  gilt:

Sei  $p, q \in M$  gegeben und  $\gamma$  kürzeste Kurve von  $p$  nach  $q$  d.h.  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$  mit

$$L_g(\gamma) = d_g(p, q).$$

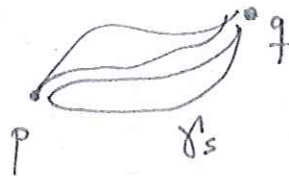
Dann ist  $\gamma$  eine Geodätische und insbesondere glatt (statt nur stückweise glatt).

Beweis: Setze  $L := L_g(\gamma)$ . Sei  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert, d.h.  $\gamma: [0, L] \rightarrow M, \gamma(0) = p, \gamma(L) = q$ .

Sei  $\gamma'_s: [0, L] \rightarrow M$  eine Schar von regulären Kurven (nicht notwendigerweise nach Bogenlänge param);  $\gamma'_0 = \gamma$ .

$$s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \gamma'_s(0) = p; \gamma'_s(L) = q.$$

Nehme an  $\gamma'_s(t) = \gamma(s, t)$  ist glatt in  $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, L]$ .



$$L(\gamma'_s) = \int_0^L \sqrt{g(\dot{\gamma}'_s(t); \dot{\gamma}'_s(t))} dt$$

•  $L(\gamma'_s)$  ist glatt in  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

• per Annahme hat es ein Minimum bei  $s = 0$ .

$\gamma'_0$  minimiert ja  $L(\gamma'_s)$

$$\text{d.h. } \frac{d}{ds} \Big|_0 L(\gamma'_s) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) &= g\left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \dot{\gamma}; \dot{\gamma}\right) + g\left(\dot{\gamma}, \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \dot{\gamma}\right) \\ &= 2g\left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \dot{\gamma}; \dot{\gamma}\right) \end{aligned}$$

Beachte wegen Torsionsfreiheit für Levi-Civita Ableitung  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial t}} \frac{\partial \gamma}{\partial s} - \underbrace{\left[\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right]} \\ &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial s}} \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \Big|_0 L(\gamma_s) = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_0(t), \dot{\gamma}_0(t))}} \left\{ g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{s=0}(t); \dot{\gamma}(t)\right) - g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{s=0}(t); \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0(t)\right) \right\} dt.$$

~~Wegen~~ Wegen  $\gamma_0$  nach Bogenlänge param

gilt  $\|\dot{\gamma}_0(t)\|_g = \sqrt{g(\dot{\gamma}_0(t), \dot{\gamma}_0(t))} = 1$ . Wir rechnen

$$= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_0(t); \dot{\gamma}_0(t)\right) dt$$

$$- \int_0^L g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_0(t); \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0(t)\right) dt$$

Wir leiten das erste Integral auf und erhalten:

$$\frac{d}{ds} \Big|_0 L(\gamma_s) = g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_0(t); \dot{\gamma}(t)\right) \Big|_{t=0}^{t=L} - \int_0^L g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_0, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0\right)$$



Beachte:  $\gamma_s'(0) = p, \gamma_s'(L) = q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial s}(0) = \frac{\partial g}{\partial s}(L) = 0$   
 also ist der erste Term  $\equiv 0$ . Wir folgern:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{1. \text{Variationsformel}} \\ \frac{d}{ds} \Big|_0 L(\gamma_s) = - \int_0^L g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_0(t), \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0(t) \right) dt \end{array}}$$

Nun ist  $\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_{s=0} =: X(t)$  ein Vektorfeld entlang  $\gamma$ .

Nun war aber  $\gamma_s$  frei wählbar und zu jedem VF  $X(t)$  entlang  $\gamma$  mit  $X(0) = X(L) = 0$  gibt es eine Schar  $\gamma_s$

mit  $\frac{\partial \gamma}{\partial s} \Big|_0 = X$ . Damit folgt die Behauptung aus

dem nächsten Lemma mit  $Y = \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0 \stackrel{!}{=} 0$ .  $\square$

(ii)

Lemma: Sei  $Y$  ein VF entlang  $\gamma: [0, L] \rightarrow M$ .

Angenommen, für jedes VF  $X$  entlang  $\gamma$  mit

$X(0) = X(L) = 0$  gilt:  $\int_0^L g(X(t); Y(t)) dt = 0$ .

Dann gilt:  $Y(t) = 0$  für alle  $t \in [0, L]$ .